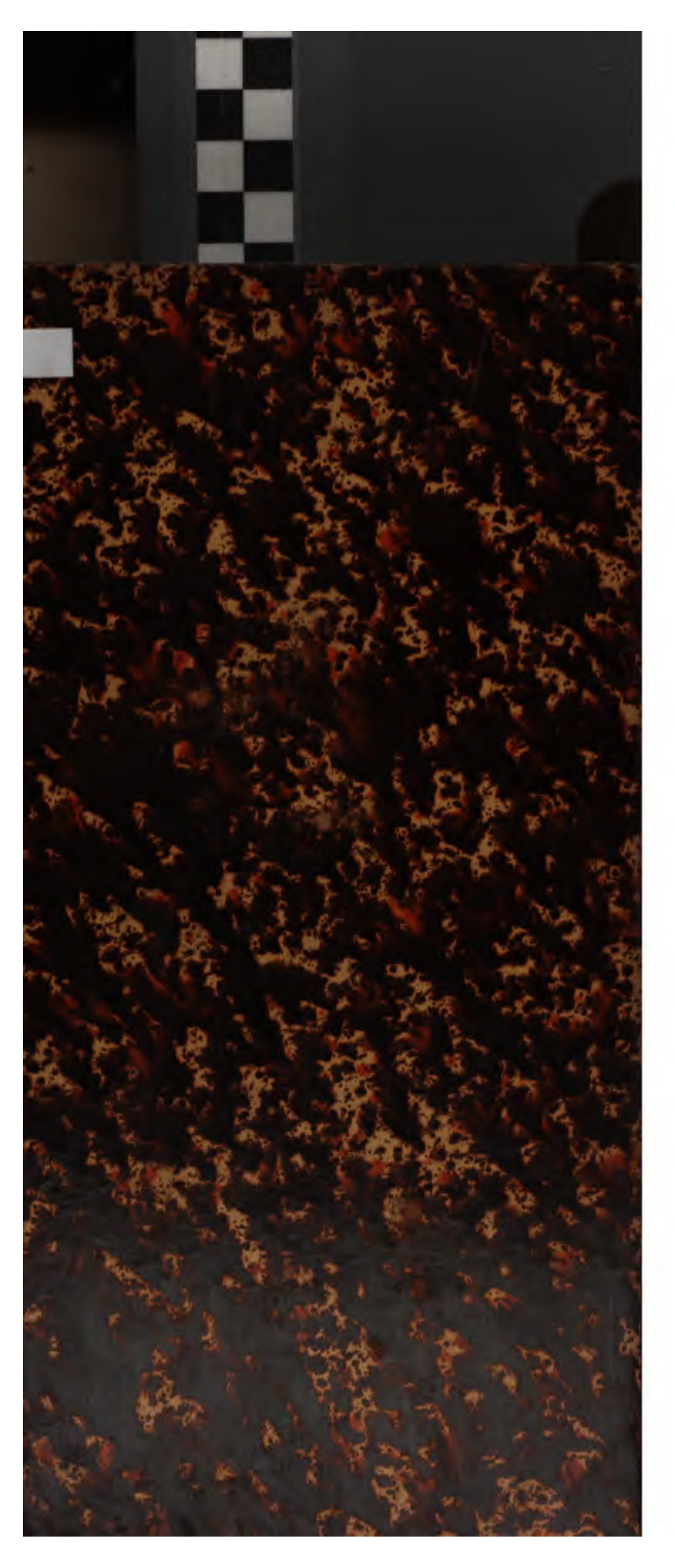
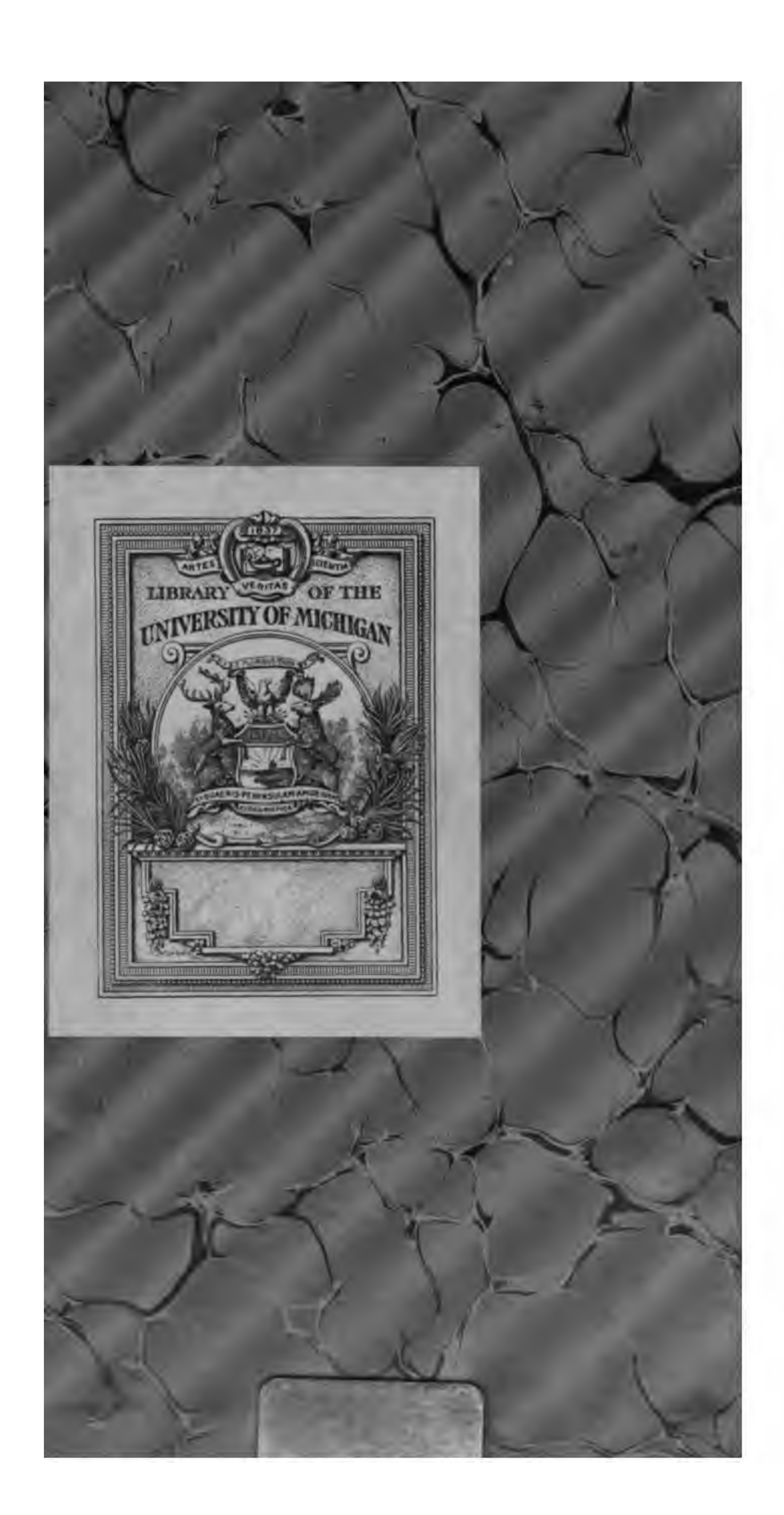
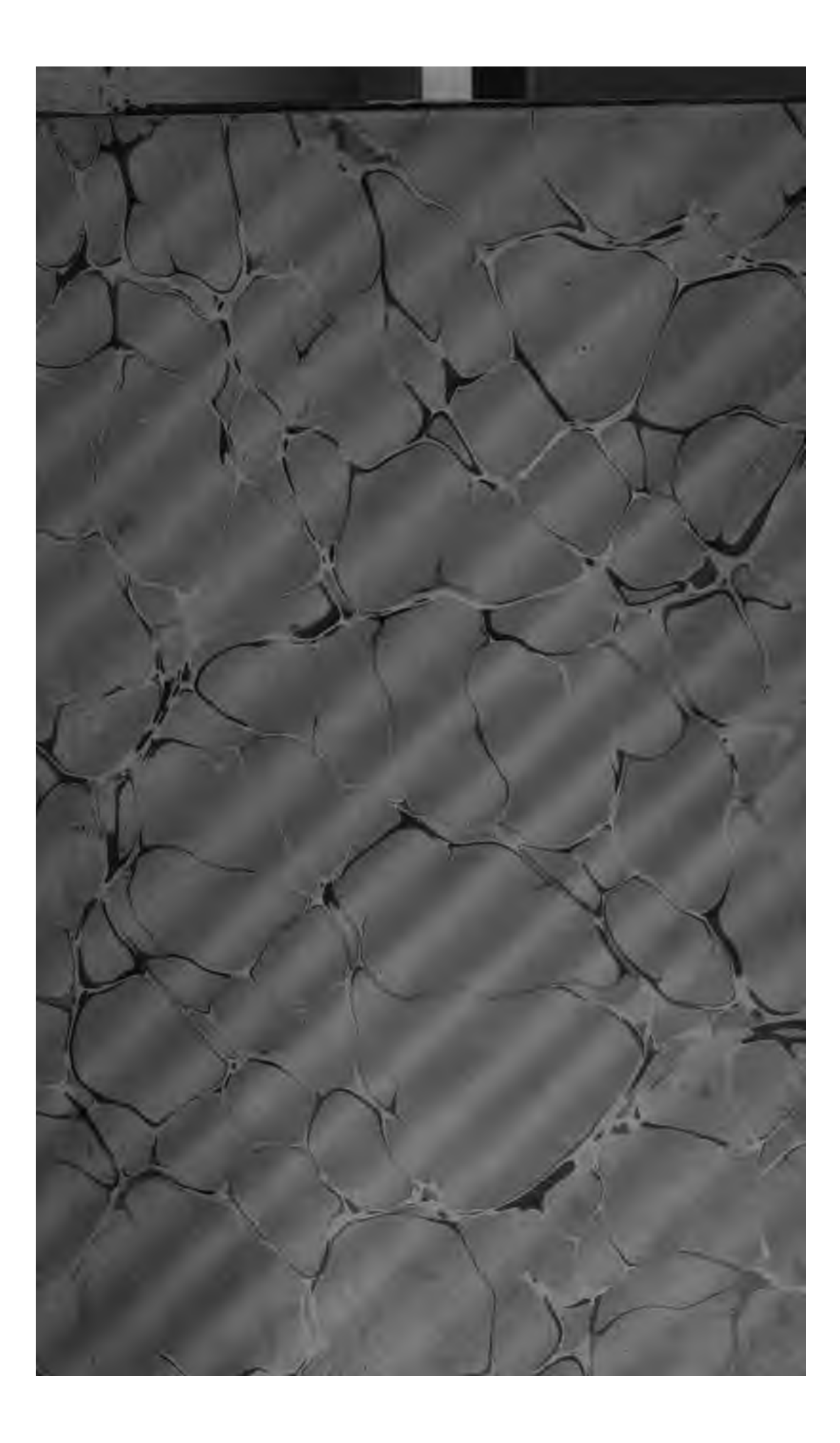



ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ

DES SCIENCES

PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

2e Série

TOME Ier

PARIS
GAUTHIER-VILLARS
IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

A BORDEAUX
CHEZ CHAUMAS-GAYET, LIBRAIRE
Cours du Chapeau-Rouge, 34

1876

LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

au 1er Février 1876.

Composition du Bureau pour l'année 1875-1876.

MM. BAYSSELLANCE, O. ❋, *Président.*
LOQUIN, *Vice-Président.*
ABRIA, O. ❋, *Secrétaire général.*
SAMIE, } *Secrétaires adjoints.*
SCHRADER, }
HOÜEL, *Archiviste.*
POTOCKI, *Trésorier.*
AZAM, ❋, } *Membres du Conseil*
BAUDRIMONT, ❋,
GLOTIN, ❋,
O. DE LACOLONGE, ❋,
LESPIAULT, ❋,
SERRÉ-GUINO,

Membres titulaires.

MM. ABRIA, O. ❋, doyen de la Faculté des Sciences.
ALEXANDRE, pharmacien, membre de la Société Chimique de Paris.
ARMAINGAUD, docteur en médecine.
AZAM, ❋, professeur à l'École de Médecine.
BARCKHAUSEN, professeur à la Faculté de Droit.
BAUDRIMONT (A.), ❋, agrégé libre de la Faculté de Médecine de Paris, professeur de Chimie à la Faculté des Sciences de Bordeaux.
BAUDRIMONT (É.), docteur en médecine, chef des travaux de Physique et de Chimie à la Faculté des Sciences.
BAUMGARTNER, ❋, ingénieur des Ponts et Chaussées à Bordeaux.
BAYSSELLANCE, O. ❋, ingénieur des Constructions navales.
BERT, député de l'Yonne, professeur à la Faculté des Sciences de Paris.
BOUTAN, ingénieur des Mines, à Bordeaux.
BROCHON (E.-H.), avocat à la Cour d'Appel.
CARON, professeur au Lycée de Bordeaux.
CASTET, professeur de Mathématiques.
CHATARD, docteur en médecine.

MM. COLOT, ancien élève de l'École Polytechnique, licencié ès sciences.
DALMEYDA, licencié ès sciences.
DANNECY, pharmacien en chef de l'Hôpital Saint-André.
DELFORTRIE, juge de paix à Bordeaux, président de la Société Linnéenne.
DELMAS, docteur en médecine.
DOUAUD, docteur en médecine.
DROGUET, ✻, inspecteur des lignes télégraphiques.
DUPUY, professeur de mathématiques au Lycée.
ÉVELLIN, professeur de philosophie au Lycée.
FOURNET, ancien fabricant de produits chimiques.
GAYON, docteur ès sciences, chimiste en chef à la Douane de Bordeaux.
GINTRAC (Henri), ✻, directeur de l'École de Médecine.
GLOTIN, ✻, ancien officier de la Marine Militaire.
GUÉPIN, docteur en médecine.
GUESTIER (Daniel), négociant.
GYOUX, docteur en médecine et en chirurgie, médecin-adjoint des Hôpitaux de Bordeaux.
HAUTREUX, ✻, directeur des mouvements du port de Bordeaux.
HOÜEL, professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences.
HUMBLOT, professeur de Mathématiques au Lycée de Bordeaux.
KOWALSKI, professeur de Mécanique à l'École Saint-Sernin.
LABAT, ingénieur-maritime.
LACOLONGE (O. DE), ✻, chef d'escadron d'artillerie en retraite.
LACROIX, professeur de Mathématiques au Lycée.
LAGRANDVAL (DE), ✻, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée.
LANDE, ✻, docteur en médecine.
LAVAL, professeur à l'École Saint-Sernin.
LAVERGNE (comte DE), ✻, propriétaire.
LESPIAULT, ✻, professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences.
LIARD, professeur de Philosophie à la Faculté des Lettres.
LIÈS-BODART, O. ✻, inspecteur de l'Académie de Bordeaux.
LINDER, O. ✻, ingénieur en chef des Mines, directeur de l'École d'Alais.
LOQUIN, secrétaire général de la Société musicale de Sainte-Cécile.
LUUYT, ✻, ingénieur en chef des Mines à Bordeaux.
LUZUN, docteur en médecine.
MARCHAND, étudiant à la Faculté des Sciences.
MÉTADIER (Ad.), docteur en médecine, licencié ès sciences naturelles.
MICÉ, licencié ès sciences, professeur à l'École de Médecine.
MORISOT, professeur de Physique au Lycée.
PABON, fabricant de produits résineux.
PEREZ, professeur de Zoologie à la Faculté des Sciences.
PÉRIER, pharmacien à Pauillac (Gironde).
PERRENS, pharmacien, professeur suppléant à l'École de Médecine.
POTOCKI, licencié ès sciences, conducteur des Ponts-et-Chaussées.
PRAT, chimiste à Bordeaux.

MM. RAGAIN, licencié ès sciences, conducteur des Ponts-et-Chaussées.
RATHEAU, O. ✻, lieutenant-colonel du Génie, professeur à l'École d'Application de Fontainebleau.
RAULIN, ✻, chevalier de l'Ordre du Sauveur de Grèce, professeur de Géologie à la Faculté des Sciences.
RAYET, ✻, professeur d'Astronomie à la Faculté des Sciences.
REDON, secrétaire de la Société musicale de Sainte-Cécile.
RÉGNAULD, ✻, ingénieur des Ponts et Chaussées, à Bordeaux.
ROYER, licencié ès sciences, chef d'institution.
SAINT-VIDAL (DE), directeur de la Compagnie d'Assurances générales.
SAMIE, préparateur d'Histoire naturelle à la Faculté des Sciences.
SANSAS, avocat, député de la Gironde.
SCHRADER (Franz), négociant.
SERRÉ-GUINO, professeur de Physique au Lycée.
SIBILLE, négociant à Bombay (Indes-Orientales).
SOUS, docteur en médecine.
TANNERY (P.), ingénieur des Manufactures de l'État.
TRENQUELLÉON (DE BATZ DE), professeur de Mathématiques au Lycée de Versailles.
VERGELY, docteur en médecine.

Membres honoraires.

MM. BATTAGLINI (G.), professeur à l'Université de Rome, rédacteur du *Giornale di Matematiche*.
BELLAVITIS (G.), sénateur du royaume d'Italie, professeur à l'Université de Padoue.
BONCOMPAGNI (le prince D. Balthazar), à Rome.
COLLINS (Matthew), senior moderator au Collége de la Trinité, à Dublin.
DE TILLY, capitaine d'Artillerie, professeur à l'École militaire de Bruxelles.
FORTI (Dr Angelo), professeur de Mathématiques au Lycée Royal de Pise.
FRENET, ✻, professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon, à Périgueux.
KOWALSKI, directeur de l'Observatoire de l'Université Impériale de Kazan.
RUBINI (R.), professeur à l'Université Royale de Naples.
SCHMIDT (Fr.), architecte à Pest.
WEYR (Em.), professeur à l'Université Impériale de Vienne.

Membres correspondants.

MM. ABADIE, professeur au Collége de Rochefort.
ALMEIDA (Ch. D'), professeur de Physique au Lycée Corneille, rédacteur du *Journal de Physique*, à Paris.
BOURGET, ✻, directeur des Études à l'École préparatoire de Sainte-Barbe, à Paris.

MM. DARBOUX (G.), maître de conférences à l'École Normale supérieure, professeur suppléant à la Faculté des Sciences, à Paris.

GAUTHIER-VILLARS, ✻, ancien élève de l'École Polytechnique, libraire-éditeur à Paris.

GRAINDORGE, répétiteur à l'École des Mines, à Liége.

JEANNEL, O. ✻, pharmacien en chef de l'Hôpital Saint-Martin, à Paris.

LAISANT, ✻, ancien officier du Génie, député de la Loire-Inférieure.

EXTRAITS

DES

PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ.

ANNÉE 1874-75.

Présidence de M. SERRÉ-GUINO.

Séance du 12 novembre 1874. — La Société procède au renouvellement de son Bureau pour l'année 1874-1875. Sont élus :

Président	M. SERRÉ-GUINO.
Vice-Président	M. BAYSSELLANCE.
Secrétaire général	M. LOQUIN.
Secrétaires	MM. SCHRADER et SAMIE.
Trésorier	M. POTOCKI.
Archiviste	M. HOÜEL.
Membres du Conseil d'administration.	MM. ABRIA, AZAM, A. BAUDRIMONT, GLOTIN, DE LACOLONGE, LESPIAULT.

— M. BAUDRIMONT donne communication du résultat d'expériences faites par lui sur des sarments de vigne sains et sur des insectes à propos du Phylloxera. (Voir les *Mémoires*, t. X.)

— M. HOÜEL fait deux communications au nom de M. LAISANT : l'une sur la théorie des nombres, l'autre sur la quadrature des courbes. (Voir les *Mémoires de la Société*.)

Séance du 26 novembre 1874. — Sur la proposition du Conseil, l'Assemblée décide que le dépôt à Paris des Mémoires de la Société sera confié désormais à M. GAUTHIER-VILLARS, libraire de l'École Polytechnique et du Bureau des Longitudes.

— M. PRAT communique à la Société quelques-uns des résultats de sa longue étude sur les vins.

Il expose d'abord à l'Assemblée le tableau général des nombreux principes définis qui constituent les vins de France d'une période décennale quelconque.

Les composés figurant dans ce tableau sont classés suivant

l'ordre analytique et divisés en séries homologues et en groupes analogues.

C'est grâce à tout un nouveau système d'analyse que M. Prat est parvenu, non seulement à déterminer un certain nombre de nouveaux corps dans les vins, mais encore à les doser pondéralement.

Ce travail de longue haleine comprendra dix Mémoires, dans lesquels seront traités, aux points de vue les plus généraux, les sujets suivants dont l'importance est grande à tous égards.

Le premier Mémoire traitera d'abord des quatre œnochrômulines, savoir : de l'œnothallosine, de l'œnocyamine, de l'œnérythrine et de l'œnoxanthine, puis de l'albumine et du tannin des vins.

Le second Mémoire sera consacré à la description des modes analytiques des alcools monoatomiques et des éthers constituant l'arôme vinique, ainsi que le bouquet des vins.

Le troisième traitera des acides préexistants dans les vins et de ceux qui résultent des fermentations et du vieillissement.

Le quatrième traitera des corps neutres des vins, de leurs principes doux : sucres et alcools polyatomiques, ainsi que des matières de nature grasse et résinoïde.

Le cinquième traitera des sels organiques et minéraux, ainsi que de la silice des vins.

Le sixième comprendra les tableaux de sept grandes analyses des meilleurs crûs de la Gironde, avec la description des caractères organoleptiques de ces vins.

Dans le septième seront exposées toutes les observations, expériences et considérations générales sur la constitution des vins de France.

Le huitième traitera des vins naturels, des altérations et des maladies des vins. Il sera, en outre, question des eaux-de-vie et vinaigres de vins.

Le neuvième signalera les imitations grossières et les sophistications des vins, eaux-de-vie et vinaigres, et traitera ensuite de la synthèse possible des vins.

Enfin, le dixième sera consacré aux applications scientifiques, industrielles et commerciales des principes déduits de cette longue étude pratique, et enfin aux conclusions générales.

A mesure qu'il les aura rédigés, M. Prat se fera un devoir de donner lecture de chacun des dix Mémoires à la Société.

Séance du 10 décembre 1874. — M. Boutan, ingénieur des mines, est élu membre titulaire.

— M. Gauthier-Villars est élu membre correspondant.

— M. Perez communique à la Société les résultats de l'étude qu'il a faite de petites excroissances observées sur les racines de diverses légumineuses, dont la production est attribuée à une Anguillule, et que l'on a considérées comme étant le symptôme d'une maladie nouvelle de ces plantes, analogue à la maladie de la vigne causée par le Phylloxera. M. Perez a reconnu que l'Anguillule observée dans ces tubercules est l'Anguillule terrestre, petit nématode absolument inoffensif, et dont la présence dans ces nodosités est la conséquence de leur altération préalable et de leur perforation par un petit acarien qui s'en nourrit, ainsi que l'Anguillule. Du reste, ces renflements n'ont paru coïncider avec aucun symptôme particulier de souffrance dans les plantes qui les portaient. Ils existaient non seulement sur les légumineuses cultivées, telles que pois, fèves, haricots, trèfles divers, mais encore sur des légumineuses sauvages, telles que genêt, ajonc, et même sur le robinier.

— M. Baudrimont expose devant la Société une suite d'expériences qu'il a faites sur l'électricité statique.

Dans les premiers jours du mois d'octobre qui vient de s'écouler, M. Belloc, attaché au laboratoire de chimie, ayant eu la pensée de dessécher un tissu de lin pyroxylé, en le plaçant entre quelques feuillets de papier à filtrer et le frottant avec un fer à repasser porté à une température d'environ 100°, s'aperçut, en retirant le tissu pyroxylé d'une main, qu'il était fortement attiré par l'autre main. Ce fait fut l'origine des expériences suivantes :

Le tissu pyroxylé, dans les circonstances qui viennent d'être indiquées, s'électrise négativement; le papier qui l'enveloppe est électrisé positivement. L'ensemble des deux papiers électrisés n'exerce pas d'action sur un électroscope à balles de sureau dorées. Un tissu de soie ne s'électrise point dans le papier ordinaire, mais il s'électrise fortement et positivement dans le tissu de pyroxyle.

Le verre et le cristal de roche, coupés dans différentes directions, s'électrisent positivement dans le pyroxyle et négativement dans le papier Berzélius. Les micas à un axe et à deux axes, ainsi que le gypse en lames, ne s'électrisent sensiblement ni dans le papier ni dans le pyroxyle. Il en est de même des métaux. La gutta-percha fond et s'électrise à peine, le caoutchouc s'électrise négativement dans le papier à filtrer.

Les corps qui ne s'électrisent point prennent une température fort élevée. Ceux qui s'électrisent, au contraire, s'échauffent beaucoup moins.

Aucun des corps ne s'électrisant si l'on se borne à le chauffer entre deux lames de papier ou de pyroxyle, sans faire intervenir le frottement, M. Baudrimont conclut de ce fait que ce n'est point la chaleur, mais le frottement qui détermine le développement de l'électricité, d'où il résulte qu'elle est principalement due à l'ébranlement des particules et non à celui des molécules, et que ce résultat vient confirmer le nom qu'il avait donné à l'électricité développée par le frottement en la nommant *électricité mécanique*, nom qui, plus tard, a été transformé en celui d'*électricité statique*.

M. Baudrimont conclut de ses expériences qu'elles confirment la théorie qu'il a principalement développée dans son neuvième Mémoire sur la Dynamique corpusculaire, inséré dans les Actes de la Société : 1° Que l'électricité dite *statique* est due au mouvement des particules, et 2° que l'électricité dite *dynamique*, qu'il avait caractérisée par le nom de *chimique*, est due d'une manière certaine et indubitable au mouvement des éléments qui constituent les molécules, et qu'elles sont essentiellement distinctes, mais peuvent se transformer l'une dans l'autre.

— M. Abria fait remarquer que rien n'autorise dans l'état actuel de la science à considérer l'électricité statique comme différente de l'électricité dynamique.

Il demande à M. Baudrimont quelles raisons le portent à les considérer comme distinctes.

— M. Baudrimont répond que l'électricité statique ne peut faire naître directement de réactions chimiques, tandis que l'électricité dynamique, produite par des mouvements moléculaires et des actions chimiques, réagit à son tour chimiquement avec la plus grande facilité. Ces électricités sont donc fondamentalement différentes, mais elles peuvent être transformées l'une dans l'autre.

— M. Abria persiste dans son opinion, et demande qu'il en soit fait mention au procès-verbal.

— M. Serré fait observer qu'en essayant d'aimanter des barreaux d'acier par l'électricité dynamique, il a toujours observé comme M. Baudrimont que si le métal ne s'aimante pas il s'échauffe.

— M. Lespiault communique à la Société les observations que ses collaborateurs et lui ont faites sur les étoiles filantes du mois de novembre. Parmi ces collaborateurs, il cite particulièrement MM. Glotin et Samie, membres de la Société.

La nuit du 13 au 14 a présenté des éclaircies, mais on n'a pu apercevoir aucune étoile. La nuit du 15 au 16 a été entièrement pluvieuse. La nuit du 14 au 15 a été au contraire très belle, particulièrement entre minuit et trois heures du matin.

On a aperçu une cinquantaine d'étoiles, sur lesquelles 37 trajectoires ont pu être tracées. Sur ces 37 trajectoires, 8 au plus se classent nettement au nombre des Léonides. 7 ou 8 autres paraissent irradier autour d'un point de la constellation de la Chèvre; pareil fait avait déjà été signalé en 1871. Le nombre relativement très grand des étoiles sporadiques montre que la Terre n'a traversé que l'extrémité de l'essaim des Léonides, et que le phénomène peut être considéré comme terminé pour une période de plus de vingt ans.

Les observateurs ont cru remarquer que les étoiles étaient généralement plus blanches et plus brillantes que dans quelques-unes des années antérieures, particulièrement l'année 1871. En outre, elles étaient très lentes, ce qui peut tenir, pour chacune d'elles, non seulement à sa vitesse relative, mais aussi à la hauteur à laquelle elle traverse l'atmosphère et à l'inclinaison de sa trajectoire sur l'horizon. Enfin, les Léonides franches étaient, comme d'habitude, plus brillantes que les autres étoiles; elles avaient des parcours apparents plus étendus et laissaient plus de traînées. On pouvait en quelque sorte les reconnaître au premier coup d'œil.

— M. RAULIN demande si l'on sait maintenant à quelle hauteur ces corps s'enflamment.

— M. LESPIAULT répond que les observateurs s'accordent à admettre une hauteur moyenne de 125 kilomètres à l'entrée dans l'atmosphère et de 82 kilomètres à la sortie.

— M. RAULIN, par suite de l'insertion d'une note de M. Delfortrie dans le dernier numéro du *Bulletin de l'Association scientifique,* commente les preuves d'un affaissement de la côte du golfe de Gascogne données par l'auteur.

1° Les deux puits de Saint-Jean-de-Luz, dont la margelle est à 4 mètres au-dessus du niveau de la mer, lui paraissent absolument en contradiction; il n'admet là qu'un déblaiement des sables environnants.

2° Le courant signalé sur la plage d'Andernos doit être nul ou beaucoup plus faible que le courant de Rennell, qui rase la côte et n'empêche pas les sables de cheminer vers le Sud.

3° L'envahissement de Lège par les dunes n'établit en rien un affaissement. « Certainement, dit en terminant M. Raulin, je suis loin de contester la *possibilité* d'un affaissement du sol du Médoc et de toute la côte du golfe de Gascogne, de la côte de Bretagne au pied des Pyrénées; mais je crois pouvoir continuer à dire qu'en l'absence d'aucunes mesures, si faciles à prendre ou à vérifier par les habitants des côtes, les faits cités par M. Delfortrie ne permettent même pas d'admettre la *probabilité* et à plus

forte raison l'*existence* d'un fait pareil. Il n'y a là, je le répète, qu'une hypothèse gratuite. »

— M. Delfortrie répond qu'en l'absence d'autres faits plus probants, ceux qu'il a cités lui paraissent suffisants.

Séance du 24 décembre 1874. — M. Perez demande si la Société ne pourrait pas faire prendre des mesures exactes, afin de savoir si le recul de certaines parties de la côte de Gascogne provient d'un affaissement, comme le soutient M. Delfortrie, ou d'une érosion, comme l'affirme M. Raulin. La question est réservée pour une autre séance.

— M. Bayssellance communique quelques observations faisant suite à celles dont il a déjà parlé dans la séance du 2 avril 1874, au sujet des traces laissées par l'ancien glacier de la vallée d'Ossau, dans les Pyrénées.

D'après ses premières observations, faites au nord du débouché de la vallée, aux environs des villages de Belair, Sevignacq, Sainte-Colomme, etc., M. Bayssellance avait pu assigner au glacier une épaisseur minima de 400 mètres au-dessus du sol actuel de Louvie-Juzon. De nouvelles courses à l'intérieur de la vallée lui ont permis de relever ce minimum jusqu'à 500 mètres au moins.

A l'est du village de Castets s'ouvre, dans le sens des *Alpes principales,* une vallée secondaire qui se prolonge vers l'ouest, vers le plateau de Bilhères, où, rencontrant une fracture dans le sens des *Pyrénées,* elle produit un évasement triangulaire s'ouvrant sur la vallée d'Ossau. Cet évasement et la vallée de Castets ont été comblés tous les deux par des dépôts glaciaires s'élevant au même niveau : 911 mètres. L'un forme le fertile plateau de Bilhères; l'autre, raviné par les eaux provenant des montagnes supérieures, laisse voir l'énorme épaisseur de la couche de boue glaciaire et de cailloux roulés qui comble la fissure primitive. Les blocs erratiques se retrouvent jusqu'au plateau supérieur. Il est donc certain que le glacier entre ces deux points, c'est-à-dire à 2 kilomètres au-dessus de Louvie-Juzon, devait s'élever notablement au-dessus de 900 mètres, et qu'à Louvie même la hauteur devait être à peu près de 900 mètres, ce qui lui assignait une épaisseur de 500 mètres au-dessus du sol actuel, dont l'altitude est de 400 mètres.

La vallée d'Aspeigt, qui débouche à Bielle, au bas du plateau de Bilhères, contient à 3 ou 4 kilomètres plus haut des blocs de granit roulés, qui n'ont pu arriver là qu'en passant par un petit col situé à près de 980 mètres. Ce col porte, du reste, des traces

évidemment morainiques et par sa configuration et par les blocs erratiques qui s'y trouvent en abondance.

La Montagne Verte et le Gourzy portent aussi des blocs erratiques à plus de 1,000 mètres d'altitude; mais sur ce dernier les débris tombés du sommet les masquent presque complètement.

Les blocs erratiques de Goust, situés à 300 mètres de hauteur au-dessus des Eaux-Chaudes, ont été signalés par M. Martins et regardés depuis comme la limite probable du glacier dans cette région. Mais en s'élevant au-dessus de Goust, M. Bayssellance a trouvé à Lusque, à 1250 mètres d'altitude, c'est-à-dire à 600 mètres au-dessus des Eaux-Chaudes, un petit plateau morainique. Quelques-uns des blocs qui s'y trouvent étant de nature granitique, leur origine glaciaire ne peut être douteuse. Du reste, d'après la hauteur de 980 mètres qui a été trouvée près de Bielle, à 10 kilomètres de distance en ligne droite, une hauteur de 1280 mètres aux Eaux-Chaudes ne supposerait que 30 millimètres par mètre de pente moyenne, et ce serait bien peu, puisque le glacier d'Argelès, dont l'étendue était beaucoup plus considérable, avait, d'après MM. Martins et Collomb, 39 millimètres. Il est donc à présumer que le glacier a dépassé notablement ce niveau.

Ces nouvelles données correspondent mieux, du reste, aux traces que l'on trouve dans certaines vallées secondaires, et qui dénotent un grand développement des affluents du glacier. Ainsi, près de la mine d'Ar, à 2000 mètres d'altitude, à peu de distance de la profonde vallée de Sousonéou, toutes les roches de calcaire dur qui constituent le flanc de la montagne sont polies et énergiquement striées. Ce fait montre quelle devait être la puissance du glacier dans la vallée située à 600 mètres en contre-bas.

En présence de ces faits, M. Bayssellance renouvelle les doutes qu'il a déjà exprimés au sujet de la limite de 415 à 450 mètres d'épaisseur assignée par MM. Martins et Collomb au glacier d'Argelès, près de Lourdes.

Il est bien entendu qu'il ne s'agit que de la dernière période glaciaire qui a coïncidé avec l'époque post-pliocène. Quant à la période glaciaire antérieure, contemporaine, croit-on, de l'époque miocène, elle a laissé des traces de nature différente et beaucoup plus étendues, dont M. Bayssellance a déjà entretenu la Société.

— M. Lespiault fait la communication suivante :

« Le mardi 15 décembre, j'ai aperçu en sortant de chez moi, à $6^h\,45^m$ du soir, une couronne lunaire d'une intensité tellement exceptionnelle, que je crois devoir en donner la description détaillée. La lune, à son premier quartier, brillant, sous un ciel

légèrement vaporeux, d'un éclat assez vif pour laisser voir très distinctement les taches de son disque, était enlacé d'un cercle de 3 à 4 degrés de rayon dont les teintes, en partant du centre, passaient du bleu verdâtre au jaune le plus intense. Venait ensuite un anneau lumineux d'un rouge éclatant passant graduellement au pourpre sur son contour extérieur, puis plus loin au blanc, au vert et au jaune pâle. Toutes ces teintes étaient aussi nettes et aussi prononcées que celles du plus bel arc-en-ciel solaire, mais un peu plus mates. La portion la plus foncée des anneaux rouges semblait ressortir comme une espèce de bourrelet.

» Au bout de deux minutes environ, des flocons vaporeux, poussés par le vent du Nord dans des régions très basses de l'atmosphère, s'avancèrent vers la lune et commencèrent à s'interposer entre l'œil et la couronne. A leur approche, le bord septentrional des cercles concentriques se déforma légèrement, et les couleurs perdirent graduellement de leur intensité. Les vapeurs envahissantes se détachaient en bleu opalin sur le fond lumineux de la couronne dont elles troublaient peu à peu l'éclat transparent. L'aspect du phénomène rappelait l'extension graduelle d'un précipité caillebotté dans une faible dissolution saline, ou le passage de la fumée de tabac sur un faisceau lumineux traversant une chambre obscure. A $6^h\,50^m$, la plupart des couleurs avaient disparu, et il ne restait qu'une auréole d'un beau jaune autour de la lune.

» Les rares passants qui se trouvaient dans la rue au moment où je levais les yeux vers le ciel s'arrêtèrent admirant comme moi la beauté de cette couronne; aucun d'eux ne retrouvait rien de pareil dans ses souvenirs. De mon côté, je ne saurais comparer à cet aspect si net et si complet les cercles imparfaits ou de nuances douteuses que j'ai souvent vus se former un instant sur telle ou telle partie du contour des auréoles lunaires. Aucune des personnes que j'ai interrogées depuis mardi n'a été témoin du phénomène, bien que plusieurs d'entre elles aient remarqué, à une heure plus avancée, l'intensité extraordinaire de l'auréole et sa couleur d'un jaune vif. Il est probable, d'après cela, que les cercles concentriques n'étaient formés que depuis peu de temps au moment où je les ai aperçus.

» On sait que ces apparences sont dues à un phénomène de diffraction qui se produit dans le passage de la lumière entre les vésicules d'un nuage, et que la mesure exacte des dimensions annulaires est le meilleur moyen d'évaluer le diamètre de ces vésicules. Je n'ai pas eu le temps de prendre ces mesures, et je

me suis borné à constater que le rayon du cercle jaune contenait 7 à 8 fois le diamètre apparent de la lune.

» Quatre jours plus tard, le samedi 19 décembre, il s'est formé, entre 10 et 11 heures du soir, après une assez forte pluie, une nouvelle auréole lunaire, peut être aussi remarquable que la précédente. Vers 11 heures 1/2, elle atteignait tout son éclat. Elle se composait de trois anneaux concentriques renfermant chacun toutes les couleurs, en allant du centre à la circonférence; au delà du 3ᵉ cercle rouge, il y avait encore du bleu et surtout du vert. Les couronnes de ce genre sont très rares, d'après sir J. Herschel (*Meteorology*). Cette couronne, plus complète que celle du 15, était cependant beaucoup moins belle. Les couleurs étaient moins brillantes et moins nettes; les anneaux rouges, au lieu de présenter des teintes écarlates ou pourpres tiraient sur le rouge brun; les taches du disque étaient peu visibles. En outre, les dimensions étaient moindres pour chaque anneau; je n'ai compté que 5 diamètres lunaires du bord de l'astre au premier anneau rouge, ce qui donne 15 à 18 degrés pour le *diamètre* total de l'auréole.

» De légers nuages moutonnés, venant du Nord, passaient rapidement en rangs serrés sur la couronne; mais, bien qu'ils présentassent l'aspect du cirrho-cumulus, la vitesse de leur marche et l'immobilité relative des anneaux montraient que le phénomène de diffraction s'opérait dans des vapeurs vésiculaires invisibles situées beaucoup plus haut. Vers 11 h. 3/4, les cercles s'effacèrent peu à peu, et je n'ai plus aperçu, jusqu'à 1 heure du matin, que des nuages floconneux très blancs et très bas courant avec une extrême rapidité, comme des torrents de fumée, sur un ciel d'ailleurs très pur.

» L'apparition de deux couronnes si remarquables à peu de jours d'intervalle me porte à croire que les circonstances atmosphériques actuelles sont particulièrement favorables à ce genre de phénomène, et ce qui semble confirmer cette opinion, c'est que, pendant toute la semaine, la lune est restée presque constamment environnée d'une auréole. Le lundi 21 décembre, particulièrement, on pouvait distinguer sur un fond jaune des anneaux concentriques rouges ou plutôt roussâtres. Les autres couleurs étaient très peu marquées. Les cartes de l'Observatoire montrent que, depuis un mois environ, le courant équatorial s'est établi sur l'Europe moyenne. Les incursions du vent du Nord dans les couches inférieures expliquent les neiges et les orages de ces derniers jours. Il est probable que les régions supérieures sont au contraire fort calmes. Car, pour que des vésicules de vapeur puissent donner

naissance à un système d'anneaux aussi brillants et aussi complets que ceux dont je viens de donner la description, il faut qu'elles aient une égalité de diamètre et une homogénéité incompatibles avec une forte agitation du milieu qui les renferme. »

Séance du 7 janvier 1875. — M. Samie donne lecture, au nom de M. Perez, empêché d'assister à la séance, de la note suivante :

« Un de mes élèves, M. Lataste, qui s'occupe très activement d'erpétologie et va publier prochainement le catalogue des reptiles de la Gironde, me remit, il y a quelque temps, deux embryons du lézard des murailles, d'âge fort différent. Le plus petit, qui est assez peu avancé pour que la boîte crânienne n'ait pas encore ses parois ossifiées, présente une palmure des extrémités, tant antérieures que postérieures, tout aussi manifeste que celle qui s'observe aux pattes de la grenouille. Entre les doigts encore fort courts et divergents est tendue une membrane épaisse, dont le bord libre forme d'une extrémité digitaire à l'autre une courbe concave.

» Sur l'autre embryon, beaucoup plus avancé, les extrémités ont leurs doigts très développés, fort longs, accolés très immédiatement l'un à l'autre, sauf le pouce, qui diverge. Leur adhérence est maintenue par le reste de la membrane interdigitaire, qui s'atrophie et tend à disparaître, en sorte qu'il est facile, par une légère traction, de séparer les doigts les uns des autres. Sur un embryon plus avancé que ce dernier, on peut induire que la résorption de la membrane eût été complète, et les doigts tout à fait libres.

» Ce fait remarquable dans le développement du lézard ne se trouve mentionné par aucun des auteurs qui ont traité de l'embryologie de ce reptile. »

— M. Prat donne lecture du premier chapitre de son grand travail sur les vins.

« Les expériences dont il expose aujourd'hui les résultats ont pour but de démontrer la coexistence de deux, trois et jusqu'à quatre matières colorantes distinctes dans les vins, d'indiquer en outre les modes d'extraction et de décrire leurs propriétés.

» Le principe de la séparation intégrale des œnôchrômulines, dans leur propre milieu, repose sur la propriété que possède l'hydrate de zinc naissant en leur présence, de contracter avec elles, ou plus exactement avec leurs tannates, des combinaisons définies, absolument insolubles dans l'eau, l'alcool et l'éther.

» Deux réactifs suffisent pour réaliser cette séparation, ce sont l'ammoniaque et l'acétate de zinc.

» M. Prat décrit les principaux caractères de ces nouvelles

combinaisons qu'il désigne sous le nom de tanno-zincates d'œnochrômulines. Il décrit ensuite les modes d'extraction de chacun de ces principes colorants dans différents vins, ainsi que les conditions opératoires pour réaliser successivement la séparation des œnochrômulines coexistant toutes quatre dans un même vin. Il dépose sur le bureau des dissolutions de ces corps.

» Quant à l'isolement de ces substances de leurs tanno-zincates respectifs, il est fondé sur un principe très simple : l'ammoniaque ne dissout pas le tannate de zinc, tandis qu'elle dissout très bien les zincates d'œnochrômulines. En saturant l'ammoniaque par l'acide sulfurique, dans la liqueur filtrée, le zincate d'œnochrômuline se sépare entièrement en flocons insolubles.

» Ce corps recueilli avec les soins voulus est traité en présence de l'alcool par l'acide sulfurique concentré en quantité stricte pour former du sulfate de zinc qui reste insoluble et du sulfate d'œnochrômuline qui se dissout.

» En filtrant la liqueur et la traitant par le carbonate d'ammoniaque dissous, on précipite entièrement l'œnochrômuline qu'on s'est proposé d'obtenir.

» Les œnochrômulines jouissent d'un ensemble de propriétés communes. M. Prat en fait la description que nous résumons ainsi :

» Desséchées à 100°, ces substances sont des poudres noires ou brun foncé, inodores, absolument insipides. Leur densité varie entre 1,184 et 1,186. Elles sont inaltérables à l'air, insolubles dans l'eau, l'alcool et l'éther, mais très solubles dans les acides et dans l'ammoniaque, surtout lorsqu'elles sont hydratées. L'acide sulfureux décolore les œnochrômulines dans leurs dissolutions acides sans les altérer. Le chlore les décompose rapidement.

» Les alcalis fixes se comportent d'abord vis-à-vis d'elles comme l'ammoniaque, mais ils ne tardent pas à les modifier profondément à froid et à les transformer complètement à l'ébullition.

» Soumises à l'action de la chaleur, les œnochrômulines se décomposent avec dégagement de vapeurs épaisses d'une odeur empyreumatique repoussante. Le résidu de cette décomposition est un coke noir, en paillettes dures, brillantes, fort peu combustibles.

» Distillées avec excès de chaux sodée, les œnochrômulines produisent 22 p. 100 d'ammoniaque. Ce sont donc des matières azotées M. Prat les considère d'ailleurs comme de véritables bases organiques d'un genre tout particulier qu'on retrouve dans tous les fruits acides. M. Prat présente les échantillons de ces matières.

» D'après M. Prat, on a de tout temps confondu la matière colo-

rante du vin, proprement dite, avec les tannates des substances qu'il vient de décrire. Aussi, pour prévenir désormais de nouvelles confusions à cet égard, M. Prat croit utile d'indiquer la préparation et de tracer les principaux caractères de ces tannates.

» Ces corps, dans certaines circonstances, fonctionnent comme de véritables glucosides. M. Prat rapporte des expériences dont le résultat autorise pleinement cette manière de voir.

» Au surplus, le tannin des œnochrômulines ayant subi une forte oxydation, celles-ci sont, non seulement susceptibles de fonctionner en glucosides azotés, mais encore de jouer le rôle de ferments.

» De cet ensemble de notions précises que M. Prat vient de donner sur les matières colorantes des vins, doivent découler des applications pratiques dont l'importance ne saurait être méconnue.

» Ces nouveaux faits serviront très utilement :

» 1° A la recherche des colorations artificielles des vins;

» 2° Aux recherches toxicologiques ;

» 3° A l'explication des phénomènes bizarres qui se manifestent intempestivement dans les vins;

» 4° A la préservation des altérations auxquelles le vin est si sujet, etc.

» M. Prat reviendra sur ces questions dans le chapitre VII du présent travail. Mais en attendant il désire prendre date sur l'existence de la thallosine dans l'organisation végétale, substance différente de la chlorophylle en ce qu'elle est azotée, qu'elle n'existe pas dans le même protoplasma cellulaire, et que la forme qu'elle affecte dans les cellules est très distincte des globules sphériques ou oblongs de chlorophylle.

Séance du 21 janvier 1875. — M. Hautreux, directeur du Port, est élu membre de la Société.

— M. Raulin, à la suite de la communication de M. Lespiault dans la séance précédente, présente à la Société les 2e et 3e Rapports sur la Météorologie du professeur James-P. Espy, accompagnés de 98 *Charts illustrating the weather*, du 1er avril 1843 au 1er décembre 1845. Sur ces cartes des États-Unis se trouvent indiqués : les écarts de température, les lignes maxima et minima de pression barométrique, la direction et la force du vent, enfin la quantité de pluie tombée. Ces cartes, terminées par M. Espy en 1849, ont été publiées en 1851 par le département de la marine, douze années avant les premières cartes du *Bulletin de l'Observatoire de Paris,* dressées par M. Marié-Davy le 11 septembre 1863.

— M. Lespiault répond que l'Atlas présenté par M. Raulin ne

donne que les lignes maxima et minima et non les lignes isobares en général; or, c'est la comparaison de ces lignes qui a conduit l'Observatoire de Paris à ses grandes découvertes, qui sont :

1° L'existence habituelle de tempêtes tournantes à nos latitudes;

2° Les relations remarquables qui existent entre le tracé des courbes isobares et la direction du vent en chaque lieu;

3° La possibilité de prédire le temps à bref délai par le simple examen de cartes diverses.

Séance du 4 février 1875. — M. BELLAVITIS, professeur à l'Université de Padoue, sénateur du royaume d'Italie, est élu membre honoraire de la Société.

— MM. CARON, professeur de mathématiques au lycée, et RÉGNAULD, ingénieur des ponts et chaussées, sont élus membres titulaires.

— M. HOÜEL donne lecture d'une Note : *Sur le rôle de l'expérience dans les sciences exactes :*

« L'auteur fait d'abord observer que les phénomènes réels n'étant pas susceptibles de déterminations rigoureuses, ne peuvent être pris immédiatement pour objet d'une science exacte. La faculté d'abstraction dont notre esprit est doué leur substitue des phénomènes idéaux, se rapportant à des êtres de raison, dépourvus d'existence réelle, et définis seulement par les propriétés qu'on leur attribue.

» Le choix de ces propriétés est *à priori* arbitraire et soumis à la seule condition de n'offrir rien de contradictoire. Seulement, en vue de l'utilité que l'on veut tirer de la science abstraite, on s'efforce de les rapprocher autant que possible des propriétés que l'on observe approximativement dans les phénomènes réels.

» Toute déduction logique des hypothèses sur lesquelles est fondée la science abstraite est *absolument vraie* au point de vue abstrait, lors même qu'elle irait en s'écartant des phénomènes que l'on s'était d'abord proposé de représenter. Dans ce dernier cas, elle n'atteint plus le but désiré; elle peut cependant conserver une valeur au point de vue réel, soit parce qu'elle indique le rôle que peut jouer telle ou telle hypothèse, vraie ou fausse, soit parce qu'elle peut servir pour une autre classe de phénomènes pour lesquels l'hypothèse, erronée ici, cesserait d'être en défaut.

» M. Hoüel applique ces considérations à l'établissement des bases de la Géométrie. On part de l'idée hypothétique d'un espace immobile, dans lequel on sait fixer un point immobile. Le premier fondement de cette science est la notion d'invariabilité de figure,

qui ne peut être étayée, sans cercle vicieux, que par l'identité des sensations tactiles et visuelles que nous offre un corps solide, transporté d'un lieu à l'autre dans l'espace. Cela revient à supposer un corps transportable comme on voudra dans l'espace, sans subir aucune espèce d'altération.

» Il est nécessaire ensuite d'y joindre, dans certaines recherches, la notion, d'origine également subjective, de la distinction entre la *droite* et la *gauche*.

» Les idées de surface, de point, de lignes nous sont fournies par des corps dont 1, 2 ou 3 dimensions nous semblent très petites, et que nous remplaçons par des objets idéaux dans lesquels ces dimensions seraient nulles.

» On reconnaît d'abord qu'un corps fixé par un point peut prendre une infinité de positions.

» Un corps fixé par 2 points peut se mouvoir encore, mais avec une liberté plus restreinte. Dans ce mouvement, une série indéfinie et continue de points sont immobiles. Ces points forment une ligne appelée *droite.*

» L'expérience nous conduit à admettre que 2 lignes droites ne ne peuvent se rencontrer qu'en un seul point.

» Une figure est fixée dans l'espace par son axe de rotation (ou par 2 de ces points) et par un point pris hors de l'axe.

» Il existe une surface superposable à elle-même dans toute son étendue, soit qu'on la fasse glisser le long d'elle-même d'une manière quelconque, soit qu'on la retourne. C'est le plan.

» A l'aide de ces hypothèses qui définissent les éléments des figures, on peut composer une géométrie complète, exempte de toute contradiction, mais renfermant encore un paramètre indéterminé. De ce paramètre, que l'observation seule peut fournir, dépend la différence entre la somme des trois angles d'un triangle rectiligne et deux angles droits. L'expérience nous conduit à admettre que cette différence est nulle, et comme d'ailleurs cette hypothèse simplifie beaucoup la Géométrie, on a dû adopter exclusivement pour les usages réels la Géométrie enseignée par Euclide, et qui a toujours représenté les phénomènes dans la limite des erreurs d'observation.

» Mais la Géométrie généralisée, dans laquelle le paramètre reste indéterminé, n'a pas été sans utilité. Elle a fixé pour la première fois le rôle que joue dans la science l'hypothèse euclidienne. C'est grâce à elle qu'il est devenu si facile de découvrir la source des vices de raisonnement dans les tentatives qui se font encore tous les jours pour créer une Géométrie sans hypothèse. Enfin, quand

on a voulu étudier la géométrie des figures géodésiques tracées sur une surface de courbure constante négative, cette géométrie s'est trouvée toute faite dans les travaux de J. Bolyai et de Lobatchefsky. »

— M. ROYER, qui continue ses recherches sur le *Pouvoir hydrogénant du courant intrapilaire,* communique à la Société une partie du travail dont il s'occupe actuellement, et qui a pour titre : *Étude des phénomènes qui se produisent dans l'électrolyse intrapilaire des acides minéraux.* M. Royer s'occupe d'abord de l'électrolyse de l'acide sulfurique. Dans cette opération il y a dépôt de soufre et production d'hydrogène sulfuré, comme M. Royer avait déjà eu l'occasion de le constater dans un travail antérieur. L'analyse plusieurs fois répétée du liquide du vase poreux n'a jamais donné, après saturation par le carbonate de plomb, de sels solubles. Cela prouve que les acides de la série thionique n'existent pas en liberté dans la liqueur, et que s'ils se produisent ils doivent immédiatement se réduire. Quant à l'acide sulfureux, il n'existe pas même au commencement de l'expérience, et avant la production de l'hydrogène sulfuré, car son odeur n'a jamais pu le faire déceler. On ne peut pas non plus supposer l'existence à l'état libre de l'acide hyposulfureux, car cet acide lui-même se serait scindé en présence de l'acide sulfurique et aurait donné de l'acide sulfureux et un dépôt de soufre. On ne trouve finalement dans la liqueur du vase poreux que de l'hydrogène sulfuré qui se dégage, de l'acide sulfurique normal, de l'eau et du soufre.

La conclusion tirée par M. Royer des considérations développées dans son Mémoire et qu'il donne sous toutes réserves, car il s'agit d'une pure hypothèse, est la suivante :

Il y aurait au commencement de l'électrolyse réduction de l'acide normal jusqu'à l'acide hyposulfureux, avec formation d'eau. A ce moment, cet acide se décomposerait en acide sulfureux et en soufre dont une partie donnerait naissance à de l'hydrogène sulfuré (ce gaz ne commence à se produire qu'après un certain temps).

Dans la seconde partie de l'expérience, c'est-à-dire à partir de l'instant où l'hydrogène sulfuré commence à se dégager, la réduction de l'acide normal s'arrêterait à l'acide sulfureux qui lui-même serait réduit, par l'hydrogène sulfuré, en eau et en soufre.

La réduction ultime donne pour résultat de l'eau qui, s'unissant à l'acide sulfurique non décomposé, en abaisse de plus en plus le titre normal, et un dépôt de soufre qui va continuellement en augmentant jusqu'au moment où la réaction commence à diminuer d'intensité par l'affaiblissement du titre de l'acide soumis à l'électrolyse.

Séance du 19 février 1875. — M. Prat donne lecture du second chapitre de son travail sur les vins : ce chapitre a pour objet l'étude chimique de l'arôme et du bouquet des vins.

Nous résumons ainsi qu'il suit le long exposé de M. Prat sur cet important sujet.

Il appelle tout d'abord l'attention de la Société sur la distinction qu'il y a lieu de faire entre l'odeur vineuse proprement dite, l'arôme vinique et le bouquet. Il définit les propriétés chimiques et organoleptiques de ces trois états caractéristiques du vin ; puis, il aborde la question de savoir quelles sont les causes qui en déterminent la formation, quelle est leur origine, leur nature, leur composition chimique.

Il estime que si ce difficile sujet n'a pas été plus tôt sérieusement abordé, c'est que la science n'avait pas de données suffisantes pour le faire.

Après avoir rapidement indiqué l'état de la question indépendamment de ses propres recherches, M. Prat arrive à l'exposition des méthodes à l'aide desquelles il est parvenu à le traiter d'une manière satisfaisante.

Ayant essayé l'extraction directe du bouquet des vins par le sulfure de carbone très pur, M. Prat obtint une faible partie de ce bouquet sous forme de givre. L'analyse de ce givre lui révéla la présence dans le bouquet des vins d'éthers de la série grasse. Malgré ce résultat, il reconnut qu'il fallait renoncer à toute tentative d'extraction directe du bouquet, à cause de la grande quantité d'alcool éthylique qui vient s'y opposer absolument.

Se débarrasser avant tout de l'alcool éthylique autrement que par voie de distillation fut dès lors le but par lui exclusivement poursuivi. L'étude approfondie qu'il avait faite de l'acide acétique, et des vinaigres, lui fit entrevoir la possibilité de se débarrasser de cet alcool par voie d'acétification en le transformant en acétate de soude cristallisé : par le fait de cette acétification, les alcools supérieurs à l'alcool éthylique sont, eux aussi, transformés en leurs acides correspondants, de même que tous les éthers de la série grasse sont convertis en éthers exclusivement acétiques.

Tel est le principe fondamental de la méthode qu'il imagina pour déterminer par calcul, sur les acides auxquels ils ont donné naissance au cours de l'acétification, les alcools contenus dans le vin.

Cette méthode, que décrit M. Prat, est fort longue et très compliquée. Elle nécessite, pour la détermination des alcools et des éthers du vin, une suite de dix-huit grandes opérations, indépendamment d'analyses très délicates. Il serait difficile d'en résumer

clairement les principes en quelques mots; aussi, nous bornerons-nous à essayer d'en faire saisir le mécanisme qui consiste essentiellement:

1° A déterminer, à l'aide d'une solution de soude titrée, l'acidité absolue du vin destiné à l'expérience;

2° A brûler, par voie d'acétification, tous les alcools du vin, afin de les transformer en leurs acides correspondants;

3° L'alcol éthylique séparé à l'état d'acétate de soude, déterminer, à l'aide de la même solution de soude titrée, la différence entre la teneur acide initiale du vin et celle des acides résultant de l'acétification:

4° A calculer sur la quantité de chaque acide obtenu par oxydation, la quantité de l'alcool qui lui a donné naissance;

5° A transformer en éthers acétiques, par l'acétification du vin, tous les éthers constitutifs du bouquet;

6° A régénérer les alcools dans le mélange des divers éthers acétiques obtenus;

7° A reconstituer le bouquet en faisant réagir des alcools sur les acides de la série grasse extraits du vinaigre en même temps que sur la quantité des acides existant normalement dans le vin.

M. Prat indique les conditions dans lesquelles il faut se placer pour déterminer soit les alcools mono-atomiques, soit les éthers concourant à la formation du bouquet. Après avoir décrit les modes opératoires de sa nouvelle méthode, il fait remarquer que, les résultats par lui signalés ne concordant pas avec les diverses opinions des éminents chimistes qui se sont occupés du même sujet, il n'a pu échapper à l'obligation de discuter ces opinions.

De l'ensemble des faits qu'il a recueillis au cours de ses nombreuses expériences dans une période de douze années, M. Prat conclut:

1° Qu'il existe dans les vins au moins six alcools mono-atomiques;

2° Que, sous l'influence exclusive de l'élément temps, ces alcools s'éthérifient avec leurs acides correspondants pour donner naissance au bouquet, lequel est ordinairement constitué par six, au moins, quatorze au plus, des éthers de la série grasse dont il a fait précédemment l'énumération;

3° Que les acides fixes préexistants dans le vin, de même que ceux qui, également fixes, résultent des fermentations, éthérifient aussi à la longue les alcools d'une manière particulière, en produisant des parfums fugaces, il est vrai, mais susceptibles de contribuer

aux divers caractères organoleptiques qu'affecte alors le bouquet normal des éthers composés volatils ;

4° Que l'odeur vineuse, ainsi que l'arôme vinique, bien que d'une composition plus simple que le bouquet (mais, néanmoins, extrêmement variable d'année en année), peut être fondamentalement représentée par : l'alcool allylique et des aldéhydes, le propionate propionique, le valérate amylique et l'œnanthate éthylique ;

5° Que les aldéhydes n'existent que transitoirement dans les vins et se détruisent par l'oxydation de ceux-ci en tonneau, en se transformant en leurs acides correspondants.

En terminant, M. Prat dit que, pas plus que la question des matières colorantes, celle des éthers n'a été ici épuisée. En traçant, dans le chapitre VI de son travail, les règles précises de l'analyse des vins, il décrira les moyens d'effectuer les difficiles analyses que comporte la méthode qu'il vient d'exposer ; de même, dans le chapitre VII, il traitera à fond la question relative aux divers bouquets qui constituent des différences très appréciables entre les vins d'élite d'une même contrée.

— M. Micé donne connaissance à la Société de la manière sous laquelle il envisage les diverses combinaisons oxygénées du soufre.

— M. Loquin a observé un bolide remarquable, le 10 février, à 5 h. 48 m. du soir (heure de Paris). Il traversait la petite passerelle qui se trouve près de l'économat des chemins de fer du Midi, quand il aperçut le bolide qui tombait dans la direction du clocher de Saint-Michel, en se dirigeant de droite à gauche avec une assez grande lenteur. La nuit n'était pas encore venue, on allumait à peine les premiers becs de gaz.

Ce bolide apparut d'abord comme une longue traînée de feu, dont une partie ne tarda pas à éclater et à s'épanouir en une sorte de bouquet d'artifice de plusieurs couleurs, parmi lesquelles se distinguaient le bleu, le rouge et l'orangé. Mais le phénomène n'était pas terminé. Le reste de la traînée continua sa marche et finit par s'épanouir à son tour d'une manière aussi brillante que la première portion. Bien qu'il fît encore jour, une trace blanche et lumineuse, coupant le ciel obliquement dans la direction du N.-E. au S.-O., resta visible pendant quelques minutes.

Séance du 4 mars 1875. — M. Sibille, négociant à Bombay, est élu membre titulaire de la Société.

— M. Perez fait une communication sur les parasites de la vigne.

— M. Bayssellance entretient la Société des moyens nouveaux

employés à bord du navire le *Bessemer*, destiné à la traversée du Pas-de-Calais, pour obtenir la suppression du roulis.

— M. Schrader donne quelques renseignements sur un autre navire, la *Castalia*, destiné au même service, et composé de deux coques-jumelles, avec quatre chaudières et deux roues à aubes travaillant entre les deux coques. Ce navire a donné de mauvais résultats, sa marche étant de 15 kilomètres à l'heure seulement, et les oscillations brusques des deux coques jumelles étant beaucoup plus fatigantes que les ondulations douces d'un navire isolé.

Séance du 18 mars 1875. — M. Baumgartner, ingénieur des ponts et chaussées, est élu membre titulaire.

— M. Baudrimont communique à la Société le résultat des expériences qu'il a faites sur la fermentation visqueuse et sur l'altération des eaux distillées.

— A ce propos, M. Glotin attire l'attention de la Société sur un fait observé récemment dans la fabrique de liqueurs qu'il dirige. En nettoyant le compteur d'eaux de la ville, situé dans la partie la plus élevée de l'établissement, on y a trouvé de longues traînées de matières visqueuses et flottantes; les ouvriers de l'administration des eaux, questionnés à ce sujet, ont dit avoir fréquemment trouvé de semblables formations dans les fabriques de liqueurs; mais jamais ailleurs.

— M. Baudrimont rappelle un fait à peu près semblable observé en 1870, à l'époque des sécheresses, dans les aqueducs souterrains qui alimentent Bordeaux.

— M. Glotin répond qu'il ne peut être question de matières identiques, car tous les compteurs de la ville devraient alors présenter les mêmes formations. Il est plus probable que les émanations des matières parfumées employées à la fabrication des liqueurs se combinent avec l'eau pour produire ces filaments visqueux.

— M. Baudrimont fait une seconde communication relative aux travaux qu'il poursuit sur la chimie agricole. Il affirme que la plupart des engrais artificiels dont on a fait grand bruit depuis quelque temps, sont en partie inefficaces; les uns, parce qu'ils ne fournissent au sol qu'une partie des éléments dont il a besoin pour produire la récolte qu'on lui demande; les autres, parce qu'ils doivent être entraînés le plus souvent par les pluies avant d'avoir fourni les éléments assimilables.

— M. Micé cite des expériences faites par lui dans un terrain et où les engrais attaqués par M. Baudrimont ont donné d'excellents résultats.

— M. Baudrimont répond que c'est tout naturel si l'engrais essayé a justement donné au sol ce qui lui manquait dans le moment; mais que deux ou trois ans de culture ne pourront manquer d'enlever à ce sol quelque substance que cet engrais ne lui rendra pas; et que, du reste, il faut ne pas perdre de vue qu'un engrais excellent pour un terrain, peut ne rien valoir pour un autre. D'ailleurs ce choix doit être fait d'une manière éclairée.

Séance du 8 avril 1875. — M. Perez entretient la Société d'un cas de monstruosité complexe présenté par un pied cultivé de *Dianthus caryophyllus,* dont la plupart des fleurs montraient une multiplication exagérée de verticilles et des pièces dans chaque verticille. La multiplication des verticilles donnait naissance à 2, 3 et jusqu'à 4 fleurs emboîtées (prolifération floripare). La multiplication des pétales était surtout remarquable en ce que, de certains points du réceptacle naissaient, à la place des pétales, des sortes de bourgeons pétalifères, pédiculés. Après avoir signalé quelques autres particularités de ce cas tératologique, M. Perez émet l'opinion qu'elles peuvent toutes se ramener au phénomène de la fasciation. Il croit même que la fasciation, la multiplication, le dédoublement, sont des phénomènes de même ordre, et sont la conséquence de l'hypergénèse des faisceaux fibro-vasculaires de la tige.

Séance du 22 avril 1875. — M. Baudrimont lit une note sur les ascensions aérostatiques à grande hauteur et sur les moyens à employer pour éviter une partie des dangers qu'elles présentent. D'après M. Baudrimont, les accidents sont dus à plusieurs causes, dont les principales sont : 1° la basse pression à laquelle les aéronautes sont soumis ; 2° la diminution d'oxygène ; 3° la dessiccation de l'air.

— M. Abria fait observer que l'accident du *Zénith* a été produit selon toute apparence par la trop grande rapidité avec laquelle les aéronautes se sont élevés à une hauteur considérable, ce qui ne leur a pas permis de s'acclimater à la moindre densité de l'air.

— M. Bayssellance cite à ce propos un accident arrivé pendant la construction du pont tubulaire de Bayonne, où les ouvriers employés dans l'intérieur d'une pile et travaillant sous une pression de plusieurs atmosphères, furent brusquement ramenés à la pression ordinaire par un dérangement qui se produisit au sommet de la pile. Ceux qui furent tout à coup mis en contact avec l'air extérieur moururent tous; ceux au contraire qui durent remonter depuis le

fond de la pile eurent un peu plus de temps pour s'habituer au changement de pression, et furent seulement atteints de douleurs très vives, ou paralysés pour un temps plus ou moins long, mais aucun d'eux ne mourut.

Séance du 13 mai 1875. — M. Liard, professeur de philosophie à la Faculté des lettres, est élu membre titulaire.

— M. Schrader donne lecture d'une traduction sommaire d'une communication faite à la Société par l'Académie impériale de Vienne (Autriche), relativement à la diminution réelle ou présumée du débit des sources en Europe.

L'Académie de Vienne, très émue de plusieurs faits qui semblent prouver un appauvrissement graduel de certains grands cours d'eau, tels que l'Elbe, le Rhin ou l'Oder, fait un pressant appel à toutes les Sociétés savantes de l'Europe pour leur demander communication des pièces qu'elles pourraient posséder sur ce sujet si important. Le Mémoire donne de longs détails sur les recherches auxquelles s'est livré le rapporteur M. Wex, dans le but d'arriver à une conviction raisonnée. Pour ce qui concerne les effets, M. Wex a constaté une plus grande irrégularité dans le débit actuel de plusieurs fleuves que dans le débit ancien. L'étiage est plus bas, tandis que les débordements sont plus fréquents, plus rapides et plus considérables. Cet écart ne suffit point pour donner à ces fleuves le même débit moyen qu'autrefois et la diminution du cours ordinaire n'est pas contrebalancée par l'augmentation du débit des crues. Il y a donc un appauvrissement, dont la cause immédiate est évidemment une moindre alimentation des sources.

M. Wex examine plusieurs raisons probables de ce changement et s'arrête surtout à la question du déboisement qui ne lui paraît pas tout à fait éclaircie. Des observations faites sur divers projets isolés ne lui ont pas permis de reconnaître de différences sensibles entre l'arrosement avant et après le déboisement. Mais ces observations trop partielles auraient besoin d'être étendues et continuées, puisqu'elles contredisent plusieurs faits certains, comme, par exemple, le degré supérieur d'humidité de l'air dans les pays forestiers, la conservation de la fraîcheur du sol par une couverture d'arbres, l'absorption d'une masse d'eau considérable par les feuilles, les mousses, la bourre des racines entremêlées, et, comme conséquence, l'afflux dans le sol et l'écoulement graduel par les sources d'une grande quantité d'eau que le soleil aurait enlevée au sol par l'évaporation si les forêts ne l'avaient protégé. D'autres raisons encore tendent à faire penser que le déboisement exagéré

est en partie coupable de l'appauvrissement des fleuves, mais les preuves ont besoin d'être complétées, et l'Académie de Vienne insiste pour que toutes les Sociétés d'Europe s'unissent pour étudier les moyens de remédier aux calamités qui menacent les générations à venir.

— M. Abria a cherché à vérifier par l'expérience la loi de la double réfraction dans les cristaux bi-réfringents uni-axes. Il fait connaître d'abord la marche qu'il faut suivre, d'après la théorie des ondulations, pour trouver les directions des rayons réfléchis et réfractés à la surface de séparation de deux milieux mono ou bi-réfringents. Il l'applique ensuite au cas d'un rayon lumineux venant du vide et tombant sur l'une des faces d'un prisme bi-réfringent. Ce rayon se divise généralement en deux autres en pénétrant dans le cristal et ceux-ci éprouvant la réflexion totale sur la seconde face, donnent naissance chacun à deux autres rayons, de sorte que la lumière incidente se partage définitivement en quatre faisceaux émergents. On peut, par le calcul, déterminer les angles de chaque rayon avec la face d'émergence, et, par suite, ceux qu'ils forment entre eux. Si l'observation donne les mêmes angles, on a un contrôle de la loi de la réflexion totale résultant de la construction, et, par suite, de la théorie. M. Abria donne les résultats de 66 mesures obtenues sur trois prismes, deux de quartz, un de spath, taillés d'une manière quelconque par rapport à l'axe. Les valeurs observées sont toutes très voisines de celles données par le calcul. Il indique les méthodes à l'aide desquelles les calculs, assez longs de leur nature, peuvent être simplifiés.

Séance du 27 mai 1875. — M. Abria communique à la Société les résultats d'une expérience qu'il a eu l'occasion de faire et dont l'explication lui a paru mériter d'être mentionnée. En répétant les expériences de MM. Fizeau et Foucault sur les franges d'interférences produites dans un spectre très pur à l'aide d'une lame cristallisée, il a vu qu'en interposant une lame double formée de deux spaths croisés, cas dans lequel les franges doivent disparaître, on en voyait un très grand nombre peu intenses et extrêmement fines. Il a reconnu que ces bandes doivent être attribuées à l'interférence des rayons transmis directement avec ceux qui ont été réfléchis deux fois entre les deux surfaces de la première lame; laquelle agit comme lame transparente et non comme plaque cristallisée.

Le même membre entretient la Société de l'application qu'il a faite à la vérification de la loi d'Huyghens de la méthode suivie

dans l'étude de la réflexion intérieure par les milieux cristallisés.

Enfin, M. Abria donne les valeurs de la déclinaison et de l'inclinaison magnétiques qu'il a eu occasion de mesurer l'année dernière. Comparées à celles qu'ont fournies les expériences de 1847, elles accusent pour la déclinaison une diminution annuelle de 6'5 et pour l'inclinaison de 3'6.

Séance du 10 juin 1875. — M. Potocki entretient la Société d'un travail ayant pour titre : *De l'influence des forêts sur la température des couches inférieures de l'air,* et inséré dans les « Comptes rendus de la Commission physiographique de la *Société scientifique I. R. de Cracovie* », pour l'année 1870, expériences faites par M. Rivoli dans les forêts Kórnik (grand-duché de Posen), ayant pour but de constater l'influence des forêts sur :

1° La température des vents;

2° Le rayonnement nocturne.

Les forêts adoucissent la température des vents froids et rafraîchissent celle des vents chauds. Les variations de température, dues à leur influence, sont d'autant plus sensibles que la température du vent atteint son maximum ou son minimum, c'est-à-dire les maxima des variations ont lieu pour les vents dont les directions passent à proximité des pôles de la rose thermique des vents dressée par Kämtz. Les maxima de variations constatées étaient de 1° 3/8 pour les vents S.-E, et de 7/8° pour les vents S.-O.

Si le rayonnement nocturne n'est soumis à aucune action perturbatrice, c'est-à-dire pendant des nuits calmes et sereines, les molécules d'air refroidies par le rayonnement des feuilles, forment au-dessus du sol des forêts des couches froides, dont la température est inférieure à celle des couches situées au même niveau dans des champs découverts. Les maxima des différences constatées ont été de 2° 1/4 peu de temps avant le lever du soleil.

Séance du 24 juin 1875. — Le Président, à l'ouverture de la séance, annonce la mort de M. Le Besgue, ancien professeur de mathématiques à la Faculté des sciences, correspondant de l'Institut, membre honoraire de la Société.

— M. Baudrimont donne lecture du rapport qu'il a envoyé à M. le ministre de l'agriculture, à propos du cours de Chimie agricole qu'il fait à la Faculté.

— M. Perez entretient la Société de la suite de ses recherches sur la génération des Gastéropodes androgynes (*Voir* le travail publié dans les *Mémoires* de la Société, t. VI). Il a pu enfin

débrouiller la structure compliquée du diverticule, où, d'après ses recherches antérieures, s'opère la fécondation. Outre la continuation du canal efférent de la glande hermaphrodite, cet appareil renferme plusieurs tubes qui s'insèrent au canal vers la base du diverticule, et se terminent en cul-de-sac à son sommet. Dans ces tubes, dont le nombre n'est pas constant et varie de 3 à 5, est tenu en réserve le sperme provenant de l'accouplement, et destiné à la fécondation des ovules.

En élevant des Hélices qui s'étaient accouplées en captivité, mais dans une cage où elles trouvaient toutes les conditions de la vie libre et normale, M. Perez a pu observer plusieurs fois des ovules dans le diverticule, ce qui ne lui avait jamais été donné de voir avec des Hélices conservées en vase clos. Ces ovules ne se distinguent des ovules ovariens que par la diminution plus ou moins sensible de l'espace central clair indiquant la place de la vésicule germinative. Celle-ci, en effet, y est en voie de destruction, et elle a disparu complètement quand l'ovule a fait le tiers ou le quart de son trajet dans l'oviducte. Dans l'intervalle, il est quelquefois possible de suivre le processus de cette destruction. La vésicule crève, et son contenu s'écoule dans la masse vitelline. La tache germinative persiste encore quelque temps, sa consistance diminue promptement, et enfin on n'en trouve plus de traces.

Le mode de formation des parties accessoires de l'œuf dans l'oviducte ne permet pas d'admettre les homologies que l'on serait porté à accepter sur la simple comparaison anatomique de l'œuf des mollusques et de celui des oiseaux. Chez les gastéropodes, dès que l'œuf arrive dans l'oviducte, la membrane vitelline s'écarte du vitellus par suite de l'absorption endosmotique de l'albumen qui baigne l'ovule. Elle ne disparaît nullement, comme le dit Coste. Au terme de cette absorption, la coque se forme par dépôt autour de la membrane vitelline elle-même. Chez les oiseaux, au contraire, la membrane vitelline reste adhérente au vitellus pendant toute la durée de la formation de l'albumen, qui se produit autour d'elle. En sorte que l'albumen sous-jacent à la membrane vitelline chez le mollusque, lui est extérieur chez l'oiseau. Et bien que remplissant, dans l'un et l'autre cas, le même rôle au point de vue de la nutrition de l'embryon, l'albumen du mollusque n'est nullement comparable à celui de l'oiseau au point de vue de l'homologie anatomique.

Anatomiquement, l'albumen du mollusque représentait plutôt le second vitellus de l'oiseau, c'est-à-dire la partie du vitellus qui ne subit point la segmentation.

Enfin M. Perez a assisté à la formation des globules polaires, dont le nombre varie de 1 à 3. Sa durée est de trois quarts d'heure environ et elle présente toutes les phases déjà décrites par M. Ch. Robin chez d'autres espèces de mollusques.

— M. Abria communique à la Société le résultat des expériences que M. Cornu a faites pour mesurer la vitesse de la lumière d'après la méthode de M. Fizeau, et fait ressortir tout ce que cette méthode, modifiée par l'expérimentation, a d'ingénieux et de neuf.

Séance du 8 juillet 1875. — M. Perez communique à la Société le résultat de ses études sur le micropyle de l'œuf de quelques espèces d'insectes.

Le micropyle de l'œuf des Lépidoptères du genre *Smerinthus* est signalé par Leuckart comme des plus propres à la constatation des perforations de cet appareil, destinées à livrer passage aux spermatozoïdes. On y observe en effet une sorte de rosace formée de rayons divergents, qui, pour cet auteur, sont autant de conduits traversant obliquement la coque d'outre en outre. M. Perez a fait de vains efforts pour se convaincre de la nature tubulaire de ces rayons: leur structure est homogène; il est impossible d'y reconnaître ce double contour indice d'une cavité; jamais on n'y voit d'air contenu, qui produirait les effets optiques bien connus, que l'on observe au contraire avec facilité dans les pores aérifères de la coque.

Un coléoptère longicorne, le *Clytus arcuatus*, possède un micropyle formé d'une sorte d'étoiles à quatre rayons, que l'on pourrait prendre pour une perforation, car l'espace circonscrit par cette figure est d'une clarté telle qu'il semble n'y point avoir de substance solide. Mais si l'on colore la coque à l'aide de l'acide azotique par exemple, cet espace participe à la coloration de la coque, faiblement il est vrai, mais assez pour indiquer qu'il y a là une substance continue. De plus, M. Perez ayant pu, par un heureux hasard, obtenir une déchirure de la coque au travers du micropyle, la continuité du bord de cette déchirure manifesta d'une manière incontestable l'existence d'une membrane là où semblait exister un vide. Cette membrane n'est autre chose que la coque très amincie en ce point. — Contrairement à ce qui a lieu chez la plupart des espèces, où la membrane vitelline adhère fortement à la face interne de la coque, dans la région micropylaire, chez le *Clytus* cette membrane s'en détache avec la plus grande facilité, et l'on n'y peut reconnaître aucune solution de continuité.

Leuckart prend pour appareil micropylaire, chez le *Diplolepis*

quercus, un épaississement de la coque qui se voit d'un côté, non loin de l'origine du pédicule que possède l'œuf singulier de cet hyménoptère. Les couches superposées et imparfaitement homogènes de la substance de la coque produisent dans cette partie épaissie des traits fort vagues que l'auteur considère à tort comme des conduits. Chez le *Cynips du Bedéguar*, dont l'œuf a la même conformation à peu près, et qui devrait avoir, ce semble, un micropyle analogue à celui du *Diplolepis*, il n'y a point d'épaississement au point correspondant de la coque, qui est imperforée du reste là comme partout ailleurs.

Chez les *Hemerobius*, ainsi que chez divers autres névroptères, le pôle supérieur de l'œuf porte une sorte de disque, de forme variée suivant les espèces, que Leuckart regarde comme un amas desséché de spermatozoïdes. L'erreur de cette détermination est flagrante. En effet, l'œuf d'*Hemerobius* présente ce disque non seulement après la ponte, mais déjà dans les organes femelles, avant qu'il ait atteint le lieu où s'opère la fécondation ; il en est muni dans la gaîne ovigère même, pourvu que la coque soit entièrement formée ou près de l'être. — Quant aux prétendues perforations de la coque sous ce disque, sensibles seulement chez certains névroptères, ce ne sont pour M. Perez que des ponctuations analogues à celles que l'on voit sur le reste de la coque, et on ne saurait les considérer comme des orifices.

— M. Hoüel communique à la Société une *Note sur l'enseignement de la Trigonométrie*, publiée dans le dernier fascicule du *Giornale di matematiche*, qui paraît à Naples sous la direction de M. Battaglini.

L'auteur fait d'abord remarquer combien il serait avantageux d'introduire dès l'abord, dans l'enseignement de la Goniométrie, la nation des coordonnées du cercle, sous la même forme que l'on emploie plus tard dans l'étude de la géométrie analytique. Le cosinus et le sinus ne sont, en effet, autre chose quel'abscisse et l'ordonnée du point du cercle de rayon $= 1$ qui détermine l'angle proposé. L'avantage important qui en résulterait serait de faire mieux ressortir, par des considérations susceptibles de généralisation, la véritable nature des quantités positives et négatives, si mystérieuses pour les commençants.

Il montre ensuite combien l'exposition de la Trigonométrie est rendue pénible et rebutante par l'abus que l'on fait du calcul logarithmique. La trigonométrie devrait être d'abord enseignée sans autre secours que de petites tables de sinus naturels, que l'élève pourrait construire lui-même, et qui ne contiendraient pas plus de

trois décimales, de telle sorte que les opérations pussent toutes s'exécuter au moyen de la règle à calcul, précieux instrument dont on a si grand tort de négliger l'usage. On appliquerait plus tard les logarithmes, mais en ayant soin de prémunir les élèves contre les illusions qu'ils sont disposés à se faire sur le degré d'approximation qu'il est possible et utile d'obtenir. L'usage des tables à sept décimales dans l'enseignement n'a d'autre motif qu'une routine absurde, qui disparaîtrait dès que l'on prendrait la peine d'éclairer l'art du calcul par le raisonnement.

Une autre pratique également condamnable, c'est l'usage où l'on est de vouloir à toute force transformer toutes formules trigonométriques en expressions monômes, pour les rendre, prétend-on, *calculables par logarithmes*. Si l'on tient compte des calculs préparatoires que nécessite le plus souvent cette transformation, on peut se convaincre aisément que, dans tous les cas de résolution des triangles, tant rectilignes que sphériques, on ne fait qu'allonger inutilement les calculs, soit parce qu'on augmente le nombre des lectures, soit parce que l'on fait ces lectures dans la table trigonométrique, laquelle est d'un usage beaucoup moins commode que la table des logarithmes des nombres.

Enfin M. Hoüel signale une autre lacune des traités de trigonométrie. On trouve dans plusieurs de ces ouvrages l'indication de formules propres à diminuer l'effet de l'erreur inévitable des tables sur la détermination des quantités inconnues. Ce choix aurait de l'importance si les données de la question étaient exactes, et que l'on n'eût à craindre que l'erreur tabulaire. Mais dans la pratique les données ne sont qu'approchées, et l'erreur provenant de cette cause, qui affecte l'inconnue, est en général de beaucoup supérieure à l'erreur tabulaire. De plus, elle est indépendante du choix de la forme que l'on donne à l'équation d'où dépend l'inconnue. Cela fait que, dans la réalité, le choix entre les diverses formes de cette équation est à peu près indifférent au point de vue de l'exactitude, et qu'il faut donner la préférence à la forme la plus simple.

— M. Glotin donne quelques indications sur le *losange articulé* du lieutenant-colonel Peaucellier.

Séance du 22 juillet 1875. — M. Abria communique à la Société quelques réflexions sur la formule d'Ampère relative à l'action de deux éléments de courants. M. Bertrand, dans l'un des derniers numéros du *Journal de physique*, a fait voir qu'un élément de courant étant donné, on peut décrire une surface de révolution autour de la direction de l'élément comme axe, jouissant de la

propriété que tous les éléments d'un courant enroulé d'une manière quelconque sur cette surface exercent une action nulle sur le premier. Il résulte de là que la loi relative à l'action de deux courants angulaires, telle qu'elle est énoncée dans tous les traités de physique, manque d'exactitude. — Cette règle est cependant très utile dans l'enseignement parce qu'elle permet de comprendre, à l'aide de raisonnements très simples, un grand nombre de phénomènes relatifs aux actions mutuelles des courants. M. Abria fait voir qu'elle peut être conservée, mais en la restreignant au cas de deux éléments de courant situés dans un même plan et de directions rectangulaires. On peut, avec la règle ainsi modifiée, expliquer tous les phénomènes pour lesquels on avait recours à l'action des courants angulaires.

— M. de Lacolonge communique à la Société une formule servant à calculer, eu égard aux circonstances locales, le prix maximum qu'un agriculteur doit mettre à l'acquisition d'un cheval de labour.

EXTRAITS

DES

PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ.

ANNÉE 1875-76.

Présidence de M. BAYSSELLANCE.

Séance du 18 novembre 1875. — La Société procède au renouvellement de son Bureau. Sont élus :

Président	M. BAYSSELLANCE.
Vice-Président	M. LOQUIN.
Secrétaire général	M. ABRIA.
Secrétaires adjoints	MM. SAMIE et SCHRADER.
Archiviste	M. HOÜEL.
Trésorier	M. POTOCKI.
Membres du Conseil d'administration.	MM. AZAM, BAUDRIMONT, GLOTIN, DE LACOLONGE, LESPIAULT, SERRÉ-GUINO.

— M. LESPIAULT fait part à l'Assemblée de quelques faits récemment observés dans les apparitions d'étoiles filantes d'août et de novembre. Ces apparitions périodiques ont ceci de commun qu'elles suivent une marche ascendante pendant plusieurs jours, jusqu'à un maximum à partir duquel elles décroissent. Mais, tandis que celles du mois d'août présentent simplement dans leurs irrégularités annuelles des sortes de renflements et de diminutions, dont la périodicité n'a pas été encore nettement établie, celles de novembre, au contraire, présentent des alternatives de longue durée dans le nombre des étoiles, et la période de ces alternatives a pu être évaluée à 33 ans environ. Ainsi, en 1865, l'apparition de novembre fut exceptionnellement brillante, et, depuis cette époque, elle n'a cessé de diminuer chaque année, au point que les observations annuelles ont fini par devenir absolument inutiles; elles sont suspendues jusqu'à ce que le retour de la période ascendante leur donne de nouveau quelque intérêt.

Le point radiant, qui avait d'abord été considéré comme simple,

est apparu depuis quelques années comme multiple; il semblait que ce point se désorganisait. Des observations nombreuses ont permis de grouper les irrégularités du point radiant, et ont ainsi démontré que le point principal et les points secondaires sont compris dans une même ellipse.

M. Tisserand, de Toulouse, arrive à des résultats différents en apparence, et ne trouve que trois points radiants; mais cela tient à ce qu'ayant pour plus de simplicité groupé ses trajectoires autour de quelques moyennes, il a obtenu comme points radiants les intersections de ces moyennes.

Séance du 2 décembre 1875. — MM. Gayon, Castet et Kowalski sont élus membres titulaires.

— M. Hoüel présente de la part de M. Laisant l'extrait suivant d'une Note qui sera insérée dans les *Mémoires*.

Sur un problème d'arithmétique.

« Dans les *Annales de Gergonne* (1812-1813), on trouve un énoncé de problème qui peut s'exprimer ainsi : *Connaissant le produit d'un nombre* (147 *par exemple*) *par ce nombre renversé* (741), *retrouver les deux facteurs* (147 *et* 741).

» Les solutions qui ont été publiées autrefois paraissent compliquées pour la plupart, et peu susceptibles d'application. Si on exclut le cas où le produit est terminé par un ou plusieurs zéros, il est facile de voir que chaque facteur doit avoir autant de chiffres que le produit donné présente de tranches de deux chiffres. Ecrivant alors l'un des facteurs sous la forme $\alpha_1 10^{n-1} + \alpha_2 10^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} 10 + \alpha_n$, l'autre sera $\alpha_n 10^{n-1} + \alpha_{n-1} 10^{n-2} + \ldots + \alpha_2 10 + \alpha_1$. Effectuant le produit, on voit qu'il a la forme

$$\alpha_1 \alpha_n . 10^{2n-2} + \ldots + \alpha_1 \alpha_n .$$

On retranche alors $\alpha_1 \alpha_n 10^{2n-2} + \alpha_1 \alpha_n$, et il reste un nombre divisible par 10. Or, ce produit $\alpha_1 \alpha_n$ pourra, presque toujours, se déterminer immédiatement, à l'inspection des premiers et des derniers chiffres du produit.

» Après avoir fait la soustraction indiquée, on divise le résultat par 10, puis on retranche encore un nombre de la formule $A_1 10^{2n-2} + \ldots + A$, A se déterminant par l'examen du dernier chiffre, et ainsi de suite. L'ensemble des résultats obtenus fournit plusieurs équations en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, dont on peut déduire les chiffres en question. Certaines remarques particulières, qu'il serait trop long

de développer ici, permettent d'abréger notablement les calculs, et de les rendre absolument pratiques.

» La solution s'étend assez aisément au cas où le produit est terminé par des zéros. »

— M. ABRIA communique à la Société les valeurs de l'inclinaison et de la déclinaison magnétiques qu'il a obtenues au mois d'août dernier.

Ces valeurs sont :

Déclinaison.............	17°47′ Ouest.
Inclinaison	62°52′

Le décroisement est de 7′,6 pour la première et de 3′,5 pour la seconde.

M. ABRIA donne lecture, à cette occasion, d'une lettre de M. MARIÉ-DAVY, dans laquelle sont relatées les mesures prises par MM. Lamont, en 1858, et Perry, en 1868. Les résultats obtenus par M. Abria concordent avec ceux qu'ont donnés ces deux observateurs. Il résulte de la discussion que le territoire de Bordeaux est favorable aux observations magnétiques.

— M. LESPIAULT rend compte de la séance du Congrès contre le Phylloxera, à laquelle il vient d'assister. D'après les renseignements venus du Midi, le Phylloxera y aurait fait autant de ravages en 1875 que dans toutes les années précédentes prises ensemble. Dans nos régions également, le mal se serait accru dans une forte proportion.

Séance du 16 décembre 1875. — M. EVELLIN, professeur de Philosophie au Lycée, est élu membre titulaire.

— M. VALAT expose diverses propriétés de la théorie des anti-parallèles et de celle des médianes anti-parallèles; quelques unes de ces propriétés, dont il fait la démonstration, lui paraissent nouvelles.

— M. BAYSSELLANCE communique à la Société le résultat d'essais faits dans les arsenaux de la Marine en vue d'arriver à supprimer le bruit produit par l'évacuation de la vapeur des machines à haute pression. On avait déjà obtenu une grande diminution de ce bruit en faisant déboucher l'échappement dans un réservoir où la contre-pression se régularisait; de là, un tuyau conduisait la vapeur dans la cheminée où elle ne produisait plus qu'un bruit régulier de souffle ne s'entendant qu'à une faible distance. Mais il en résultait une diminution considérable dans le tirage, et il devenait impossible de maintenir la pression nécessaire à la

chaudière. On a reconnu qu'en faisant évacuer la vapeur dans la cheminée par plusieurs petits orifices, ayant ensemble la même section totale que l'orifice unique primitif, le tirage se trouvait activé dans une proportion considérable ; il devient ainsi possible de conserver, sans inconvénient, le réservoir régulateur et le bruit de l'évacuation est complètement supprimé.

Séance du 30 décembre 1875. — M. Pabon est élu membre titulaire.

— M. Hoüel, au nom de M. Abria, lit une notice sur la vie et les travaux de Victor-Amédée Le Besgue, correspondant de l'Institut, professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Bordeaux, membre honoraire de la Société :

« M. Le Besgue (Victor-Amédée) naquit à Grandvilliers (Oise) le 2 octobre 1791. Il fit ses premières études à Amiens, et les termina au collége de Beauvais, où il eut pour condisciple M. Alexandre, l'helléniste, avec lequel il noua, malgré la différence d'âge, des relations d'amitié qui se sont conservées toute leur vie.

» Ses études achevées, Le Besgue ne put se soustraire aux exigences du service militaire, et il fut incorporé sous les drapeaux vers la fin de 1809. Il y passa une année, employé dans les bureaux de l'Administration. Décidé à rentrer dans la vie civile, il parvint, à force de sacrifices et avec l'aide d'un de ses parents, à se faire remplacer, et il débuta dans l'enseignement en qualité de maître d'études au lycée de Reims. Après trois ou quatre années passées à Saint-Quentin et à Abbeville, il accepta un emploi de précepteur dans une famille anglaise, et se rendit à Londres, où il séjourna une année. D'Angleterre il passa, dans les mêmes conditions, en Russie, où il resta jusqu'en 1830, époque de son retour en France.

» Sur la recommandation de M. Alexandre, alors inspecteur général des études, il obtint de Poisson, investi, comme membre du Conseil royal de l'Instruction publique, de la direction générale de l'enseignement mathématique, un emploi de chargé de cours au collége royal de Nantes, puis de professeur au collége d'Épinal, où il resta deux années.

» En 1834, il vint suivre à Paris les cours de la Sorbonne, dans l'intention de concourir pour l'agrégation. Malgré les instances de ses amis, il ne donna pas suite à ce projet, et fut envoyé à Neufchâteau en 1835 et 1836.

» Il adressait souvent à Poisson des notes sur diverses questions d'analyse, et le célèbre géomètre lui portait un vif intérêt.

M. Cournot ayant été transféré, vers cette époque, de la chaire de Mathématiques de la Faculté de Lyon à celle de Grenoble, et ayant été nommé, en outre, recteur de l'Académie dont cette ville est le chef-lieu, demanda qu'on lui adjoignît un suppléant. Le Besgue fut désigné pour ce poste, et entra ainsi dans l'enseignement supérieur, où sa position fut bientôt régularisée par l'obtention du grade de docteur ès sciences (1837). La Faculté des Sciences de Bordeaux ayant été organisée à la fin de 1838, Le Besgue fut appelé à y occuper la chaire de Mathématiques pures, qu'il a conservée jusqu'à la fin de 1858, époque où il se décida à prendre sa retraite.

» Très simple dans ses manières, d'un caractère plein de franchise et d'indépendance, ne cherchant jamais les occasions de se mettre en évidence, Le Besgue vivait très retiré, occupé constamment de ses études favorites. En 1839, il fut présenté en troisième ligne pour une place de correspondant de l'Académie des Sciences; M. Chasles était porté en première ligne et fut nommé. Une nouvelle vacance étant survenue en 1847, Le Besgue fut élu à la presque unanimité des suffrages, le 8 février (1). En 1845, il avait reçu la décoration de la Légion d'honneur. Il appartenait à notre Société depuis le 9 avril 1863. »

— M. Lespiault donne lecture d'une analyse du travail du contre-amiral Sands, directeur de l'Observatoire de Washington, où sont relatées les péripéties par lesquelles a passé cet Observatoire avant d'arriver à son organisation actuelle. Il indique les progrès que cet Observatoire a fait faire à l'Astronomie, et les nombreuses découvertes que lui doit la science.

Séance du 27 janvier 1876. — M. Schrader fait une communication sur l'ancien glacier de la vallée d'Argelès. D'après l'examen qu'il a fait des moraines de ce glacier, il semblerait que MM. Martins et Collomb ont confondu plusieurs périodes glaciaires et attribué au même glacier d'Argelès des niveaux ou des dimensions qui appartiennent à des époques distinctes.

Rectifications. — M. Schrader présente quelques rectifications à son travail inséré dans le Tome X des *Mémoires* sous le titre de « *Études géographiques et excursions dans le massif du Mont-Perdu.* » 1° Le tracé du ruisseau d'Aguila doit être rétabli tel

(1) Les candidats présentés étaient MM. Le Besgue, en première ligne; Ostrogradsky, Richelot, Sarrus, Steiner, Stern, en deuxième ligne; Laurent, ajouté à la liste sur la proposition d'un membre.

qu'il existe sur les cartes de l'État-Major. Toutefois, l'erreur de 500 mètres en hauteur dans la crête S. du vallon est bien réelle, et sur ce point-là, c'est l'État-Major qui devrait être modifié. 2° Le ruisseau qui s'écoule du lac de Cestrède n'aboutit pas au lac d'Arrouyes, mais se perd dans le sol pour reparaître au-dessus du village de Bué. 3° Il y a deux lacs au lieu d'un, au Sud du Pic de la Munia.

Séance du 10 février 1876. — M. Laval est élu membre titulaire.

— M. Abria communique, au nom de M. Delprat, propriétaire à Sos (Lot-et-Garonne), la description d'un appareil qui permet de faire l'essai des vinasses en cours de distillation. Cet appareil, dont un plan figuratif est joint au travail de M. Delprat, consiste essentiellement en un alambic, semblable aux alambics Salleron, joint par un tube à l'un de ceux de la chaudière contenant les vinasses. On recueille un volume déterminé de liquide, on le distille à l'aide d'une lampe à esprit de vin, et le produit, recueilli dans une éprouvette graduée, est pesé comme à l'ordinaire à l'aide d'un alcoomètre.

Le mémoire de M. Delprat est déposé dans les Archives de la Société.

Séance du 24 février 1876. — MM. Armaingaud, docteur en médecine, et Rayet, professeur à la Faculté des Sciences, sont élus membres titulaires.

— M. Perez montre des œufs d'hiver du Phylloxera de la vigne, et entre dans quelques détails relatifs à la recherche de ces œufs, qui sont difficiles à trouver et dont on a même nié l'existence. L'œuf existe, et si l'on pouvait le détruire partout, il est à peu près certain qu'on arrêterait la propagation de la maladie. Malheureusement, la petitesse de l'œuf, sa situation particulière dans les sillons sublibériens, la résistance de l'enveloppe, etc., rendent cette destruction bien difficile.

— M. Tannery présente à la Société le numéro de février 1876 de la *Revue Philosophique de France et de l'Étranger*. Ce numéro renferme un article qu'il a écrit sur « *le nombre nuptial dans Platon,* » et qui, destiné à l'interprétation d'un passage mathématique, jusqu'alors inexpliqué, du livre VIII de la *République,* contient divers renseignements relatifs à l'histoire des sciences dans l'antiquité. Il résulte notamment de ce passage que Platon connaissait la proposition signalée par Nesselmann *(Die Algebra*

der Griechen, p. 208 sq.) chez son commentateur Théon de Smyrne, comme donnant la solution complète de l'équation indéterminée :

$$2x^2 - y^2 = \pm 1.$$

Séance du 9 mars 1876. — M. Labat, ingénieur maritime, est élu membre titulaire.

— M. Hautreux présente la carte des courbes barométriques publiées le matin même par l'Observatoire de Paris. Une dépression très profonde existe en ce moment sur le Nord de l'Écosse. Cette dépression persiste depuis trois ou quatre jours en augmentant toujours sans presque changer de latitude : elle se creuse sur place. Le 6, le 7 et le 8, elle est descendue de 735 à 730 millimètres en se transportant de deux à trois degrés à peine vers le Sud, puis elle est brusquement arrivée à 714 millimètres, sans que les vents aient encore présenté, sur aucun point, une intensité plus qu'ordinaire. Il est probable que nous sommes menacés d'une violente perturbation atmosphérique.

— M. Abria résume ainsi qu'il suit les points principaux de la théorie élémentaire du potentiel électrique intérieur, qu'il a exposée dans les trois dernières séances :

1. On appelle *potentiel d'un corps électrisé* l'indication d'une balance de torsion ou d'un électromètre mis en communication avec ce corps par un fil long et fin.

2. On choisit pour unité de temps, de longueur et de poids, la seconde, le millimètre et le milligramme, au lieu de l'observation.

3. Le potentiel est proportionnel à la charge.

4. Si le corps électrisé est sphérique, le potentiel varie en raison inverse du rayon.

Dans ce cas, il a pour valeur $\frac{M}{R}$, M étant la quantité d'électricité, R le rayon de la sphère.

5. Unité de potentiel : elle ne doit pas être confondue avec l'unité de charge.

6. Le potentiel de la Terre est nul.

7. Capacité électrostatique d'un corps électrisé.

8. La quantité d'électricité possédée par un conducteur électrisé est égale à $V \times K$, V étant son potentiel, K sa capacité électrostatique.

9. La capacité électrostatique d'une sphère est égale à son rayon.

10. Deux corps électrisés, mis en communication, prennent le même potentiel.

Le potentiel d'un conducteur mis en communication avec le sol est égal à zéro.

11. Mesure du potentiel et de la capacité électrostatique d'un conducteur au moyen de la balance de torsion.

12. Mesure de ces mêmes quantités à l'aide de l'électromètre de M. Thomson ou de celui de M. Branly. Pour ces derniers appareils, il est nécessaire de mesurer d'abord la capacité électrostatique du secteur mobile.

13. D'après les mesures de M. W. Thomson, le potentiel d'un élément Daniell vaut 0,00378 en fonction des unités adoptées.

14. Le potentiel $\frac{M}{R}$ d'une sphère est égal à $\sum \frac{K}{\rho}$, K étant une petite masse électrique, ρ sa distance à un point quelconque pris dans l'intérieur, la somme Σ s'étendant à la couche électrique entière.

15. Dans un conducteur électrisé de forme quelconque, la somme $\sum \frac{R}{\rho}$ est constante pour tous les points situés dans l'intérieur du corps, quel que soit le point considéré.

16. Analogies du potentiel électrique et de la température; — du potentiel et de la pression hydrostatique.

17. Applications de la théorie du potentiel électrique.

Pression exercée par une sphère électrisée sur le milieu ambiant.

Calcul de l'attraction ou de la répulsion de deux sphères électrisées.

Pression résultant de l'attraction mutuelle des deux électricités contraires d'un condensateur sphérique.

Énergie électrique ou travail des forces électriques. Elle est proportionnelle au carré de la charge. Calcul de sa valeur absolue en kilogrammètres ou en calories dans le cas d'un condensateur sphérique.

Séance du 23 mars 1876. — M. Lespiault présente à la Société un Mémoire qui vient d'être inséré dans l'*Atlas météorologique de la France*. Ce Mémoire est relatif à une théorie que l'auteur a déjà eu l'occasion d'exposer devant la Société, touchant l'influence qu'exercent les reliefs du sol sur la chute de la grêle. Les idées de M. Lespiault à cet égard sont fondées sur l'étude détaillée des grêles qui, le 20 et le 21 juin 1874, ont ravagé les départements de la Gironde, de la Dordogne, des Landes et du Lot-et-Garonne. Les très nombreux documents que l'auteur a réunis et discutés établissent que, loin d'être uniformément répartie sur la bande qu'elle parcourt, la grêle frappe surtout les vallées, et tout

particulièrement celles qui s'étendent dans la direction des tourbillons orageux. C'est ainsi que les orages en question ont sévi surtout sur la vallée de la Dordogne, entre Castillon et Sainte-Foy, sur les vallées de la Vézère, de la Gélise et du Lot. La fréquence des grêles sur ces dernières vallées s'explique par leur situation relative; en effet, elles forment, avec les vallons secondaires, de quelques petits affluents de la Garonne, comme un large fossé qui traverse le département du Lot-et-Garonne, du Sud-Ouest au Nord-Est, et paraissent ainsi prédestinées à servir de route aux orages désastreux.

Voici les conclusions du Mémoire :

« Dès le début de l'étude systématique des orages, on a reconnu que les nuages électriques appartenaient toujours à un tourbillon assez restreint et peu déprimé, et que ces nuages occupaient habituellement dans ce tourbillon la partie moyenne de la région dangereuse. La zone de grêle, simple fraction du milieu orageux, suit donc dans sa marche un arc de cercle de 60 à 80 lieues de rayon, ce qui donne, sur l'étendue d'un département, une trajectoire sensiblement rectiligne. Toutes les fois que la bande grêlée s'étend sur une certâine longueur, cette direction rectiligne de son axe se retrouve invariablement sur les cartes; ce qui prouve que ni les vallées ni les coteaux n'ont le pouvoir d'imprimer au courant général une déviation permanente. Mais, si les reliefs du sol n'ont pas sur la marche d'ensemble du fleuve de grêle cette influence, que lui attribuent à tort nombre d'observateurs, ils agissent puissamment, au contraire, sur le mouvement individuel des nuages qui composent ce fleuve et, par suite, sur la distribution proportionnelle du fléau dans l'intérieur de la bande frappée. Lorsqu'en effet la zone de grêle passe au-dessus d'un plateau ou d'un terrain découpé par des vallées transversales à sa marche, les nuages restent dispersés dans le tourbillon qui les porte et n'occasionnent que des ravages partiels; mais qu'une longue vallée se présente à peu près sur le chemin de la zone chargée de grêle et dans la même direction, cette zone s'abaisse et s'engouffre dans la vallée; les nuages se précipitent et s'accumulent au-dessus de la dépression qui leur livre un libre passage, comme les feuilles d'automne dans les fossés d'une route, ou comme les neiges dans un couloir d'avalanches; leur puissance destructive se condense et s'accroît par cette accumulation et peut-être aussi par suite de la profondeur relative du sol.

» Les conséquences de cette théorie sont aisées à déduire :

» 1° Les vallées sont plus exposées à la grêle que les plateaux.

C'est là, du reste, un fait d'observation depuis longtemps reconnu.

» 2° Les *grandes* grêles frappent surtout les longues vallées, peu sinueuses.

» 3° Les collines placées au détour des vallées suivies par l'orage divisent les grêles qui sont obligées d'aller passer par les cols les plus voisins, pour reprendre ensuite leur direction primitive. Les portions des vallées qui s'étendent en avant de ces collines et au-dessus desquelles les nuages subissent un temps d'arrêt sont tout particulièrement maltraitées. Les versants opposés, au contraire, n'ont presque jamais à souffrir que des dommages partiels.

» 4° On sait que presque tous les orages violents qui passent sur l'Aquitaine vont de l'Ouest à l'Est ou, plus souvent encore, du Sud-Ouest au Nord-Est; c'est une conséquence forcée du mouvement du tourbillon orageux enclavé entre les Pyrénées et le plateau central. Il en résulte que les vallées de nos régions les plus sujettes à la grêle sont celles qui vont du Sud-Ouest au Nord-Est. Le danger qui les menace augmente encore lorsque deux vallées sont sur le prolongement l'une de l'autre, comme il arrive pour la Gélise et le Lot. Quant à la vallée de la Garonne, elle ne peut être prise dans sa longueur que par les orages qui viennent du Nord-Ouest. Mais ces orages, heureusement assez rares, la parcourent sans obstacle, semant parfois des grêles terribles, comme celle qui, dans l'été de 1858, enleva toute trace de végétation, sur 20 lieues de longueur, entre La Réole et Agen.

» 5° Les déboisements opérés dans les vallées, sur les flancs des coteaux qui les enserrent et sur les cols qui vont de l'une à l'autre, facilitent la marche des orages et sont probablement de nature à augmenter le danger de la grêle. Ce sont sans doute ces déboisements qui modifient à la longue les chemins habituellement suivis par le fléau, et qui peuvent faire disparaître l'immunité dont jouissaient auparavant certaines contrées. C'est ainsi que le versant septentrional du coteau de Lamotte, qui passait, il y a vingt ans, pour n'avoir jamais été grêlé, l'a été souvent, partiellement il est vrai, depuis cette époque. Lorsqu'on s'est aperçu de ce changement, on l'a attribué à des déboisements opérés dans la commune de Réaup, éloignée de 5 ou 6 lieues. Peut-être aussi les déboisements plus récents de la vallée de l'Osse ont-ils agi dans le même sens.

» On voit que cette théorie pourra conduire à des conséquences pratiques de nature à diminuer le danger de la grêle, si, comme nous le croyons, elle est confirmée par des observations ultérieures;

mais il faut que ces observations reposent sur des documents assez nombreux pour donner, dans leurs moindres détails, les trajectoires des fortes grêles. Les correspondants habituels des Commissions ne suffiraient pas pour ce travail particulier. Il faudrait un bulletin, au moins, par commune frappée, et au besoin un croquis succinct. Il serait nécessaire, en outre, de suivre le fléau jusqu'au bout de sa marche, sans s'arrêter aux limites d'un département ou même d'une académie. Nous croyons donc que, toutes les fois que la grêle prend les proportions d'un désastre, il y a lieu d'ouvrir une sorte d'enquête spéciale. Nous savons, par expérience, que les instituteurs en particulier apportent un grand soin et une grande exactitude à répondre aux questions qui leur sont posées. »

Depuis l'envoi de ce Mémoire à l'Observatoire, l'auteur a reçu une brochure de M. Salles, ingénieur en chef à Toulouse, qui a étudié les orages des 21, 26, 27 et 28 juin dans les départements sous-pyrénéens. M. Salles a constaté de son côté que certaines altitudes paraissaient infranchissables à la grêle. Ces altitudes limites dépendent du reste de la hauteur d'où sont partis les nuages à grêle et du chemin qu'ils ont dejà parcouru. En outre, toute colline un peu élevée divise *momentanément* le courant de grêle, tandis que les vallées semblent l'attirer par une sorte d'appel.

D'autre part, M. Hébert, secrétaire de la Commission météorologique de la Haute-Vienne, a appliqué la théorie de M. Lespiault à l'étude d'un certain nombre de grêles de ce département. Il a constaté qu'en effet la grêle paraissait s'engouffrer habituellement dans les vallées situées sur sa route et ne passait guère d'une vallée à l'autre qu'en coupant la ligne de faîte aux cols les plus voisins.

— M. Schrader communique des observations qu'il a faites soit dans les Pyrénées, soit pendant les chutes de neige pulvérulente de l'hiver dernier. Il constate que sur toute montagne pyrénéenne où des glaciers peuvent se former de plusieurs côtés, celui de l'Est ou du Nord-Est devient le plus considérable.

Les glaciers orientaux du Vignemale et du Balaitous, exposés au soleil, sont bien supérieurs aux glaciers septentrionaux, situés à l'ombre de la montagne. L'approvisionnement se porte donc vers les uns plutôt que vers les autres. Cet approvisionnement n'est pas dû au glissement des neiges dans les découpures des sommets, puisque le grand glacier du Vignemale comble en entier le cirque de la cime, et déborde presque par les brèches,

Lorsque le vent s'élève sur une couche de neige pulvérulente récemment déposée, il balaie cette neige devant lui et en débarrasse les versants de montagnes situés dans la direction du courant d'air. Ces versants, qui sembleraient devoir être les plus chargés de neige, sont ceux qui en gardent le moins; dans les Pyrénées, le vent d'Ouest étant le plus fréquent, ce sont les pentes Ouest qui reçoivent proportionnellement le moins de neiges; de là, les grands amas des versants Est.

Quand le vent chargé de neiges atteint la crête de la montagne, ou rencontre sur son chemin une dépression quelconque, il se détend, tourbillonne en même temps par friction contre les couches tranquilles situées à l'abri de la montagne, et leur abandonne une partie de son apport de neiges d'après des proportions nécessaires, déterminées par la forme du sommet. On peut donc, connaissant la disposition et l'altitude d'un point, le vent dominant et l'apport des neiges, déterminer sur quels points et avec quelles courbes viendra s'y déposer l'approvisionnement d'un glacier. M. Schrader trace sur le tableau les figures que devront prendre les apports de neiges, étant données différentes formes de montagnes et diverses pentes qui modifient l'angle d'incidence du vent.

En suivant la marche inverse, il serait possible, à l'examen des traces laissées par un ancien réservoir glaciaire, de déterminer la direction des courants qui l'ont alimenté, peut-être même le degré d'égalité de température des différentes saisons au moment de ce dépôt.

Séance du 7 avril 1876. — M. Kowalski présente à la Société une communication sur le losange Peaucelier.

Sans entrer dans la théorie de l'appareil, il en donne un tracé graphique, étant connus les éléments suivants, l'axe d'oscillation du balancier, la droite que décrit la tige du piston, et l'amplitude du mouvement alternatif de cette dernière. La solution est tout entière fondée sur la recherche des points d'intersection d'un cercle fixe et d'une droite. — Cette construction faite pour la position moyenne et une des positions extrêmes fournit deux conditions de possibilité, susceptibles d'expressions algébriques simples où entrent les longueurs des diverses parties constitutives du losange. Celui-ci est replié sur lui-même pour une de ses positions quand la droite est tangente au cercle; il est au contraire aussi élargi que possible quand la droite passe par le centre du cercle. Cette remarque permet de se faire dans chaque cas une idée nette des déformations subies par le losange articulé.

Les résultats précédents, déduits de la seule géométrie élémentaire, peuvent également s'obtenir en partant du lieu géométrique du milieu de la diagonale aboutissant à la tige animée du mouvement rectiligne; ce lieu est une courbe du 3e degré, ayant une asymptote parallèle à cette tige.

— M. Houël lit quelques passages d'un compte rendu, rédigé par lui pour le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques,* de l'ouvrage posthume de Hermann Hankel *sur l'Histoire des Mathématiques*. Ces passages traitent des Mathématiques chez les Hindous, et de la comparaison entre leurs méthodes et celles des Grecs.

— M. Tannery expose les principales opinions contradictoires qui se sont produites sur la question de l'origine des chiffres modernes. Il s'attache à faire ressortir les difficultés que rencontre chacun des systèmes mis en avant, soit la transmission de ces chiffres de l'Inde en Occident par les Arabes, soit leur origine néo-pythagoricienne, soit la double adoption parallèle de chiffres en partie différents, en partie semblables, chez les Hindous d'une part, dans l'Orient hellène de l'autre. Mais précisément la ressemblance des chiffres communs de part et d'autre avec les caractères d'un système de numération quinaire de l'écriture hiératique égyptienne, reste inexplicable ou du moins ne se prête qu'à des hypothèses purement gratuites.

Des tentatives ont été faites pour l'explication symbolique de la forme primitive des chiffres modernes, et des noms cabalistiques qui les accompagnent dans les manuscrits du moyen âge. Ces tentatives ont conduit à quelques coïncidences singulières; mais, vu l'arbitraire qui y règne forcément, on ne peut obtenir que des résultats absolument incertains.

En tout cas, le choix de caractères étrangers aux alphabets connus, et leur désignation par des noms cabalistiques, semble indiquer que leur emploi sur l'abacus (emploi certainement antérieur à celui du zéro en Occident) constituait originairement une méthode secrète, suivie probablement par les astrologues pour déguiser la nature de leurs opérations. Cette hypothèse permettrait, si ces chiffres sortent d'ailleurs réellement de la patrie de l'astrologie, d'expliquer comment les auteurs grecs n'en parlent pas, le mystère ayant pu être conservé en Orient par des adeptes peu nombreux, et divulgué ailleurs, là où il offrait un avantage marqué sur le système de numération écrite du pays.

On pourrait tout aussi gratuitement supposer plusieurs systèmes numéraux, adoptés par divers disciples d'un même maître, partant

d'un point de départ commun, les caractères hiératiques égyptiens, et dont deux seulement auraient survécu pour des fortunes différentes, l'un dans l'Occident latin, l'autre par delà l'Indus.

Mais avant de chercher à se rallier ainsi à une opinion déterminée, il serait, semble-t-il, nécessaire de résoudre la question du caractère et du sens des communications arithmétiques entre les Hellènes et les Hindous. Si les relations historiques entre ces deux peuples précèdent l'époque où l'on pourrait attribuer avec certitude à l'un ou à l'autre la connaissance d'un système de numération avec neuf chiffres plus ou moins analogues aux nôtres, ces communications deviennent assez probables. Le problème pourrait peut-être être éclairé par la comparaison de la riche synonymie employée par les Hindous depuis le temps de Brahmaguptâ pour désigner les neuf premiers nombres, et de celle, passablement étendue aussi, des néo-pythagoriciens. Certains de ces synonymes présentent des ressemblances qui peuvent n'être pas accidentelles. Une étude complète permettrait sans doute d'affirmer ou de nier la communauté d'origine de ces deux synonymies, si l'on arrivait à faire le départ dans les termes semblables de certains qui appartinssent en propre soit aux Hindous, soit aux Égyptiens, soit aux anciens Pythagoriciens, on pourrait conclure à la transmission de la synonymie soit dans un sens, soit dans l'autre, ce qui donnerait une présomption pour le sens de la transmission des chiffres eux-mêmes.

Séance du 27 avril 1876. — M. Tannery analyse deux Mémoires de M. G.-V. Schiaparelli, relatifs à l'histoire de l'astronomie des Grecs avant Hipparque. — « *I precursori di Copernico nell'* » *antichità. 1873.* » — « *Le sfere omocentriche di Eudosso, di* » *Calippo e di Aristotele. 1875.* » — *(Ulrico Hœpli, Milan-Naples.)*

Il insiste particulièrement sur la nécessité qu'il y avait à l'origine de la science de constituer hypothétiquement un système du monde, avant d'essayer une théorie scientifique des mouvements des corps célestes. Il montre l'École Pythagoricienne, guidée par des conceptions purement métaphysiques, supposant la première les planètes situées à des distances inégales du centre du monde, suivant une progression à déterminer, et attribuant le mouvement diurne à la Terre, d'abord autour d'un foyer central invisible (système de Philolaüs), puis autour de son centre, identifié avec celui du monde; la théorie des épicycles et des excentriques mobiles dérivant naturellement de la discussion de l'hypothèse de Philolaüs, dès le commencement du IVe siècle avant J.-C., connue de Platon

lorsqu'il écrivait le Xme livre des *Lois* (éd. Didot. II, 447, 45, sq.), et conduisant presque immédiatement à l'hypothèse du système héliocentrique, soutenu un siècle plus tard par Aristarque de Samos, lorsqu'il eut démontré, le premier, que le Soleil était de beaucoup plus gros que la Terre.

Recherchant les causes qui ne permirent pas à cette hypothèse de triompher dès cette époque, il signale l'opposition des croyances religieuses, des superstitions astrologiques et des opinions métaphysiques prédominantes. En particulier, les idées générales des Grecs sur la nature du mouvement leur faisaient rejeter l'hypothèse d'une attraction et de forces centrifuges, conséquences nécessaires du système héliocentrique. Enfin, dès le temps de Platon, Eudoxe avait constitué, avec des sphères concentriques, un système longtemps célèbre, s'il fut injustement méprisé plus tard, et qui permettait d'établir, pour les mouvements en longitude et en latitude, une théorie d'accord avec les observations que l'on pouvait faire à cette époque.

Séance du 11 mai 1876. — M. Perez fait une communication sur quelques particularités du développement de l'œuf chez les insectes.

Il résulte d'observations faites sur diverses espèces, que le fond du tube ovigère contient, non point des ovules, mais des cellules-mères d'ovules. Ces cellules se segmentent en 8, en 16, en 32 cellules-filles, dont une seule, la plus éloignée du fond du tube, devient œuf, et les 7, 15, 31 autres deviennent les cellules dites improprement *vitelligènes*, et sont destinées à avorter avant la maturation de l'œuf.

Dans le cours de sa formation, l'œuf ne chemine point le long du tube ovigère. Il se développe sur place, toujours entouré des mêmes cellules épithéliales. Quand il est mûr, il tombe dans la portion oviductale de la gaîne ovigère. On sait que celle-ci est formée de deux tubes emboîtés l'un dans l'autre. Le tube intérieur se résorbe successivement par sa partie inférieure, qui donne ainsi aux œufs leur liberté. Il est facile de suivre les phases de cette destruction chez les espèces possédant un grand nombre d'œufs dans chaque gaîne ovigère.

— Le même membre montre à l'Assemblée un fragment de rayon de cire artificiel, destiné à servir de base à la construction des rayons dans les ruches. Cette invention, fort appréciée des apiculteurs, consiste en une lame de cire obtenue par compression entre deux plaques de cuivre, et reproduisant la lame centrale du

gâteau naturel formée par les fonds pyramidaux des cellules.

— Il met encore sous les yeux de la Société un exemplaire vivant et adulte du *Zonites Algirus*, trouvé dans un jardin où des œufs de cette espèce avaient été déposés en 1869; ce fait semble indiquer l'acclimatation de cette hélice à Bordeaux. (Voir *Extraits des Procès-Verbaux*, t. VIII, p. CII.)

Séance du 1er juin 1876. — M. MARCHAND est élu membre titulaire de la Société.

— M. ABRIA met sous les yeux de la Société un petit appareil connu sous le nom de *light-mill* ou radiomètre. Cet appareil consiste en un petit moulinet en aluminium, dont les ailes sont noircies sur une face et qui est placé dans un ballon dans lequel on a fait un vide aussi parfait que possible. Sous l'action de la lumière d'une bougie, située à plusieurs centimètres de distance, le moulinet tourne sur la pointe qui le supporte avec une vitesse d'autant plus grande que la bougie est plus rapprochée. Cet appareil a été inventé par M. Crookes, et on a pensé que le mouvement devait être attribué à la radiation provenant de la source de lumière. Cette opinion a été combattue par plusieurs physiciens, entre autres par MM. Reynolds et Schuster, qui attribuent le mouvement à l'action de la chaleur émanée de la source sur la petite portion de matière gazeuse qui reste toujours dans le ballon. M. Abria résume divers travaux récemment publiés sur cette question dans les procès-verbaux de la Société Royale de Londres. Il semble résulter des dernières expériences, et de celles qui ont été faites par M. Crookes lui-même que l'action observée est en effet purement mécanique et dépend du gaz qui reste dans l'appareil.

— M. HAUTREUX présente un travail sur les densités de l'eau de mer. L'assemblée vote l'impression de ce travail dans les *Mémoires de la Société.*

Séance du 15 juin 1876. — M. ABRIA met sous les yeux de la Société un galvanomètre destiné aux expériences de cours, dans lequel les indications de l'aiguille sont projetées sur un cadran vertical de dimensions assez grandes. L'inventeur, M. Bourbouze, a eu pour objet de rendre l'instrument sensible aux courants thermo-électriques aussi bien qu'aux courants hydro-électriques et ce but est atteint à l'aide de centrures à vis qui permettent de faire varier la sensibilité comme dans les balances de précision. Le barreau aimanté unique de l'appareil est suspendu à l'aide d'un

couteau comme les fléaux des balances, et on peut, au moyen des curseurs, rapprocher ou éloigner le centre de gravité du centre de suspension.

— M. Abria a répété pendant la séance l'expérience célèbre de Foucault sur la chaleur développée dans une plaque de cuivre rouge que l'on fait tourner entre les pôles d'électro-aimant. Il suffit dans l'appareil construit par M. Ducretel d'un ou deux éléments Bunsen pour obtenir, après quelques minutes, une variation de température sensible et appréciable à l'aide du galvanomètre Bourbouze.

Lorsqu'on met en communication les armatures d'un condensateur, le travail développé par la réunion des deux électricités a pour mesure $T = \frac{1}{2} VQ$, V étant le potentiel du système et Q la quantité d'électricité possédée par chaque face. M. Abria donne une démonstration élémentaire de cette formule, importante dans les applications de la théorie du potentiel électrique, en se bornant au cas de la bouteille de Leyde sphérique.

— M. Samie dit quelques mots sur le Dauphin pris à Bordeaux le 11 juin 1876. Cet animal est le *Delphinus orca* de Linné, ou Épaulard des Saintongeois (avec quelques doutes); cétacé très précieux pour la science, puisque aucun musée ne possède de squelette ni même de dessin de l'animal.

Aujourd'hui le musée de Bordeaux va posséder le squelette entier, et l'animal sera décrit et figuré dans les *Actes de la Société Linnéenne* de notre ville par les soins de M. le Dr Souverbie, directeur du Muséum.

Séance du 29 juin 1876. — M. Gayon fait connaître à la Société l'ébullioscope Vidal, perfectionné par M. Malligand. Il compare cet appareil à l'alambic Salleron au point de vue de la rapidité et de la précision dans la détermination de la richesse alcoolique des vins.

— M. Gayon montre ensuite à la Société un ballon Pasteur à deux cols où fermente abondamment du moût de bière sous l'influence d'une moisissure de la famille des mucorinées (*Mucor circinelloides*, V. T.). La proportion d'alcool contenue dans la bière ainsi obtenue s'élève à 3, 5 et 4 pour cent. M. Pasteur a montré que plusieurs autres moisissures (*Mucor, Penicillium, Aspergillus*) jouissent, à des degrés divers, de la même propriété, lorsqu'elles sont obligées de se développer sans oxygène libre, dans un liquide nutritif sucré.

— M. Baudrimont ne pense pas que l'intervention des organismes

soit pour quelque chose dans cette fermentation. On obtient une fermentation avec de l'oxygène pur, passé dans des tubes chauffés au rouge.

— M. Laval, comparant les thermomètres conjugués au radiomètre, fait ressortir le rapport qui existe entre ces deux appareils. Les deux instruments sont fondés sur la différence d'action d'une source de lumière et de chaleur sur une surface polie et sur une surface noircie.

Dans le thermomètre, où ces surfaces sont immobiles, la différence d'effet se traduit par une différence d'élévation de température. Dans le radiomètre, au contraire, les surfaces sont mobiles, et l'effet produit est un mouvement dans le sens de l'action la plus forte. Ce rapport pourrait bien militer en faveur d'une action lumineuse, la lumière étant considérée comme un mouvement.

— M. Samie présente au nom de M. Royer, empêché, la communication suivante :

« L'appareil de M. Bourbouze qui sert à montrer de loin à un grand nombre d'auditeurs le passage d'un courant dans un circuit galvanométrique, peut rendre de grands services dans les cours; mais son prix relativement élevé en interdit l'acquisition à beaucoup d'établissements d'instruction privée et aussi à la plupart des écoles communales. J'ai donc pensé à remplacer cet instrument d'une manière avantageuse pour les cours et aussi économique que possible.

» Tous les laboratoires possèdent une petite balance ou trébuchet. C'est cette balance que je transforme pour la circonstance, et à peu de frais, en un galvanomètre sensible dont les indications peuvent être aperçues de loin.

» Il suffit de décrocher les plateaux de la balance et de suspendre à l'une des extrémités du fléau une petite aiguille aimantée à laquelle on fait équilibre par un contre-poids suffisant, appliqué à l'autre extrémité. On place sous cette aiguille, et de manière qu'elle y pénètre d'une petite partie de sa longueur, une bobine évidée de dimensions peu considérables et sur laquelle s'enroule un fil galvanométrique, long et fin s'il s'agit d'un courant hydro-électrique, gros et court si l'on a affaire à un courant thermo-électrique, dont l'instrument, ainsi que je l'ai expérimenté, peut constater l'existence (1).

(1) « Je ne savais pas lorsque j'ai imaginé de transformer la balance ordinaire en *balance galvanométrique* pouvant servir, 1° à montrer de loin le passage de l'électricité dans un circuit; 2° à mesurer en poids le travail d'un courant, que M. Becquerel s'était servi déjà de la balance dans ses recherches électro-dynamiques.

» Dès qu'on fait passer un courant dans le fil, l'aiguille est attirée dans l'intérieur de la bobine, le fléau s'incline et finalement se maintient dans une position d'équilibre stable, qu'il garde tant que le courant conserve la même intensité; ce qui permet de constater son existence et d'en apprécier jusqu'à un certain point l'intensité.

» Si l'on vient à changer le sens du courant, l'aiguille aimantée tend à être relevée, perd de son poids, et c'est alors le contre-poids qui l'emporte. L'aiguille de la balance vient se placer dans une position d'équilibre stable, symétrique de la précédente.

» Pour rendre visible de loin et à un grand nombre d'auditeurs les différentes phases de l'expérience, on adapte au secteur sur lequel se meut l'aiguille de la balance, un secteur en carton semblable au premier, mais d'un rayon suffisamment grand, de 20 centimètres environ. Ce secteur est divisé comme le premier, et ses divisions sont dans le prolongement de celles du secteur de la balance. On fixe à l'aiguille de cette dernière une aiguille plus longue, soit en métal, soit en bois, soit en paille, etc.; c'est cette aiguille, qui n'est que le prolongement de celle de la balance, qui permet, par sa marche sur le secteur en carton, d'apercevoir de loin le passage du courant en même temps que son énergie relative.

» Quand on a fini d'expérimenter, on enlève les pièces accessoires, on remet en place les plateaux de la balance, qui redevient ce qu'elle était, après avoir été pour ainsi dire une *balance galvanométrique*.

» On comprend qu'en prenant une balance très sensible quand on le pourra et une bobine convenable, on arrivera à déceler et à rendre visible de loin le passage dans le circuit de petites quantités d'électricité. A ce point de vue la *balance galvanométrique* peut donc rendre de très grands services dans les cours et remplacer jusqu'à un certain point, et à moins de frais, le galvanomètre de M. Bourbouze (¹).

Aucun des nombreux ouvrages de physique que j'ai consultés ou fait consulter ne mentionne rien d'analogue. C'est en lisant la présente note à notre savant collègue M. Abria que j'ai appris de lui que l'emploi de la balance n'était pas nouveau, et que M. Becquerel avait modifié cet instrument de la façon indiquée plus haut, pour remplacer le galvanomètre. Il n'y aurait donc de neuf dans ce que j'ai imaginé que la transformation de la balance ordinaire en un appareil pouvant montrer de loin, à peu de frais et dans l'intérêt de la vulgarisation de la science, l'existence d'un courant à un grand nombre d'auditeurs. »

(¹) J'ai eu l'occasion de faire fonctionner l'appareil devant plusieurs de nos collègues, MM. Samie, Colot, É. Baudrimont. Ces messieurs l'ont jugé fort utile, tant à cause de sa sensibilité, que des applications qu'on peut en faire dans les cours nombreux. Ils m'ont dit n'avoir jamais vu d'instrument galvanométrique analogue.

» Si l'on veut augmenter la sensibilité de l'appareil, il suffit de remplacer le contre-poids par une aiguille aimantée de même poids que la première, puis de placer sous chaque aiguille une bobine qui communique à l'autre et dont les fils soient enroulés dans le même sens. Quand le courant passera, les deux aiguilles seront l'une attirée, l'autre repoussée, si l'on a eu soin que les extrémités inférieures des aiguilles soient aimantées de sens contraire; les deux actions s'ajouteront pour augmenter la déviation de l'aiguille de la balance, et pourront déceler la présence d'un courant même très faible. »

— M. Glotin présente la communication suivante, sur les cartes marines orthodromiques de M. Hilleret.

« Le n° des *Mondes* du 15 juin 1876 contient un article sur un nouveau système de projection pour les *cartes marines*, imaginé par M. Hilleret dans le but de faciliter la navigation suivant l'arc de grand cercle, c'est-à-dire suivant le plus court chemin sur la surface de la sphère.

» Ce genre de navigation est nommé orthodromique; tandis que la navigation ordinaire peut être dite loxodromique. En effet, la route suivie par un navire qui se dirige toujours suivant le même point de la boussole est une *loxodromie*, courbe qui coupe sous le même angle tous les méridiens qu'elle rencontre.

» La projection de *Mercator*, ou aux *latitudes croissantes*, employée pour les cartes marines ordinaires, jouit de cette propriété, très précieuse pour la navigation, que toute loxodromie y est représentée par une ligne droite, qui fait avec les projections des méridiens un angle constant et précisément égal à celui de cette loxodromie et des méridiens eux-mêmes. Autrement dit, tous les azimuts sont projetés en vraie grandeur.

» Par contre, les projections des distances ne leur sont pas proportionnelles. Les projections sont d'autant plus amplifiées que la latitude est plus élevée. En général, pour évaluer une distance, ou la porter exactement sur ces cartes, il faut avoir recours à une construction, d'ailleurs assez simple.

» Sauf l'équateur et les méridiens, qui sont projetés suivant des droites, la projection d'un grand cercle sur ces cartes est une courbe que l'on est obligé de construire assez laborieusement par points, au moyen du calcul logarithmique de formules trigonométriques. Or, depuis quelques années, l'importance de la navigation orthodromique s'est accrue dans la proportion du nombre des grands steamers destinés aux longues traversées. En réduisant la longueur de celles-ci, elle procure de notables économies sur le

combustible; mais ses avantages sont surtout considérables sous le rapport postal, et encore plus au point de vue de la concurrence commerciale. Il était donc naturel de rechercher un système de cartes qui pût donner, pour ce mode de navigation, des facilités analogues à celles que la navigation loxodromique trouve dans les cartes marines ordinaires.

» M. Hilleret projette les divers lieux sur un plan tangent à la sphère en un point de l'équateur, en prolongeant jusqu'à la rencontre de ce plan les rayons terrestres qui passent par ces lieux mêmes. Tous les points d'un arc de grand cercle seront donc projetés par des droites situées dans son plan. La projection de cet arc sera donc une ligne droite, intersection des deux plans.

» La projection de l'équateur sera une ligne droite horizontale; celles des méridiens, des droites verticales dont les distances au point de tangence sur l'équateur iront en croissant comme les tangentes des longitudes comptées à l'Est et à l'Ouest, à partir de ce point. Il en résulte l'obligation, pour représenter un parage déterminé, de placer le point de tangence à la longitude médiane de ce parage.

» Les lignes projetantes de tous les points situés sur un même parallèle de latitude formeront un cône circulaire droit, dont l'axe sera parallèle au plan de projection. Ce plan coupera donc les deux nappes du cône suivant les deux branches d'une hyperbole, qui seront respectivement les projections des deux parallèles d'égales latitudes Nord et Sud. Toutes les hyperboles, projections des divers parallèles, auront leur sommet sur le méridien médian, et les distances de ces sommets au point de tangence seront proportionnelles aux tangentes des latitudes correspondantes.

» Remarquons que, d'après le mode de projection adopté, géométriquement, tout est parfaitement symétrique dans toutes les directions autour du point de tangence, et que, si l'on fait tourner d'un même mouvement autour de ce point, une figure tracée sur la sphère, et celle suivant laquelle elle se projette sur le plan tangent, cette dernière restera la projection de l'autre pendant toute la révolution.

» Supposons maintenant que l'on veuille évaluer la distance entre deux points donnés par leurs projections sur une carte orthodromique. Je fais passer une droite par ces deux projections. Ce sera la projection de l'arc de grand cercle sur lequel doit être comptée cette distance. Du point de tangence j'abaisse une perpendiculaire sur cette droite.

» Faisons maintenant tourner ensemble, autour du point de

tangence : notre grand cercle, sa projection portant celle des deux points donnés, et la perpendiculaire ci-dessus, jusqu'à ce que celle-ci vienne coïncider avec la projection de l'équateur; alors, notre grand cercle coïncidera avec un méridien et sa projection avec celle de ce méridien, et l'on pourra évaluer, sur cette projection, la différence en latitude qui séparera les projections ainsi transportées des deux points donnés. La distance réelle de ces deux points sera exactement, en milles marins, le nombre des minutes contenues dans la différence en latitude ainsi relevée.

» De même, pour porter une distance sur un grand cercle à partir d'un point donné, on cherche le méridien qui correspond à ce grand cercle, comme dans le problème précédent, et l'on place sur ce méridien le point correspondant au point donné. On détermine alors un second point qui en diffère en latitude, et dans le sens convenable, d'un nombre de minutes égal à celui des milles que l'on veut porter, et la distance entre ces deux points, reportée sur la projection du grand cercle, à partir du point donné, toujours en ayant égard au sens, sera la distance demandée.

» On remarquera que dans une traversée on suivra en général le même grand cercle. Le méridien symétrique de ce grand cercle pourra donc être déterminé une fois pour toutes, et même l'échelle correspondante de latitudes pourra être indiquée sur ce méridien, ce qui simplifiera et facilitera beaucoup les opérations relatives aux distances.

» Le second problème fondamental de la navigation, la recherche de l'angle à suivre au compas de route, n'est pas aussi facile à résoudre sur ces cartes orthodromiques, car les azimuts ne s'y projettent point en vraie grandeur. Cependant il est indispensable de pouvoir le résoudre promptement, puisque l'on ne peut se diriger en haute mer qu'à l'aide de la boussole.

» L'auteur donne la relation

$$\operatorname{tang} V = \frac{\operatorname{tang} V'}{\cos L},$$

dans laquelle V représente l'angle du grand cercle considéré avec le méridien du lieu, L la latitude de leur point de rencontre, et V' l'angle constant de la projection orthodromique du grand cercle avec celles des méridiens; mais il semblerait que cette relation se rapporte à un cas particulier, et les indications étant insuffisantes, je n'ai pas pu la retrouver. L'auteur dit que cette formule lui sert à tracer au bas de la carte des courbes auxiliaires qui permettent de trouver la valeur de V.

» Voici une autre relation

$$\text{tang } G = \sin L \text{ tang } V,$$

qui peut conduire au même résultat. Elle se tire du triangle sphérique rectangle formé par l'équateur, le grand cercle considéré et le méridien du lieu. L et V ont la même signification que ci-dessus. G est la différence en longitude entre le lieu considéré et le point où le grand cercle rencontre l'équateur. G peut donc ordinairement se lire sur la carte, ainsi que L. Si le point de rencontre avec l'équateur tombait hors de la carte, il faudrait lever la difficulté en réduisant l'échelle de la construction. Il convient d'ailleurs de remarquer que le grand cercle à suivre restant le même pendant une traversée, on peut déterminer une fois pour toutes la différence en longitude entre ce point de rencontre et le point de tangence, centre de la carte, ce qui facilitera beaucoup la détermination de la valeur de G. Connaissant G et L, on pourrait calculer la valeur de V.

» Au lieu de calculer chaque fois la valeur de V, il sera plus commode, dans la pratique, d'établir, à l'aide de la même formule, un tableau de courbes qui permette de trouver promptement et facilement V dans tous les cas possibles, tableau que l'on reproduirait sur toutes les cartes orthodromiques.

» Donnons à V la valeur de 5°, et, au moyen de la formule tang G = sin L tang 5°, calculons entre L et G, exprimés en minutes de degré, une courbe rapportée à deux axes rectangulaires. Calculons ensuite entre L et G une seconde courbe pour une valeur de V = 10°, en rapportant cette courbe aux mêmes axes, et ainsi de suite, de 5 en 5 degrés, jusqu'à 85 degrés.

» Maintenant, pour trouver V dans un cas donné, on relèvera sur la carte les valeurs en minutes de L et de G, on les rapportera au tableau sur leurs axes respectifs, et on mènera les coordonnées. Si leur point de rencontre tombait sur l'une de nos courbes, la valeur de V serait celle qui correspond à cette courbe. S'il tombe entre deux, on appréciera la valeur de V d'après la situation de ce point relativement aux points de rencontre, soit de l'abscisse, soit de l'ordonnée, avec les deux courbes voisines.

» Dans la pratique de la navigation orthodromique, on prend sur l'arc de grand cercle, que théoriquement l'on devrait suivre, des points suffisamment rapprochés les uns des autres, et l'on passe successivement de l'un à l'autre par des routes loxodromiques. Pour avoir l'angle loxodromique de l'une de ces routes, c'est-à-dire la direction à suivre, il faut considérer qu'il est compris entre les

valeurs de V pour les deux points de l'arc de grand cercle qu'elle rejoint. Il sera toujours très suffisant de prendre la moyenne de ces deux valeurs de V; d'abord parce que les points de l'arc de grand cercle, ainsi rejoints par des loxodromies, sont peu distants, et que, de plus, il est bien inutile de rechercher une approximation plus grande que le degré dans une route à la mer.

» Maintenant que nous savons nous servir des cartes orthodromiques de M. Hilleret, recherchons jusqu'à quel point il serait avantageux de les adopter.

» Il ne peut être question de remplacer complètement les cartes loxodromiques par les cartes orthodromiques. Il suffit, à cet égard, de réfléchir à la masse immense de documents dressés suivant la première projection. On sait qu'une difficulté de même ordre a seule empêché l'adoption des *grades* de 100 au quadrant.

» Mais bien plus, le nouveau mode de projection ne convient pas du tout pour les cartes dites à grand point, qui n'embrassent qu'un parage restreint. En effet, ce n'est que pour de grandes distances que la navigation suivant l'arc de grand cercle offre des avantages bien réels. Même dans la pratique de la navigation orthodromique, on ne navigue pas, comme nous l'avons déjà vu, à proprement parler suivant l'arc de grand cercle, mais suivant une série d'arcs loxodromiques joignant des points peu distants entre eux de cet arc de grand cercle. Pour suivre exactement celui-ci, il faudrait changer constamment l'angle de route au compas de très petites quantités, ce qui serait une recherche aussi vaine que fatigante. Or, pour ces navigations loxodromiques partielles, il est infiniment plus commode de se servir de cartes marines ordinaires. Enfin, l'emploi des cartes loxodromiques est absolument indispensable pour la navigation côtière, où l'on fait un usage constant des relèvements au compas, qu'il importe de pouvoir porter de suite sur la carte, sans autre calcul ou opération intermédiaire que la correction ordinaire de la déclinaison, afin de connaître immédiatement sa position réelle.

» Il faudrait donc employer simultanément les deux projections : l'une, la projection orthodromique, pour les cartes à petit point, embrassant de grandes étendues, ce que l'on nomme *des routiers;* l'autre, pour les cartes à grand point. Or, cette coexistence de cartes suivant deux systèmes ne serait pas sans inconvénients; d'autant plus qu'il serait même bien difficile de se passer complètement de cartes loxodromiques à petit point. Il y a là une cause de plus grandes dépenses pour les armements, et peut-être aussi

une source de confusions et d'erreurs dont les conséquences pourraient être graves.

» Ces considérations m'ont conduit à penser qu'il serait possible d'utiliser la très ingénieuse idée de M. Hilleret, tout en évitant les inconvénients qui viennent d'être signalés, et en économisant les très grands frais d'édition de toutes les cartes qui seraient nécessaires dans le nouveau système.

» Au lieu d'établir les cartes mêmes, on pourrait se contenter de *tableaux* représentant le canevas d'une carte de cette sorte, c'est-à-dire les projections des méridiens et des parallèles sur l'étendue la plus grande possible en longitude et en latitude. Les tableaux ne devant porter aucune autre gravure, ces projections pourraient être en beaucoup plus grand nombre qu'elles ne le sont d'habitude; de degré en degré, par exemple; et même, en imprimant ces tableaux à deux encres, ou, plus simplement, avec des traits de différentes forces ou encore des traits pleins et pointillés, on pourrait les multiplier davantage. Il conviendrait d'adopter la teinte bistre, comme sur les papiers quadrillés à l'échelle pour les croquis de plans, afin de laisser plus apparentes les constructions que l'on y dessinerait.

» Les degrés de latitude pourraient être numérotés d'avance, mais non pas les degrés de longitude. Ce tableau serait alors applicable à n'importe quelle partie de la Terre. Il suffirait d'attribuer au point central, c'est-à-dire au point de tangence du plan de projection, la longitude médiane du parage considéré, et on indiquerait la graduation des longitudes avec un crayon facile à effacer, si l'on tenait à ce que la même feuille pût servir plusieurs fois.

» Voici maintenant la manière très simple d'employer le *tableau orthodromique*.

» Ayant relevé sur la carte marine ordinaire ou loxodromique les longitudes et les latitudes des deux points entre lesquels on veut mener un arc de grand cercle, on porte les deux points sur le tableau à l'aide de ces coordonnées, puis on les y joint par une ligne droite qui sera la projection orthodromique de l'arc de grand cercle demandé. Pour tracer sa projection sur la carte loxodromique, on pourra prendre autant de points que l'on voudra sur la projection orthodromique au tableau, et les reporter au moyen de leurs latitudes et longitudes sur la carte loxodromique, où on les reliera par une courbe continue. Cette construction peut se faire assez rapidement, surtout en choisissant pour points à reporter les intersections de la projection orthodromique avec les

méridiens et les parallèles qui sont indiqués sur la carte loxodromique.

» On comprend maintenant la convenance et en même temps l'économie de cette manière d'utiliser la très ingénieuse idée de M. Hilleret. Le canevas orthodromique une fois gravé à l'échelle qui paraîtra la plus avantageuse, on en tirerait des millions d'épreuves pouvant servir dans tous les cas possibles, avec des cartes de toutes les échelles et même de *tous les systèmes de projection,* puisque les reports de ces cartes au tableau, et réciproquement, se feront à l'aide seulement des longitudes et des latitudes des points à reporter.

» Je désirerais compléter ces considérations par l'indication d'un problème de navigation très propre à faire ressortir les avantages de l'emploi des tableaux orthodromiques.

» Il est à remarquer que la route suivant l'arc du grand cercle se rapproche toujours plus du pôle que la route loxodromique correspondante. Pour de longues traversées entre deux points du même hémisphère, et tous deux de latitudes même seulement moyennes, la route orthodromique peut remonter jusqu'à des parages rendus impraticables par les glaces flottantes ou même des banquises. On est alors amené à se fixer une limite en latitude.

» Voici, dans ce cas, la marche que l'on suit pour conserver le plus possible le bénéfice de la navigation orthodromique. Par les deux points de départ et d'arrivée, on imagine deux arcs de grands cercles tangents au parallèle limite. La route à suivre se composera de ces deux arcs et de la partie du parallèle comprise entre les deux points de tangence.

» Le tracé de cette route est très laborieux sur la carte loxodromique. Il faut déterminer par des calculs trigonométriques les longitudes des deux points de tangence; puis par ces points et respectivement par les points de départ et d'arrivée, tracer les deux arcs de grands cercles aussi par points calculés; le tout à grand renfort de logarithmes.

» Voici la manière de procéder quand on se sert d'un tableau orthodromique.

» On porte sur ce tableau les deux points de départ et d'arrivée à l'aide de leurs coordonnées, latitude et longitude. Si on joignait ces deux points par une droite, projection de l'arc de grand cercle qu'ils déterminent, cette droite devrait couper la branche d'hyperbole qui est la projection du parallèle limite, puisque le cas est tel que la route par l'arc de grand cercle devrait atteindre des latitudes plus rapprochées du pôle. Par conséquent, deux tangentes à

l'hyperbole, que l'on mènera simplement à la règle, l'une par le point de départ et l'autre par le point d'arrivée, laisseront entre leurs points de tangence un certain arc de l'hyperbole, qui composera avec ces deux tangentes la projection de la route que doit suivre le navire.

» Rien de plus facile et de plus prompt que de transporter cette route par points sur la carte loxodromique, en choisissant les points où les tangentes ci-dessus désignées coupent des méridiens ou des parallèles indiqués sur cette dernière carte.

» De cette discussion je conclus à ce que l'on s'abstienne de construire dans le système orthodromique de M. Hilleret des cartes proprement dites, et qu'au contraire l'on se préoccupe le plus tôt possible de rechercher et d'adopter l'étendue et l'échelle les plus convenables pour dresser le tableau orthodromique dont je viens d'indiquer l'emploi, sans négliger tout ce qui peut se rapporter encore à cette très intéressante question. »

Séance du 13 juillet 1876. — M. Perez a observé chez un *Helix aspersa*, environ deux heures après l'accouplement, des spermatozoïdes en voie de dissolution dans le canal efférent de la glande hermaphrodite. La résorption de ces filaments précéderait donc et rendrait possible la descente des œufs dans ce conduit.

— M. Lespiault expose devant la Société un aperçu de la théorie cométaire de M. Zenker.

Séance du 27 juillet 1876. — M. Perez entretient la Société de la suite de ses recherches sur le micropyle de l'œuf des Insectes. En râclant avec précaution le pôle supérieur de l'œuf du *Smerinthus tiliæ*, il a pu réussir plusieurs fois à enlever complètement le dessin en rosette qui distingue cette région de la coque. Les prétendus canaux rayonnants du micropyle ne parviennent donc pas jusqu'à la surface interne de la coque, et ne sauraient, par conséquent, livrer passage aux filaments spermatiques.

— M. Castet fait une communication sur la question du plus court chemin sur la sphère entre deux points de la surface. Il se propose de revenir plus tard sur ce théorème, en le généralisant.

BULLETIN

DES

PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES

REÇUES PAR LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

pendant l'année 1874-1875.

Séance du 12 novembre 1874.

ALGER. — *Bulletin de la Société Algérienne de Climatologie.* 11e année, 1874; nos 4-7. — In-8o.

AMIENS. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel.* 3e année; nos 26-29, août-novembre 1874. — In-8o.

ANGERS. — *Bulletin de la Société d'Études scientifiques d'Angers.* 3e année, 1873. — In-8o.

BATAVIA. — *Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsh Indië, uitgegeven door de koninklijke Vereeniging in Nederlandsh Indië.* T. XXXII (7e série, t. II), fasc. 1-6; 1871-1873. — In-8o.

BERLIN. — *Monatsbericht der Königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Mai-août 1874. — In-8o.

— *Inhaltsverzeichniss der Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, aus den Jahren 1822 bis 1872. Nach den Classen geordnet.* 1873. — In-8o.

— *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von C. Ohrtmann m. A.* T. IV, année 1872; 1er fasc. 1874. — In-8o.

BERNE. — *Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern.* Année 1873, nos 812-827. — In-8o.

— *Verhandlungen der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft in Schaffhausen.* 56e Congrès, 1873. — In-8o.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 3e année, nos 30-44, août-novembre 1874. — In-4o.

BRESLAU. — *Abhandlungen der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. Philosophisch-historisch Abtheilung.* 1873-1874. — Gr. in-8o.

— *51. Jahres-Bericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur.* 1873. — Gr. in-8o.

BRUXELLES. — *Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.* — *Mémoires des Membres* (in-4°). T. XL, 1873. — *Mémoires couronnés et des savants étrangers* (in-4°). T. XXXVII, 1873. — *Mémoires couronnés et autres mémoires* (in-8°). T. XXIII, 1873. — *Bulletins de l'Académie* (in-8°). 2e série. T. XXXV-XXXVII, 1873-1874. — *Annuaire de 1874* (in-12).

— *Annales météorologiques de l'Observatoire Royal de Bruxelles, publiées par* A. QUETELET. Années 1872-1873. — In-4°.

— *Société Entomologique de Belgique. Comptes-rendus,* série II, nos 1-4, août-octobre 1874. — In-8°.

CAEN. — *Mémoires de l'Académie nationale des Sciences, Arts et Belles-Lettres.* Années 1872 et 1874. — 2 vol. in-8°.

CATANE. — *Atti dell' Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania.* 3e série, t. I, II, IV, V; 1867-1871. — In-4°.

CHERBOURG. — *Mémoires de la Société Nationale des Sciences naturelles de Cherbourg.* T. XVIII (2e série, t. VIII), 1874. — Gr. in-8°.

CHRISTIANIA. — *Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania* Années 1858-1864, 1866-1873. — 15 vol. in-8°.

CRACOVIE. — *Akademia Umiejętności w Krakowie:* — *Rocznik Ces. Król. Towarzystwa naukowego Krakowskiego.* 3e série, t. VII, X, XII, XVI, XIX; 1862-1871. — In-8°.

— *Sprawodzanie Komisyi Fizyograficznéj b. c. k. Towarzystwa naukowego krakowskiego obejmujace poglad naczynności dokonane w rok. 1868-1872.* T. III-VII, 1869-1873. — In-8°.

DANZIG — *Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig.* 2e série, t. III, fasc. 2; 1873. — Gr. in-8°.

DIJON. — *Mémoires de l'Académie des Sciences, Arts et Belles-lettres de Dijon.* 3e série, t. I, 1871-1873. — In-8°.

FLORENCE. — *Rivista scientifico-industriale, compilata de G. Vimercati.* 6e année, juillet-septembre 1874. — In-8°.

GENÈVE. — *Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève.* T. XXI, 1re et 2e partie; t. XXIII, 2e partie, 1871-1874. — In-4°.

GLASGOW. — *Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland.* T. XVII, 1874. — In-8°.

GŒTTINGUE. — *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität.* Année 1873. — 1 vol. in-12.

— *Göttingische gelehrte Anzeigen.* Année 1873. — 2 vol. in-12.

HALLE. — *Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften. Redigirt von Dr. C. G. Giebel.* 2e série, t. V. VIII, 1871-1873. — In-8°.

HARLEM. — *Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.* T. VIII (livr. 1, 2, 5); t. IX (livr. 1-3); 1873-1874. — In-8°.

— *Archives du Musée Teyler.* T. I (livr. 2-4); II, III; 1867-1874. — In-4°.

— *Bibliotheca ichthyologica et piscatoria. Catalogus van Boeken en Geschriften over de natuurlijke geschiedenis van de visschen en walvisschen, de kunstmatige vischteelt, de visscherijen, de wetgeving op de visscherijen, enz. Bewerkt door* D. MULDER BOSGOED, *Bibliothekaris van het Rotterdamsch Leeskabinet.* 1873. — 1 vol. in-8°.

HEIDELBERG. — *Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg.* 2e série, t. I, fasc. 1, 1871. — In-8°.

LEIPZIG. — *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft.* 9e année, 2e fasc. 1874. — In-8°.

— *Beobachtungen der Sonnenflecken zu Anklam, von Prof. Dr. G. Spörer. XIII. Publication der Astron. Gesellschaft.* 1874. — In-4°.

LIÉGE. — *Correspondance botanique. Liste des Jardins, des Chaires et des Musées botaniques du Monde.* 2e édition, 1873. — In-8°.

LONDRES. — *Proceedings of the London Mathematical Society.* T. IV. n° 66; t. V, nos 67-72. — In-8°.

— *Linnean Society. — The Journal of the Linnean Society. Zoology.* t. XII, n° 6, 1874. *Botany,* t. XIV, nos 73-76, 1873-1874. — *List of the Members,* 1873. — *Additions to the Library,* 1872-1873. — In-8°.

LYON. — *Mémoires de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Lyon.* Classe des Sciences, t. XX, 1873-1874. — Gr. in-8°.

MANCHESTER. — *Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester.* 3e série, t. IV, 1871. — In-8°.

— *Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester.* T. VIII-XII, 1868-1873. — In-8°.

MODÈNE. — *Annuario della Società dei Naturalisti in Modena.* 2e série, 8e année, fasc. 2; 1874. — In-8°.

NAPLES. — *Atti del Reale Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali, economiche e tecnologiche.* 2e série, t. X, 1874. — Gr. in-4°.

PARIS. — *Association Française pour l'avancement des Sciences. 2e Session, Lyon. Compte-rendu;* 1873. 1 vol. gr. in-8°. — *Documents et informations diverses.* N° 8. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXII, nos 2-9, juillet-novembre 1874. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France.* T. I, fasc. 1-4; T. II, fasc. 3-4; 1873-1874. — Gr. in-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* T. VII, juillet-août 1874. — Gr. in-8°.

— *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris.* 2e série, t. VIII, fasc. 5-6, juillet-décembre 1873. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXIX, nos 2-17, juillet-octobre 1874. — In-4°.

— *Indicateur de l'archéologue.* N° 20, août 1874. — In-8°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. III, nos 31-34, juillet-octobre 1874. — Gr. in-8°.

PHILADELPHIE. — *Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia.* 1873. — In-8°.

— *Proceedings of the American Philosophical Society.* T. XIII, nos 90-91, 1873. — In-8°.

PISE. — *Il Nuovo Cimento.* 2e série, t. XII, juillet-octobre 1874. — In-8°.

PRAGUE. — *Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag.* Année 1873, 6e série, t. VI. — In-4°.

— *Sitzungsberichte der königl. bömischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag.* Années 1872 (2e fasc.) et 1873. — In-8°.

— *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky.* 3e année, nos 5-6, 1874. — In-8°.

ROME. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* T. XXVII, 5e séance, 1874. — In-4°.

— *Atti della Reale Accademia dei Lincei.* T. XXVI, 2e séance, 1873. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. VI, table des matières; t. VII, avril-juin 1874. — In-4°.

ROTTERDAM. — *Programme de la Société Batave de Philosophie expérimentale.* 1874. — In-8°.

STUTTGART. — *Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg.* 13e année, 1874. — In-8°.

TOULOUSE. — *Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Toulouse.* 8e année, 1er fasc., 1873-1874. — In-8°.

— *La rage au point de vue physiologique.* Par le colonel E. BELLEVILLE, 1873. — In-8°.

TOURS. — *Recueil des travaux de la Société médicale du département d'Indre-et-Loire.* Années 1873 (2e semestre) et 1874 (1er semestre). — In-8°.

TROYES. — *Société médicale de l'Aube. Années 1869-1872. Bulletin* n° 5, t. II. — In-8°.

TURIN. — *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.* T. IX, 1873-1874. — Gr. in-8°.

UPSAL. — *Nova Acta regiæ Societatis scientiarum Upsalensis.* 3e série, t. VIII, fasc. 2; 1873. — In-4°.

— *Bulletin météorologique mensuel de l'Observatoire de l'Université d'Upsal.* Vol. IV et V, 1871-1873. — Gr. in-4°.

VALENCIENNES. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique.* T. XXVII, nos 5-8, mai-août 1874. — In-8°.

VIENNE. — *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe.* T. LXI (fasc. 2-10), LXII-LXVII, LXVIII (fasc. 1-2); 1870-1873. — Gr. in-8°.

WASHINGTON. — *Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution.* Année 1872. — In-8°.

— *Bulletin of the United-States Geological and Geographical Survey of Territories.* N° 1, 1874. — In-8°.

— *Miscellaneous Publications.* N° 4. *Synopsis of the Flora of Colorado, by Th. C. Porter and J. M. Coulter.* 1874. — In-8°.

— *Astronomical and Meteorological Observations made during the year 1871, at the United-States Naval Observatory, Rear-Admiral B. F. Sands Superintendant.* 1873. — 1. vol. in-4°.

WURZBOURG. — *Verhandlungen der Physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg.* T. VII et VIII (fasc. 1-2); 1874. — In-8°.

ARGAND (R.). — *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires, dans les constructions géométriques.* 2e édition. Précédée d'une Préface par J. HOÜEL, et suivie d'un *Appendice,* contenant des extraits des *Annales de Gergonne,* relatifs à la question des imaginaires. Paris, 1874. — 1 vol. petit in-8°.

BAUDRIMONT (A.). — *Leçons sur le Phylloxera.* Bordeaux, 1874. — In-8°.

WEYR (Em.). — *Úvod do geometrické theorie křivek rovinných., sepsal Dr. Ludvik Cremona. uspořadàl Em. Weyr.* Fasc. II-III. Prague, 1874. — In-8°.

ZINNE (Silv.). — *Memoria sull' ozono, premiata per concorso internazionale accademico dal R. Istituto Lombardo. Napoli.* 1874. — In-8°.

Séance du 26 novembre 1874.

BORDEAUX. — *Mémoires et Bulletins de la Société Médico-Chirurgicale des Hôpitaux et Hospices de Bordeaux.* T. VI, 1866-1871; 9 fasc. — Gr. in-8°.

— *Le Bordeaux médical.* 3e année, nos 45-47, novembre 1874. — In-4°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 14e année, septembre 1874. — In-8°.

FLORENCE. — *Rivista scientifico-industriale.* 6e année, octobre 1874. — In-8°.

MONTPELLIER. — *Académie des Sciences et des Lettres de Montpellier. Mémoires de la section des Sciences.* T. VI (2e fasc.), VII, VIII, (fasc. 1-2); 1865-1872. — In-4°.

NANCY. — *Mémoires de l'Académie de Stanislas.* 1873. 4e série, t. VI. — In-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société chimique de Paris.* T. XXII, n° 10, 20 novembre 1874. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* T. VII. septembre 1874. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXIX, nos 18-20, novembre 1874. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. III, n° 35, novembre 1874. — Gr. in-8°.

— *Rapports au Ministre sur la Collection des Documents inédits de l'Histoire de France, et sur les Actes du Comité des travaux historiques.* 1874 — In-4°.

ROME. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* 27e année, 6e séance, 31 mai 1874. — In-4°.

VALENCIENNES. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique.* T. XXVII, n° 9, septembre 1874. — In-8°.

Séance du 10 décembre 1874.

AMIENS. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel.* 3e année, n° 30, 1er décembre 1874. — In-8°.

BERLIN. — *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.* T. IV, année 1872, 2e fasc., 1874. — In-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 3e année, nos 48-49, novembre-décembre 1874. — In-4°.

— *Mémoires et Bulletins de la Société de Médecine et de Chirurgie de Bordeaux.* Année 1874, fasc. 1-2. — Gr. in-8°.

BRUXELLES. — *Société Entomologique de Belgique,* 2e série, n° 5. *Compte rendu de l'Assemblée mensuelle du 7 novembre 1874.* — In-8°.

LIÉGE. — *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége.* 2e série, t. V, 1873. — Gr. in-8°.

NIMES. — *Bulletin de la Société d'Étude des Sciences naturelles.* 2e année, n° 1, janvier-mars 1874. — In-8°.

PARIS. — *Association française pour l'avancement des Sciences. Documents et informations diverses.* N° 9. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXII, n° 11, 5 décembre 1874. — In-8°.

— *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris.* 2e série, t. IX (fasc. 1-2), janvier-avril 1874. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXIX, nos 21-22; novembre 1874. — In-4°.

DELFORTRIE. — *Empiètement de la mer sur la plage d'Arcachon.* Paris (Bordeaux), 1874. — Gr. in-8°.

LAISANT (C.-A.). — *Exposition de la méthode des équipollences, par M.* G. BELLAVITIS, *traduit de l'italien.* Paris; 1874. — 1 vol. in-8°.

— *Sur les rayons de courbure des courbes planes.* Paris, 1874. — In-8°.

RUBINI (R.). — *Elementi di Calcolo infinitesimale.* Parte Ia. *Calcolo differenziale. 2e Edizione riveduta ed aumentata.* Napoli, 1874. — 1 vol. gr. in-8°.

Séance du 24 décembre 1874.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 3e année, nos 50-51; décembre 1874. — In-4°.

BRUXELLES. — *Société Entomologique de Belgique.* Série II, n° 6. *Compte rendu de l'Assemblée mensuelle du 5 décembre 1874.* — In-8°.

FLORENCE. — *Rivista scientifico-industriale.* 6e année, novembre 1874. — In-8°.

MUNICH. — *Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königlich bayerischen Akademie der Wissenschaften.* T. XI, 3e partie; 1874. — In-4°.

— *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München.* 1874, fasc. I-III. — In-8°.

— BISCHOFF (L.-W. v.). *Ueber den Einfluss der Freiherrn Justus von Liebig auf die Entwickelung der Physiologie. Eine Denkschrift.* 1874. — In-4°.

— PETTENKOFER (Max. v.). *Dr. Justus Freiherrn von Liebig zum Gedächtniss.* 1874. — In-4°.

— VOGEL (Aug.). *Justus Freiherr von Liebig, als Begründer der Agrikultur-Chemie. Eine Denkschrift.* 1874. — In-4°.

— DÖLLINGER (J. v.). *Rede in der öffentlichen Sitzung der k. Akademie der Wissenschaften am* 25. *Juli.* 1873. — In-4°.

NEUCHATEL. — *Bulletin de la Société des Sciences naturelles de Neuchâtel.* T. X, 1er cahier; 1874. — In-8°.

ODESSA. — *Zapiski*... Mémoires de la Société des Naturalistes de la Nouvelle-Russie. T. II, fasc. 2-3; 1873-1874. — Gr. in-8°.

— *Protokoly...* Procès-verbaux des séances pour l'année 1873. — Compte rendu des excursions en 1873. — Gr. in-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXII, n° 12; 20 décembre 1874. — In-8°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. III, n° 36, décembre 1874. — Gr. in-8°.

ROME. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* XXVII° année, 7° séance; 1874. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze mathematiche e fisiche.* T. VII, juillet 1874. — In-4°.

FAVARO (Ant.). — *Intorno ai mezzi usati dagli antichi per attenuare le disastrose conseguenze dei terrèmoti.* Venise, 1874. — In-8°.

Séance du 7 janvier 1875.

AMIENS. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel.* N° 31, 1er janvier 1875. — In-8°.

BAGNÈRES-DE-BIGORRE. — *Bulletin de la Société Ramond.* Années I-IX, 1866-1874. — In-8°.

— PHILIPPE. *Ornithologie pyrénéenne. Oiseaux sédentaires. Oiseaux de passage régulier, irrégulier et accidentel dans les Pyrénées françaises.* 1873. — In-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 3° année, n° 52, décembre 1874; 4° année, n° 1, janvier 1875. — In-4°.

PARIS. — *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXIX, nos 23-25, décembre 1874. — In-4°.

TOULOUSE. — *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse.* 7° série, t. VI, 1874. — Gr. in-8°.

WURZBOURG. — *Die* Pennatulide umbellula *und zwei neue Typen der Alcyonarien. Von* Albert KÖLLIKER. *Festschrift des 25-jährigen Bestehns der physikalisch-medicinischen Gesellschaft in Würzburg.* 1875. — In-4°.

BECKER (L.). — *Der Bauerntabak* (Nicotiana rustica, L.) : *eine Pflanze der alten Welt.* Breslau, 1875. — In-8°

PREUDHOMME DE BORRE (A.). — *Note sur les Géotrupides qui se rencontrent en Belgique.* Bruxelles, 1874. — Gr. in-8°.

Séance du 21 janvier 1875.

BERLIN. — *Monatsbericht der K. Pr. Akademie der Wissenschaften.* Septembre et octobre 1874. — In-8°.

BONN. — *Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussi-*

schen Rheinlande und Westphalens. 3e série, 10e année, 1873. — 1 vol. in-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 4e année, nos 2-3, janvier 1875. — In-4°.

BRUXELLES. — *Société Entomologique de Belgique.* Série II, n° 7. *Compte-rendu du 26 décembre 1874.* — In-8°.

COLMAR. — *Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Colmar.* 14e et 15e années, 1873 et 1874. — 1 vol. in-8°.

PARIS. — *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXIX, n° 26, décembre 1874; t. LXXX, n° 1, janvier 1875. — In-4°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXIII, n° 1, janvier 1875. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* T. VII, octobre 1874. — Gr. in-8°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. IV, n° 37, janvier 1875. — Gr. in-8°.

PISE. — *Il Nuovo Cimento.* 2e série, t. XII, novembre-décembre 1874. — In-8°.

ROME. — *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. VII, août 1874. — In-4°.

Séance du 4 février 1875.

AMIENS. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel.* N° 32, 1er février 1874, 3e année. — In-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 4e année, nos 4-5, janvier 1875. — In-4°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 14e année, octobre-novembre 1874. — In-8°.

BRUXELLES. — *Société Entomologique de Belgique.* Série II, n° 8. *Compte rendu du 9 janvier 1875.* — In-8°.

COPENHAGUE. — *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger.* Année 1874, n° 2. — In-8°.

LONDRES. — *Proceedings of the London Mathematical Society.* Nos 73, 74; 1874. — In-8°.

PARIS. — *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXX, nos 2-3, janvier 1875. — In-4°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXIII, n° 2, janvier 1875. — In-8°.

TOULOUSE. — *Bulletin de la Société des Sciences physiques et naturelles de Toulouse.* T. I, 1872-1873. — Gr. in-8°.

Battaglini. —*Sulla Geometria proiettiva.* 2e Mémoire. Naples, 1874. — In-4°.

Séance du 18 février 1875.

Angers. — *Mémoires de la Société Académique de Maine-et-Loire.* T. XXIX-XXX, 1874. — In-8°.

Bordeaux. — *Le Bordeaux médical.* 4e année, nos 6-7, février 1875. — In-4°.

Modène. — *Annuario della Società dei Naturalisti in Modena.* 2e série, t. VIII, fasc. 3-4; 1874. — In-8°.

Naples. — *R. Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali, economiche e tecnologiche. Programmi di pubblico concorso per l'anno 1875.* — In-4°.

Paris. — *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXX, nos 4-5, janvier-février 1875. — In-4°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXII, n° 3, 5 février 1875. — In-8°.

Rome. — *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. VII, septembre 1874. — In-4°.

Valenciennes. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et scientifique.* T. XXVII, nos 10-11; 1874. — In-8°.

Hoüel (J.). — *Éléments de la théorie des Quaternions.* Paris (Bordeaux), 1874. — 1 vol. gr. in-8°.

Séance du 4 mars 1875.

Amiens. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel.* 3e année, n° 33, 1er mars 1875. — In-8°.

Berlin. — *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von C. Ohrtmann u. a.* T. IV, 3e fasc., année 1872. — In-8°.

Bordeaux. — *Actes de la Société Linnéenne de Bordeaux.* T. XXIX (IX, 3e série), livr. 1-5; 1873-1874. — Gr. in-8°.

— *Extraits des Comptes rendus des séances de la Société Linnéenne de Bordeaux.* Années 1873-1874. — Gr. in-8°.

— *Le Bordeaux médical.* 4e année, nos 8-9, février 1875. — In-4°.

— *Rentrée solennelle des Facultés de Théologie, de Droit, des Sciences et des Lettres, et de l'École préparatoire de Médecine.* 17 novembre 1874. — Gr. in-8°.

Brest. — *Bulletin de la Société Académique de Brest.* 2e série, t. I, 1873-1874. — In-8°.

Copenhague. — *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger.* Année 1873, n° 1. — In-8°.

FLORENCE. — *Rivista scientifico-industriale*. T. VII, janvier-février 1875. — In-8°.

FRANCFORT-S.-M. — *Abhandlungen herausgegeben von der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft*. T. IX, fasc. 1-2; 1873. — In-4°.

LAUSANNE. — *Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles*. 2e série, t. XIII, n° 73; 1874. — In-8°.

LUND. — *Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Årskrift*. Années 1869-1872, t. VI-IX. — 4 vol. in-4°, en 9 fasc.

— *Lunds Universitets-Biblioteks Accessions-Katalog*. 1873. — In-8°.

MOSCOU. — *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou*. Années 1873, n° 4, et 1874, nos 1-2. — In-8°.

— *Matematitchesky Sbornik*... Recueil mathématique de la Société Mathématique de Moscou. T. VII, fasc. 3; 1875. — Gr. in-8°.

PARIS. — *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. T. LXXX, nos 6-7, février 1875. — In-4°.

— *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris*. T. IX (2e série), 3e fasc., avril-juin 1874. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris*. T. XXIII, n° 4, février 1875. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France*. T. II, n° 5, février 1875. — Gr. in-8°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée*. T. IV, n° 38, février 1875. — Gr. in-8°.

PEST. — *Természettudomanyi Közlöny. Havi Folyóirat közérdekü ismeretek terjesztésére. Kiadja a K. M. Természettudomanyi Társulat.* (Bulletin d'Histoire naturelle. Recueil mensuel pour la diffusion des connaissances usuelles. Publié par la Société Royale Hongroise d'Histoire naturelle). T. V, VI et VII (fasc. 1-2), nos 41-66, 1873 à février 1875. — Gr. in-8°.

PRESBOURG. — *Verhandlungen der Vereins für Natur-und Heilkunde zu Presburg*. 2e série, fasc. 2, année 1871-1872. — In-8°.

ROUEN. — *Société des Amis des Sciences naturelles de Rouen*. 10e année, 1874. — 2 fasc. in-8°.

TOULOUSE. — *Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Toulouse*. 8e année, 1873-1874, fasc. 2-3. — In-8°.

BELLAVITIS (G.). — *Alcune considerazioni sugli effetti dell' attrito e sul modo di calcolarli*. Venezia, 1851. — *Sulla classificazione delle curve del terzo ordine*. Modena, 1851. — *Calcolo dei Quaternioni di W. R. Hamilton, e sua relazione col metodo delle equipollenze*. Modena, 1858. — *Pensieri sopra una lingua universale e su alcuni argomenti analoghi*. Venezia, 1863. — *Sulla Logica. Discorso accademico*. Venezia, 1874. — 5 fasc. gr. in-4°.

Séance du 18 mars 1875.

Batavia. — *Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch Indië, uitgegeven door de Koninklijke Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië.* T. XXXIII (7e série, t. III), 1873. — In-8°.
Berlin. — *Monatsbericht der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften.* Novembre 1874. — In-8°.
Bordeaux. — *Le Bordeaux médical.* 4e année, nos 10-11, mars 1875. — In-4°.
Florence. — *Rivista scientifico-industriale.* 6e année, déc. 1874. — In-8°.
Gand. — *Bulletin de la Fédération des Sociétés d'Horticulture de Belgique.* Année 1873. — Gr. in-8°.
Halle. — *Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften.* 2e série, t. IX, 1874. — In-8°.
Harlem. — *Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.* T. IX, livr. 4-5, 1874. — In-8°.
— *Archives du Musée Teyler.* T. I, fasc. 1, 1866. — In-4°.
Kazan. — *Izviêtiia...* Bulletin et Mémoires de l'Université Impériale de Kazan. 41e année, 1874, fasc. 1-2. — Gr. in-8°.
Nimègue. — *Nederlandsch kruitkundig Archief. Verslagen en Mededeelingen der Nederlandsche Botanische Vereeniging, onder redactie van Dr.* F.-R. Suringer, *Dr.* C.-A.-J.-A. Oudemans, *en Dr.* Th.-A.-J. Abeleven. 2e série, t. I, fasc. 4, 1874. — In-8°.
Paris. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXIII, n° 5, 5 mars 1875. — In-8°.
— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* T. VII, novembre 1874. — Gr. in-8°.
— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXX, nos 8-9, février 1875. — In-4°.
Pest. — *Természettudományi közlöny.* T. VII, n° 67, mars 1875. — Gr. in-8°.
Prague. — *Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag.* 34e année, 1873. — Gr. in-4°.
Rome. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* T. XXVIII, 1re séance, 20 décembre 1874. — In-4°.
Saint-Pétersbourg. — *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg.* T. XIX, nos 4-5; t. XX, n° 1, 1874. — Gr. in-4°.
Versailles. — *Mémoires de la Société des Sciences naturelles et médicales de Seine-et-Oise.* T. XI, 1875. — In-8°.

Battaglini (G.). — *Nota intorno ad una superficie di 8° ordine.* Rome, 1875. — In-4°.

Séance du 8 avril 1875.

Amiens. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel*, n° 34; 3e année, 1er avril 1875. — In-8°.

Berlin. — *Monatsbericht der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften.* Décembre 1874. — In-8°.

Bordeaux. — *Le Bordeaux médical.* 4e année, nos 12 et 14, mars-avril 1875. — In-4°.

Bruxelles. — *Annales de la Société Entomologique de Belgique.* T. XVII, 1874. — Gr. in-8°.

Leipzig. — *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft.* IXe année, fasc. 3-4, 1874. — In-8°.

Paris. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXIII, nos 6-7, mars-avril 1875. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* T. VI, table des matières, 1874. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXX, nos 10-11, mars 1875. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. IV, n° 39, mars 1875. — Gr. in-8°.

Pise. — *Annali delle Università Toscane.* T. XII et XIII, 1872-1873. — 2 vol. in-4°.

Rome. — *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. VII, octobre 1874. — In-4°.

Saint-Pétersbourg. — *Troudy...* Travaux du Jardin Impérial de Botanique de Saint-Pétersbourg. T. III, fasc. 1, 1874. — Gr. in-8°.

Valenciennes. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique.* T. XXVII, n° 12, 1874. — In-8°.

Delfortrie. — *Note supplémentaire sur l'affaissement des côtes de Gascogne. Rapport des Commissions réunies de la Société Linnéenne et de la Société de Géographie de Bordeaux sur l'empiètement de la mer sur la plage d'Arcachon.* Bordeaux, 1875. — Gr. in-8°.

Diorio (V.). — *Intorno alla vita ed ai lavori di Monsignore* D. Barnaba Tortolini. Rome, 1875. — In-4°.

Müller (F.). — *Studien über Mac Laurin's geometrische Darstellung elliptischer Integrale.* Berlin, 1875. — In-4°.

Séance du 22 avril 1875.

Alger. — *Bulletin de la Société Algérienne de Climatologie.* 11e année, 1874, n° 8. — In-8°.

Berlin. — *Register der Monatsberichte der Königl. preuss. Akademie der Wissenschaften, vom Jahre 1859 bis 1873.* — In-8°.

Florence. — *Rivista scientificò-industriale.* VIIIe année, mars 1875. — In-8°.

Lisbonne (Envois de l'*Académie Royale des Sciences*). — *Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Classe de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes. Nova Serie.* T. IV, 1re et 2e partie, 1867-1870. — In-4°.

— *Jornal de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes, publicado sob os auspicios da Academia Real das Sciencias de Lisboa.* T. IV, 1872-1873. — In-8°.

— Lapa (J.-I.-F.) : *Technologia rural.* Part. I-II, 1874-1871. — 2 vol. in-8°.

— Pina Vidal (A.-A. de) : *Curso de Meteorologia.* 1869. — 1 vol. in-8°.

— Pina Vidal (A.-A. de) : *Tratado elementar de Optica.* 1874. — 1 vol. in-8°.

— Ribeiro (J.-S.) : *Historia dos estabelecimentos scientificos, litterarios e artisticos de Portugal nos successivos reinados da Monarchia.* 1871-1874. — 4 vol. in-8°.

Liverpool. — *Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Liverpool.* N° XXVIII, 1873-1874. — 1 vol. in-8°.

Londres. — *Proceedings of the London Mathematical Society.* Nos 75-76. — In-8°.

Paris. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXIII, n° 8, avril 1875. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* T. VII, décembre 1874. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXX, nos 12-13, mars-avril 1875. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. IV, n° 40, av. 1875. — Gr. in-8°.

Pest. — *Természettudományi Közlöny.* T. VII, n° 68, avril 1875. — Gr. in-8°.

Rome. — *Atti della Reale Accademia dei Lincei.* T. XXVI, séances 3-8, 1874. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. VII, novembre 1874. — In-4°.

VIENNE. — *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe.* T. LXIII, fasc. 3-5; t. LXIX, fasc. 1-3; octobre 1873 à mars 1874. — Gr. in-8°.

— G. WEX : *Ueber die Wasserabnahme in den Quellen, Flüssen und Strömen bei gleichzeitiger Steigerung der Hochwässer in den Culturländern.* Wien, 1873. — Gr. in-4°.

ZURICH. — *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich.* XVIII° année, 1873. — In-8°.

Séance du 13 mai 1875.

AMIENS. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel.* N° 35, mai 1875. — In-8°.

AMSTERDAM. — *Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde.* 2° série, t. VIII, 1874. — In-8°.

BAGNÈRES-DE-BIGORRE. — *Bulletin de la Société Ramond.* 2° série, octobre 1872. — Gr. in-8°.

BERLIN. — *Monatsberichte der K. Pr. Akademie der Wissenschaften.* Janvier-février 1875. — In-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 4° année, n°s 13, 15-19, mars-mai 1875. — In-4°.

BRÜNN. — *Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn.* T. XII, 1873. - Gr. in-8°.

BRUXELLES. — *Société Entomologique de Belgique.* II° série, n° 11. Compte rendu de l'Assemblée mensuelle du 3 avril 1875. — Gr in-8°.

CHRISTIANIA (Envois de l'Université Royale). — SARS (G.-O.) : *Beskrivelse af de paa Fregatten Josephines Expedition fundne Cumaceer.* Stockholm, 1872. — in-4°.

— SEXE (S.-A.) : *Jættegryder og gamle Strandlinier i fast Klippe,* Christiania, 1874. — In-4°.

— SIEBKE (H.) : *Enumeratio insectorum Norvegiorum. Fasciculus I, Catalogum Hemipterorum et Orthopterorum continens.* Christiania, 1874. — In-8°.

GŒTTINGUE. — *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts Universität.* Année 1874. — 1 vol. in-12.

— *Göttingische gelehrte Anzeigen.* Année 1874. — 2 vol. in-12.

LUXEMBOURG. — *Publications de l'Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg. Section des Sciences naturelles et mathématiques.* T. XIV, 1874. — In-8°.

— *Observations météorologiques faites à Luxembourg, par* F. REUTER. 2e volume, 1874. — In-8°.

PARIS. — *Annuaire du Club Alpin français.* 1re année, 1874. — 1 vol. in-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXIII, n° 9, mai 1875. — In-8°.

— *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris.* 2e série, t. IX, 4e fasc.; t. X, 1er fasc.; 1874-1875. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXX, nos 14-16, avril 1875. — In-8°.

ROME. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* T. XXVII, 2e séance, janvier 1875. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. VII, décembre 1874. — In-4°.

TURIN. — *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.* T. VIII, 1872-1873. — Gr. in-8°.

VALENCIENNES. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique.* T. XXVIII, nos 1-2, 1875. — In-8°.

VENISE. — *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.* 4e série; t. II, fasc. 7-10; t. III; 1872-1874. — In-8°.

DELPRAT (H.). — *Recherches sur la distillation des vins et les appareils distillatoires.* Bordeaux, 1874. — Gr. in-8°.

HOÜEL (J.). — *Du rôle de l'expérience dans les Sciences exactes.* Prague, 1875. — In-8°.

JEANNEL (J.). — *Note au sujet des expériences entreprises au Jardin du Luxembourg sous la direction de M. Rivière, à l'effet de reconnaître les effets de l'engrais chimique horticole pendant l'année 1874.* Paris, 1875. — In-8°.

— *Étude sur une formule de contre-poison officinal multiple.* Paris, 1875. — In-8°.

— *Nouvelles études sur la prostitution en Angleterre, à l'occasion des publications de l'Association nationale des Dames anglaises pour l'abrogation des lois sur les maladies contagieuses.* Paris, 1875. — In-8°.

Séance du 27 mai 1875.

BERLIN. — *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von C. Ohrtmann u. a.* T. V, année 1873, fasc. 1. — In-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 4e année, nos 20-21, mai 1875. — In-4°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 15e année, février 1875. — In-8°.

BRUXELLES. — *Société Entomologique de Belgique.* Série II, n°s 10 et 12. *Compte rendu de l'Assemblée mensuelle du 6 mars et du 1er mai 1875.* — In-8°.

CAMBRIDGE (Mass.). — *Annual Report of the Trustees of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College.* Années 1862-1867, 1869, 1871-1872. — In-8°.

— *Report of the Committee of the Overseers of Harvard College appointed to view the Lawrence Scientific School during the Year 1860.* Cambridge, 1873. — In-8°.

— *Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College.* T. I (n°s 1, 2, 4, 5, 8; 1863-69); t. II (n°s 2-5; 1870-71); t. III (n°s 1-10; 1872-73). — In-8°.

— *An Account of the Organization and Progress of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College.* 1873. — In-8°.

LEIPZIG. — *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft.* X^e^ année, 1er fasc., 1875. — In-8°.

LONDRES. — *Proceedings of the London Mathematical Society.* N°s 77, 78. — In-8°.

PARIS. — *Association Française pour l'avancement des Sciences. Documents et informations diverses,* n° 10. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXIII, n° 10, 20 mai 1875. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* T. VIII, janvier et février 1875. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXX, n° 17, 3 mai 1875. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. IV, mai 1875. — Gr. in-8°.

GÜNTHER (S.), trad. par A. SPARAGNA. — *Paragone di due metodi per la determinazione approssimativa di quantità irrazionali.* Rome, 1874. — In-4°. (Envoi de D. B. BONCOMPAGNI).

JORDAN (Al.). — *Remarques sur le fait de l'existence en société, à l'état sauvage, des espèces végétales affines, et sur d'autres faits relatifs à la question de l'espèce.* Lyon, 1873. — In-8°. (Auteur.)

WEYR (Em.) et WEYR (Ed.). — *Základové...* Éléments de Géométrie supérieure. 2e *Partie.* Théorie des courbes du second degré. Prague, 1874. — In-8°. (Auteurs).

Séance du 10 juin 1875.

ALAIS. — *Société scientifique et littéraire.* Année 1874, 1er bulletin. — Gr. in-8°.

Amiens. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel,* n° 36; 1er juin 1875, 3e année. — In-8°.

Bordeaux. — *Le Bordeaux médical.* 4e année, nos 22-23, mai-juin 1875. — In-4°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 14e année, décembre 1874; 15e année, janvier et mars 1875. — In-8°.

Florence. — *Rivista scientifico-industriale.* VIIe année, avril 1875. — In-8°.

Paris. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXIII, n° 11, 5 juin 1875. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France.* T. III, n° 2, juin 1875. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus des séances et Mémoires de la Société de Biologie.* 5e série, t. I-III, 1870-1873. — Gr. In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXX, nos 18-20, mai 1875. — In-4°.

Rome. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* T. XXVIII, 3e séance, 21 février 1875. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. VIII, janvier 1875. — In-4°.

Toulouse. — *Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Toulouse.* 8e année, 4e fasc.; 9e année, 1er fasc.; 1874-1875. — In-8°.

Valenciennes. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique.* T. XXVIII, n° 3, mars 1875. — In-8°.

Delmas (P.). — *Des paraplégies hyperémiques et ischémiques, traitées par l'Hydrothérapie.* Paris, 1875. — In-8°.

Séance du 24 juin 1875.

Berlin. — *Monatsbericht der Königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Mars 1875. — In-8°.

Besançon. — *Mémoires de la Société d'Émulation du Doubs.* 4e série, t. V, 1869. — In-8°.

Bordeaux. — *Le Bordeaux médical.* 4e année, n° 24, juin 1875. — In-4°.

Bruxelles. — *Société Entomologique de Belgique.* Série II, nos 9 et 13. *Comptes rendus de l'Assemblée mensuelle* du 6 février et du 5 juin 1875. — In-8°.

Florence. — *Rivista scientifico-industriale.* VIIe année, mai 1875. — In-8°.

Grenoble. — *Bulletin de la Société de Statistique, des Sciences*

naturelles et des Arts industriels du département de l'Isère. 3e série, t. IV, 1875. — Gr. in-8°.

Helsingfors (envois de la Société des Sciences de Finlande). — *Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk.* Fasc. XVIII-XIX, XXI-XXIII, 1871-1873. — In-8°.

— *Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar.* T. XIV-XVI, 1871-1874. — In-8°.

— *Observations faites à l'Observatoire magnétique et météorologique de Helsingfors.* T. V, 1873. — In-4°.

Paris. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXIII, n° 12, 20 juin 1875. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* T. VIII, mars 1875. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXVIII, 1874 (1er semestre), *Tables;* T. LXXX, nos 21-23, mai-juin 1875. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. IV, n° 42, juin 1875. — Gr. in-8°.

Pest (Envois de l'Académie Hongroise des Sciences). — *Mathematikai és természettudományi Közlemények...* Communications de Mathématiques et d'Histoire naturelle. Publiées par le secrétaire général de l'Académie des Sciences de Hongrie *J. Szabó.* T. VII-IX, 1869-1871. — In-8°.

— *Értekezések a természettudományok osztály köréből...* Comptes rendus de la Section des Sciences naturelles de l'Académie des Sciences de Hongrie. Rédigés par les secrétaires de la section *J. Greguss* et *J. Szabó.* T. I-V, VI (nos 1-2), 1867-1875. — In-8°.

— *Értekezések a mathematikai osztály köréből...* Comptes rendus de la Section des Sciences mathématiques de l'Académie des Sciences de Hongrie. Publiés par les secrétaires de la section *Col. Szily* et *J. Szabó.* T. I-III, 1867-1874. — In-8°.

— *Légtüneti észleletek...* Observations météorologiques. Publiées par la Commission mathématico-physique de l'Académie des Sciences de Hongrie. Rédigées par *Ét. Krusper.* T. I, 1866. — In-4° oblong.

— *A M. T. Akadémia évkönyvei tizenharmadik kötet.* III. *Darab.*

— *A M. Kir. Egytem vegytani Intézetének leirása...* Description de l'Institut Chimique de l'Université Royale de Hongrie. 1862. In-4°.

— *Icones selectæ Hymenomycetum Hungariæ. Cura Caroli Kalchbrenner Academiæ membri.* Fasc. I-II, 1873-1874. — In-fol.

PEST. — *Természettudományi Közlöny*. T. VII, n° 70, juin 1875. — Gr. in-8°.

— (Envoi de M. SCHMIDT). *Nouveau Dictionnaire français-hongrois et hongrois français, d'après les meilleurs ouvrages publiés jusqu'à ce jour, et spécialement d'après le Dictionnaire français de Molé.* 3e édition, 1865. — 2 vol. in-12.

ROME. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* T. VIII et IX, 1854-1856 (Réimpr. de 1874). — In-4°.

— (Envoi de D. B. BONCOMPAGNI). *Le problème des Tautochrones. Essai historique, par* C. OHRTMANN, traduit par Ch. DUSSAUSOY. Rome, 1875. — In-8°.

Séance du 8 juillet 1875.

ALGER. — *Bulletin de la Société des Sciences physiques, naturelles et climatologiques d'Alger.* 12e année, 1875, 1er trimestre. — In-8°.

AMIENS. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel.* 3e année, n° 37, 1er juillet 1875. — In-8°.

— *Société Médicale d'Amiens. Bulletin des travaux.* Années 1869-1872, 9e-12e année. Amiens, 1873. — In-8°.

BERLIN. — *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von C. Ohrtmann u. a.* T. V, fasc. 2, année 1873. — In-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 4e année, n° 27, 4 juillet 1875. — In-4°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 15e année, avril 1875. — In-8°.

COPENHAGUE. — *Oversigt over det kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger.* Année 1874, n° 3. — In-8°.

FRIBOURG-EN-BRISGAU. — *Berichte über die Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. Br.* T. I-IV, V (fasc. 1, 3-4), VI (fasc. 2-3); 1858-1873. — In-8°.

LONDRES. — *Proceedings of the London Mathematical Society.* Nos 79, 80; 1875. — In-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXIV, n° 1, juillet 1875. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXX, nos 24-25, juin 1875. — In-4°.

ROME. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* T. XXVIII, 4e séance, 21 mars 1875. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. VIII, février 1875. — In-4°.

ROUEN. — *Société des Amis des Sciences naturelles de Rouen.* 10e année, 1874, 2e semestre. — In-8°.

VIENNE. — *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.* T. LXIX, fasc. 4-5; t. LXX, fasc. 1-2; avril-juillet 1874. — In-8°.

MENSINI (Jacopo). — *La Spia sismica. Nuovo apparecchio avvisatore dei terremoti.* Firenze, 1875. — In-8°.

Séance du 22 juillet 1875.

ALGER. — *Bulletin de la Société des Sciences physiques, naturelles et climatologiques d'Alger.* 12e année, 2e trimestre, 1875. — In-8°.

BERLIN. — *Repertorium der Naturwissenschaften. Monatliche Uebersicht der neuesten Arbeiten auf dem Gebiete der Naturwissenschaften. Herausgegeben von der Redaction des Naturforscher.* 1re année, nos 1-6, 1875. — In-4°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 4e année, nos 25-26, 28-30, juin-juillet 1875. — In-4°.

— *Mémoires et Bulletins de la Société de Médecine et de Chirurgie de Bordeaux.* 3e et 4e fasc., 1874. — Gr. in-8°.

BRUXELLES. — *Société Entomologique de Belgique.* Série II, n° 14. *Compte rendu de l'Assemblée mensuelle du 3 juillet 1875.* — In-8°.

LIÉGE. — *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége.* 2e série, t. IV, 1874. — Gr. in-8°.

LILLE. — *Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille.* Année 1872, IIIe série, t. X. — In-8°.

MOSCOU. — *Bulletin de la Société Impériale des naturalistes de Moscou.* Année 1874, n° 3. — In-8°.

NAPLES. — *Atti del Reale Istituto d'Incoraggiamento alle scienze naturali, economiche e tecniche di Napoli.* 2e série, t. XI, 1875. — Gr. in-4°.

PARIS. — *Annales du Conservatoire des Arts et Métiers, publiées par les professeurs.* T. VI-IX, X (fasc. 1-2), 1865-1874. — In-8°.

— *Association Française pour l'avancement des Sciences. Documents et informations diverses.* N° 11. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXIV, n° 2, 20 juillet 1875. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* — T. VII, 1874 (2e semestre), table des matières; t. VIII, avril 1875. — Gr. in-8°.

— *Club Alpin Français. Liste des membres au 1er juillet 1875.* — *Carte topographique du massif du Mont Pelvoux.* Feuille in-plano.

— Schrader (Fr.) : *Carte du Mont-Perdu et de la Région calcaire des Pyrénées centrales.* — Feuille in-plano.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXI, nos 1-2, juillet 1875. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. IV, n° 43, juillet 1875. — Gr. in-8°.

Pest. — *Természettudományi Közlöny.* T. VII, nos 69 et 71, mai et juillet 1875. — Gr. in-8°.

Armaingaud. — *La ville de Bordeaux est-elle menacée d'une invasion de la fièvre jaune?* Rapport présenté à la *Société de Médecine et de Chirurgie de Bordeaux.* 1875. — In-8°.

Lagrange (*Œuvres de*). T. VI, 1873. — 1 vol. in-4°.

Preudhomme de Borre (A.). — *Note sur des empreintes d'insectes fossiles découvertes dans les schistes houillers des environs de Mons.* Bruxelles, 1875. — Gr. in-8°.

BULLETIN

DES

PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES

REÇUES PAR LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

pendant l'année 1875-1876.

Séance du 18 novembre 1875.

ALEXANDRIE. — *Bulletin de l'Institut Égyptien.* Année 1874-1875, n° 13. — In-8°.

ALGER. — *Bulletin de la Société des Sciences physiques, naturelles et climatologiques d'Alger.* 12e année, 1875, 3e trimestre. — In-8°.

AMIENS. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel.* Nos 38-41 ; août-novembre 1875; 3e année. — In-8°.

BERLIN. — *Mathematische Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Année 1874. — In-4°.

— *Monatsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Avril et mai 1875. — In-8°.

— *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von* C. OHRTMANN *m. a.* T. V, année 1893, 3e fasc. — In-8°.

— *Repertorium der Naturwissenschaften. Herausgegeben von der Redaction des* Naturforscher. Nos 7-10, juillet-octobre 1875. — In-4°.

BOLOGNE. — *Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna.* 3e série, t. III (fasc. 3-4), t. IV; 1872-1873. — In-4°.

— *Rendiconto delle sessioni dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna.* Année 1873-1874. — In-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 4e année, nos 31-46, août-novembre 1875. — In-4°.

— *Mémoires et Bulletins de la Société de Médecine et de Chirurgie de Bordeaux.* Année 1875, fasc. 1-2. — Gr. in-8°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 15e année, mai-juin 1875. — In-8°.

BOSTON. — *Memoirs of the Boston Society of Natural History.* T. II, 1re Partie, n° 1; 2e Partie, n° 4; 3e Partie, nos 1-2; 1871-1873. — In-4°.

— *Proceedings of the Boston Society of Natural History.* T. IX, p. 321 à fin ; t. XV, fasc. 3-4 ; t. XVI, fasc. 2. — In-8°.

— *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences.* T. I (2e série) (IX de la collect. compl.) ; 1873-1874. — In-8°.

BRUXELLES. — *Annales de la Société Entomologique de Belgique.* T. XVI, 1873. — Gr. in-8°.

— *Société Entomologique de Belgique.* Série II, nos 15-17. *Comptes rendus des Assemblées mensuelles,* août-octobre 1875. — Gr. in-8°.

BUDAPEST. — *Természettudomanyi Közlöny.* T. VII, nos 72-75 ; 1875. — Gr. in-8°.

CAEN. — *Mémoires de l'Académie Nationale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen.* 1875. — In-8°.

COPENHAGUE. — *Oversigt over det Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger.* Année 1875, n° 1. — In-8°.

DANZIG. — *Schriften der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig,* 2e série, t. III, fasc. 3, 1874. — Gr. in-8°.

GENÈVE. — *Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève.* T. XXIV, 1re partie, 1874-1875. — In-4°.

GLASGOW. — *Proceedings of the Philosophical Society of Glasgow.* T. IX, n° 2, 1874-1875. — In-8°.

— *Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland.* T. XVIII, 1875. — In-8°.

HALLE. — *Abhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle.* T. XIII, fasc. 2. — In-4°.

— *Bericht über die Sitzungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle.* Année 1874. — In-4°.

— *Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften. Redigirt von Dr.* C. G. GIEBEL. 2e série, t. X, juillet-décembre 1875. — In-8°.

HARLEM. — *Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.* T. X, nos 1-3, 1875. — In-8°.

JEFFERSON CITY. — *Report of the Geological Survey of the State of Missouri, including field vork of 1873-1874.* GARLAND C. BROADHEAD, *State Geologist.* 1874. — 1 vol. in-8° et atlas gr. in-4°.

KAZAN. — *Izvietiya.....* Nouvelles et Mémoires scientifiques de l'Université Impériale de Kazan. 41e année, 1874, nos 3-6. — Gr. in-8°.

LAUSANNE. — *Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles.* 2e série, t. XIII, n° 74. — In-8°.

LEIPZIG. — *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft.* Xe année, 1875, nos 2-3. — In-8°.

LIÉGE. — *Annales de la Société Géologique de Belgique.* T. I, 1874. — Gr. in-8°.

— *Correspondance botanique. Liste des Jardins, des Chaires et des Musées botaniques du Monde.* 3e édition, 1875. — Gr. in-8°.

LONDRES. — *Proceedings of the London Mathematical Society.* Nos 81-84. — In-8°.

MILAN. — *Memorie del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Classe di Lettere e Scienze matematiche e naturali.* T. XII (3e série, t. III), fasc. 6; t. XIII (3e série, t. IV), fasc. 1. *Classe di Lettere e Scienze morali e politiche.* T. XII (3e série, t. III), fasc, 4; t. XIII (3e série, t. IV), fasc. 1. 1873-1874. — Gr. in-4°.

— *Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Rendiconti.* 2e série, t. V, fasc. 19-20; t. VI; t. VII, fasc. 1-14. 1872-1874. — In-8°.

— *Atti della Società Italiana di Scienze naturali.* T. XV, fasc. 3-5; t. XVI; t. XVII, fasc. 1-3. 1872-1875. — In-8°.

MOSCOU. — *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou.* Année 1874, n° 4 (t. XLVIII, 2e partie). — In-8°.

MUNICH. — *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München.* 1874, fasc. III; 1875, fasc. I. — In-8°.

— *Ueber den Einfluss des Freiherrn* JUSTUS VON LIEBIG *auf die Entwickelung der reinem Chemie. Eine Denkschrift von Dr.* EMIL ERLENMEYER. 1874. — In-4°.

— *Serjania, Sapindacearum genus monographice descriptum. Monographie der Sapindaceen-Gattung Serjania; von* L. RADIKOFER. *Mit der Aug. Pyr. De Candolle'schen gekrönte Abhandlung.* 1875. — In-4°.

NEUCHATEL. — *Bulletin de la Société des Sciences naturelles de Neuchâtel.* T. X, 2e cahier; 1875. — In-8°.

ODESSA, *Zapiski*..... Mémoires de la Société des Naturalistes de la Nouvelle-Russie. T. III, fasc. I, 1875. — In-8°.

PARIS. — *Association Française pour l'avancement des Sciences. Compte rendu de la 3e session.* Lille, 1874. — 1 vol. gr. in-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXIV, nos 3-7, août-octobre 1875. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France.* T. III, nos 3-5, juillet-septembre 1875. — Gr. in-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* T. VIII, mai-juin; t. IX, juillet-août; 1875. — Gr. in-8°.

— *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris.* T. X (2e série), fasc. 2, mars-mai 1875. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXI, nos 3-17, juillet-octobre 1875. — *Tables*

des Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. 2e semestre 1874, t. LXXIX. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. IV, nos 44-46, août-octobre 1875. — Gr. in-18°.

PHILADELPHIE. — *Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia.* 1874. — 1 vol. in-8°.

— *Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia for promoting useful Knowledge.* T. XIV, nos 92-93; 1874. — In-8°.

PISE. — *Atti della Società Toscana di Scienze naturali residente in Pisa.* T. I, fasc. 1-2; 1875. — Gr. in-8°.

PRAGUE. — *Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der K. K. Sternwarte zu Prag im Jahre 1874.* 35e année. — In-4°.

LA ROCHELLE. — *Annales de l'Académie de La Rochelle. Sections réunies. Sciences naturelles, Belles-Lettres.* Année 1874. — In-8°.

ROME. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* T. XXVIII 5e séance, 25 avril 1875. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. VII, cartons pour les nos de juillet et d'août (p. 337-408); Table des matières du t. VII. — T. VIII, mars-juin 1875. — In-4°.

SAINT-LOUIS. — *The Transactions of the Academy of Science of Saint-Louis.* T. III, n° 2; 1875. — In-8°.

SAINT-PÉTERSBOURG. — *Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg.* T. XX, n° 2; 1874. — Gr. in-4°

STUTTGART. — *Württembergische naturwissenschaftliche Jahrshefte.* 31e année, fasc. 1-3. — In-8°.

TOULOUSE. — *Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Toulouse.* 9e année, 1874-1875, 2e fasc. — In-8°.

TURIN. — *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.* T. X, 1874-75. — Gr. in-8°.

— *Bollettino meteorologico ed astronomico del Regio Osservatorio della Regia Università di Torino.* 8e année, 1873. — In-4°, oblong.

VALENCIENNES. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique,* T. XXVIII, nos 4-6; 1875. — In-8°.

VENISE. — *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.* 5e série, t. I, fasc. 1-6; 1874-1875. — In-8°.

WASHINGTON. — *Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution.* Année 1873. — 1 vol. in-8°.

— *Reports of the Commissioner of Agriculture for the Years 1872 and 1873.* — 2 vol. in-8°.

— *Monthly Reports of the Departement of Agriculture for the Years 1873 and 1874.* — 2 vol. in-8°.

— *Annual Report of the United States Geological and Geographical Survey of the Territories, embracing Colorado. By* F. V. Hayden, *U. S. Geologist.* 1874. — 1 vol. in-8°.

— *U. S. Geolog. Survey. Miscell. Publ. n° 3. — Birds of the Northwest : a Handbook of the Ornithology of the Region drained by the Missouri River and its Tributaries. By* Elliot Coues. — Gr. in-8°.

— *Department of the Interior. Report of the United States Geological Survey of the Territories.* T. VI, 1874. — 1 vol. in-4°.

— *Catalogue of the Publications of the U. S. Geological Survey of the Territories.* 1874. — In-8°.

— *U. S. Geological Survey. Miscellaneous Publications.* N° 1. *List of Elevations, principally in that portion of the U. S. west of the Mississipi River. 3ᵈ Edition,* 1875. — In-8°.

— *The Scientific Education of Mechanics and Artizans. By Prof.* Andrew Peabody. 1873. — In-8°.

Wurzbourg. — *Verhandlungen der Physikal-medicin. Gesellschaft in Würzburg.* 2ᵉ série, t. VIII, fasc. 3-4; 1875. — In-8°.

Abria. — *Étude de double réfraction. Double réflexion intérieure dans les cristaux biréfringents uniaxes.* Paris, 1875. — In-8°.

Battaglini (G.) — *Sulla Quintica binaria.* Rome, 1875. — In-4°.

— *Sulla Geometria projettiva. Memoria* IIIª. Naples, 1875. — In-4°.

Bellavitis (G.). — *Riassunto delle Lezioni di Algebra date dal Comm.* Giusto Bellavitis. Padoue, 1875. — In-8°.

Douaud (C.-S.). — *Expériences sur l'inoculabilité de quelques lésions de la peau.* Bordeaux, 1875. — Gr. in-8°.

Rubini (R.). — *Elementi di Calcolo infinitesimale. Parte seconda : Calcolo integrale. IIª edizione riveduta ed aumentata.* Naples, 1875. — 1 vol. gr. in-8°.

Villemereuil (A.-B. de). — Doudart de la Grée, *capitaine de frégate, chef de l'exploration du Mé-Kong et de l'Indo-Chine, exécutée en 1866-67-68 par ordre et aux frais du Gouvernement français, et la question du Tong-King.* 2ᵉ édition. Paris, 1875. — Gr. in-8°.

Séance du 2 décembre 1875.

Angers. — *Bulletin de la Société industrielle et agricole d'Angers et du département de Maine-et-Loire.* XLVIᵉ année (XVIᵉ de la 3ᵉ série). 1875, 1ᵉʳ trimestre. — In-8°.

Bale. — *Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel.* T. VI, fasc. 2; 1875, 1er trimestre. — In-8°.

Bordeaux. — *Le Bordeaux médical.* IVe année, nos 47-48, novembre 1875. — In-4°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 15e année, juillet 1875. — In-8°.

— *Association française pour l'avancement des Sciences. Groupe régional Girondin. Bulletin du Phylloxera dans la Gironde.* N° 1; 1875. — Gr. in-8°.

Dublin. — *Proceedings of the Royal Irish Academy.* Ire série, t. I, nos 7-9, séances de 1871-74. — In-8°.

— *The Transactions of the Royal Irish Academy.* T. XXIV. *Antiquities,* Part IX, 1874. — T. XXV, *Science,* Parts IV-VIII, 1873-1874. — In-4°.

Édimbourg. — *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Session* 1873-74. — In-8°.

— *Transactions of the Royal Society of Edinburgh.* T. XXVII, 2e partie. Session 1873-1874. — In-4°.

Francfort-s.-M. — *Abhandlungen herausgegeben von der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft.* T. IX, fasc. 3-4; 1874-1875. — In-4°.

— *Bericht über die Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.* 1873-1874. — In-4°.

Heidelberg. — *Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg.* 2e série, t. I, fasc. 2; 1875. — In-8°.

Nancy. — *Mémoire de l'Académie de Stanislas.* 1874, CXXVe année, 4e série, t. VII. — In-8°.

Paris. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXIV, n° 10, 1875. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France.* T. III, n° 6, octobre 1875. — Gr. in-8°.

— *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris.* 2e série, t. IX, fasc. 4, juillet-novembre 1874. — T. X, fasc. 3, mai-juin 1875. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXI, nos 18-20, novembre 1875. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. IV, n° 47, novembre 1875. — Gr. in-8°.

Rome. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* T. XXVIII, 6e séance, mai 1875. — In-4°.

Rouen. — *Bulletin de la Société des Amis des Sciences naturelles de Rouen.* 2e série, 11e année, 1875, 1er semestre. — In-8°.

— *Société industrielle de Rouen. Programme des prix à décerner en décembre 1876.* — Gr. in-8°.

SAINT-PÉTERSBOURG. — *Troudy...* Travaux du Jardin Impérial de Botanique de Saint-Pétersbourg. T. III, fasc. 2; 1875. — Gr. in-8°.

TOULOUSE. — *Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Toulouse.* 9e année, 1874-1875, fasc. 3. — In-8°.

MENSINI (I.). — *La spia ortosismica, nuovo apparecchio avvisatore dei terremoti sussultori.* Florence, 1875. — In-8°.

Séance du 16 décembre 1875.

AMIENS. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel,* n° 42; 4e année, 1er décembre 1875. — In-8°.

BERLIN. — *Monatsbericht der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Juillet et août 1875. — In-8°.

— *Repertorium der Naturwissenschaften.* 1re année, n° 11, novembre 1875. — In-4°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 4e année, n° 49, 5 décembre 1875. — In-4°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 15e année, août 1875. — In-8°.

BRUXELLES. — *Société Entomologique de Belgique.* Série II, n° 18. *Compte rendu de l'Assemblée mensuelle du 6 novembre* 1875. — In-8°.

FLORENCE. — *Rivista scientifico-industriale.* VIIe année, juillet-octobre 1865. — In-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXIV, n° 11, 5 décembre 1875. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXI, nos 21-22, novembre 1875. — In-4°.

Ouvrages offerts par M. BURGUIÈRE, chef d'institution à Bayonne:

BOSSUT (Ch.) — *Traités de calcul différentiel et de calcul intégral.* Paris, an VI. — 2 vol. in-8°.

COURNOT (A.). — *Exposition de la Théorie des Chances et des Probabilités.* Paris, 1843. — 1 vol. in-8°.

EULER (L.) — *Introduction à l'Analyse infinitésimale.* Traduit par J.-B. LABEY. Paris, 1835 (1797). — 2 vol. in-4°.

FRANCŒUR (L.-B.). — *Géodésie, ou Traité de la figure de la Terre et de ses parties.* 2e édition. Paris, 1840. — 1 vol. in-8°.

— *Uranographie, ou Traité élémentaire d'Astronomie, à l'usage des personnes peu versées dans les Mathématiques.* 6e édition, revue par M. FRANCŒUR fils. Paris, 1853. — 1 vol in-8°.

Garnier (J.-G.) — *Analyse algébrique, faisant suite à la première section de l'Algèbre.* 2e édition. Paris, 1814. — 1 vol. in-8°.

Joubert (le P.). — *Sur la Théorie des fonctions elliptiques et son application à la Théorie des nombres.* Paris, 1860. — Broch. in-4°.

Lacroix (S.-F.). — *Essais sur l'enseignement en général, et sur celui des Mathématiques en particulier.* 4e édition. Paris, 1838. — 1 vol. in-8°.

Marie (Max.). — *Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires.* 1858-1862. Paris. — Broch. in-8°.

Poinsot (L.). — *Réflexions sur les principes fondamentaux de la Théorie des nombres.* Paris, 1845. — Broch. in-4°.

Reynaud et Duhamel. — *Problèmes et développements sur diverses parties des Mathématiques.* Paris, 1823. — 1 vol. in-8°.

Ouvrages offerts par M. Hoüel :

Hoüel (J.). — *Sur le développement de la fonction perturbatrice, suivant la forme adoptée par Hansen dans la théorie des petites planètes.* Paris (Prague), 1875. — Broch. in-8°.

Richerand. — *Nouveaux éléments de Physiologie.* 10e édition, revue par M. Bérard aîné. Paris, 1833. — 3 vol. in-8°.

Séance du 30 décembre 1875.

Moscou. — *Matematitcheskii Sbornik*... Journal de Mathématiques de la Société Mathématique de Moscou. T. VII, fasc. 4. — Gr. in-8°.

Paris. — *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* T. IX, septembre et octobre 1875. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXI, nos 23-24, 6 et 13 décembre 1875. — In-4°.

Rome. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* T. XXVIII, 7e séance, 20 juin 1875. — In-4°.

Ouvrages provenant de la bibliothèque de M. Le Besgue, offerts à la Société par M. Hoüel :

Annales de la Société d'Émulation du département des Vosges. T. I, Épinal, 1831-1833. — 1 vol. in-8°.

Baltzer (R.) : *Théorie et applications des déterminants.* Traduit par J. Hoüel. Paris, 1861. — 1 vol. in-8°.

Berger : *Théorie élémentaire des Séries.* 2e édition. Paris (Montpellier), 1859. — Broch. in-8°.

Bertrand (J.) : *Traité d'Algèbre.* 2e édition. Paris, 1855. — 1 vol. in-8°.

Bouché (A.) : *Notice sur un nouveau système de Tables de Logarithmes à cinq décimales*. Angers, 1859. — Broch. in-8°.

Brioschi (F.). — *Théorie des déterminants et leurs principales applications*. Traduit par Éd. Combescure. Paris, 1856. — Gerono et Roguet : *Programme détaillé d'un Cours d'Arithmétique, d'Algèbre et de Géométrie analytique*. 4e édition. Paris, 1856. — Reliés en 1 vol. in-8°.

Briot : *Leçons d'Algèbre, entièrement conformes aux nouveaux programmes de l'enseignement des Lycées*. 1re et 2e parties. Paris, 1853-1855. — 2 vol. in-8° reliés en 1.

Briot et Bouquet : *Leçons de Géométrie analytique*. 3e édition. Paris, 1860. — 1 vol. in-8°.

Carnot : *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*. 2e édition. Paris, 1813. — 1 vol. in-8°.

Carton (J.) : *Vrais principes de la Géométrie euclidienne, et preuves de l'impossibilité de la Géométrie non euclidienne*. Paris, 1870. — 1 vol. gr. in-8°.

Cerquand (J.-F.) : *Études de Mythologie grecque. Ulysse et Circé. Les Sirènes*. Paris, 1873. — 1 vol. gr. in-8°.

Collins (M.) : *On Clairaut's Theorem, and other subjects connected with it*. Liverpool, 1853. — Broch. in-8°.

Cours *de langue allemande, ou Œuvres diverses de Gessner, avec la traduction françoise interlinéaire*. Paris, 1807. — 2 vol. in-8°.

Delaunay (Ch.) : *Traité de Mécanique rationnelle*. Paris, 1856. — 1 vol. in-8°.

Delisle et Gerono : *Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique*. 5e édition. Paris, 1859. 1 vol. in-8°. — Serret (J.-A.) : *Traité de Trigonométrie*. 2e édition. Paris, 1857. 1 vol. in-8°. — Reliés en 1 vol.

— *Dictionnaire classique des langues françoise et allemande, à l'usage des Collèges*. Strasbourg, 1832. — 2 vol. in-8°, reliés en 1.

Duhamel : *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. 2e édition. Paris, 1847. — 2 vol. in-8°, reliés en 1.

— *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique*. Paris, 1845. — 2 vol. in-8°, reliés en 1.

Dupuis (J.) : *Tables de logarithmes pour les nombres et pour les sinus, par J. de Lalande*, etc. 2e tirage, 1857. Paris. — 1 vol. in-12.

Euclide : *Œuvres, en grec, en latin et en français, par* Peyrard. T. II. Paris, 1816. — In-4°.

Hoüel (J.) : *Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire*. Greifswald, 1863. — Broch. in-8°.

IMSCHENETSKY (V.-G.) : *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Trad. par J. HOÜEL. Paris (Greifswald), 1869. — 1 vol. in-8°.

KIRSCH (B.) : *Grammaire pour étudier la langue allemande.* Strasbourg et Bordeaux, 1848. — 1 vol. in-8°.

LACROIX (S.-F.) : *Éléments d'Algèbre, à l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement.* 21e édition, revue, corrigée et annotée par E. PROUHET. Paris, 1854. — 1 vol. in-8°.

— *Complément des Éléments d'Algèbre.* 6e édition. Paris, 1835. — 1 vol. in-8°.

LAURENT (H.) : *Théorie des résidus.* Paris, 1865. — 1 vol. in-8°.

LE BESGUE (V.-A.) : *Introduction à la Théorie des nombres.* Paris, 1862. — 1 vol. gr. in-8°.

LE BESGUE et GENOCCHI (A.) : *Intorno ad un problema indeterminato.* Rome, 1864. — Broch. in-4°.

LEFÉBURE DE FOURCY : *Leçons de Géométrie analytique, comprenant la Trigonométrie rectiligne et sphérique, les lignes et les surfaces des deux premiers ordres.* 3e édition. Paris, 1834. — 1 vol. in-8°.

— *Traité de Géométrie descriptive, précédé d'une Introduction qui renferme la théorie du plan et de la ligne droite dans l'espace.* 2e édition. Paris, 1834. — 2 vol. in-8°.

LEGENDRE (A.-M.) : *Essai sur la Théorie des nombres.* 2e édition. Paris, 1806. Suivi de deux *Suppléments;* 1816-1825. — POINSOT : *Mémoire sur l'application de l'Algèbre à la Théorie des nombres.* Paris, 1819. — Rel. en 1 vol. in-4°.

LEJEUNE-DIRICHLET : *Vorlesungen über Zahlentheorie. Herausgegeben von* R. DEDEKIND. Brunswick, 1863. — 1 vol. in-8°.

LIONNET (E.) : *Algèbre élémentaire, à l'usage des candidats au baccalauréat et aux Écoles du Gouvernement.* Paris, 1854, 1 vol. in-8°. — TERQUEM (O.) : *Exercices de Mathématiques élémentaires. Arithmétique et Algèbre.* Paris, 1842. 1 vol. in-8°. — Rel. en 1 vol.

LIONNET (E.) : *Éléments de Géométrie.* 3e édition. Paris, 1846. — — BLANCHET : *Éléments de Géométrie, par* A.-M. LEGENDRE, *avec additions et modifications par M.* A. BLANCHET. 2e édition, suivie de la 15e édition donnée par A.-M. LEGENDRE. Paris, 1846. — 3 vol. in-8°, rel. en 1.

LIOUVILLE (J.) : *Mémoires extraits du Journal de Mathématiques,* 22 broch. in-4°. — PIUMA (C.-M.) : *Dimostrazione di alcune formole del Sig. Liouville.* Genova, 1866. — 2 broch. in-4°.

MAYER et CHOQUET : *Traité élémentaire d'Algèbre.* 2e édition. Paris, 1836. — 1 vol. in-8°.

MEIDINGER (J.-V.) : *Grammaire pratique de la langue allemande, précédée d'un Traité de prononciation,* par F.-G. EICHHOFF. Paris, 1829. — 1 vol. in-8°.

OZANAM : *La Trigonométrie rectiligne et sphérique, avec les Tables de sinus, tangentes et sécantes pour un rayon de 10 000 000 parties, et les logarithmes des sinus et des tangentes pour un rayon de 10 000 000 000 parties.* Paris, 1765. — 1 vol. in-8°.

PASCAL (Œuvres de). T. IV : *Ouvrages de Mathématiques et de Physique.* Paris, 1819. — 1 vol. in-8°.

PROUHET (E.) : *Notice sur la vie et les travaux d'*OLRY TERQUEM. — *Notice sur la vie et les travaux de* CH. STURM. 1856. — *Études géométriques sur les reptoires. — Notes sur quelques points d'Analyse.* — Paris, 4 broch. in-8°.

RODIER DE LABRUGUIÈRE : *Développement nouveau des fonctions d'une seule variable.* Autographié. — Broch. in-4°.

ROYER (E.) : *Leçons d'Algèbre élémentaire.* Bordeaux, 1865. — 1 vol. in-8°.

SERRET (P.) : *Des méthodes en Géométrie.* Paris, 1855. — 1 vol. in-8°.

STURM (Ch.) : *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique.* Paris, 1861. — 2 vol. in-8°, rel. en 1.

TERQUEM (O.) : *Manuel de Mécanique.* 2e édition. Paris, 1836. — 1 vol. in-18.

TRANSON (A.) : *De l'infini, ou Métaphysique et Géométrie, à l'occasion d'une pseudo-géométrie.* Evreux, 1871. — Broch. in-8°.

Séance du 13 janvier 1876.

AMIENS. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel,* n° 43; 1er janvier 1876, 5e année, t. III. — In-8°.

BERLIN. — *Repertorium der Naturwissenschaften.* 1re année, n° 12, décembre 1875. — In-4°.

BONN. — *Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande und Westfalens.* 32e année (4e série, 2e année), 1875. — In-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 4e année, nos 51-52, décembre 1875. — In-4°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux,* 15e année, septembre 1875. — In-8°.

BUDAPEST. — *Természettudományi közlöny.* T. VII, n° 76, décembre 1875. — In-4°.

LUXEMBOURG. — *Publications de l'Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles.* T. XV, 1875. — In-8°.

PARIS. — *Association Française pour l'avancement des Sciences. Documents et informations diverses.* N° 12. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXIV, n° 12, décembre 1875; t. XXV, n° 1, janvier 1876. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXX, Table des Matières; t. LXXXI, n°s 25-26, décembre 1875. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. IV, n° 48, décembre 1875.

BELLAVITIS (G.). — *Rivista di Giornali.* T. X, XI, XII, 1870-1875. Venise. — In-8°.

Séance du 27 janvier 1876.

ANGERS. — *Bulletin de la Société industrielle (et agricole) d'Angers et du département de Maine-et-Loire.* Année XL-XLV (x-xv, 3e série), 1869-1874. — 12 fasc. in-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 5e année, n°s 1-4, janvier 1876. — In-4°.

BRUXELLES. — *Société Entomologique de Belgique.* Série II, n°s 19-20. *Compte rendu des Assemblées mensuelle et générale des 4 et 26 décembre 1875.* — In-8°.

FLORENCE. — *Rivista scientifico-industriale.* VIIe année, décembre 1875. — In-8°.

MOSCOU. — *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou.* T. XLIX, 1re partie, année 1875, n° 1. — In-8°.

NAPLES. — *Rendiconte dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche. (Sezione della Società Reale di Napoli).* Années XIII et XIV, 1874-1875. — 2 vol. in-4°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* Table générale des tomes XXIII et XXIV, 1875. — T. XXV, n° 2, janvier 1876. — In-8°.

ROME. — *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche et fisiche.* — T. VIII, juillet 1875. — In-4°.

Séance du 10 février 1876.

AMIENS. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel,* n° 44, 1er février 1876; 5e année, t. III. — In-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 5e année, n°s 5-6, février 1876. — In-4°.

BRESLAU. — *52. Jahres-Bericht des Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur.* 1874. — 1 vol. gr. in-8°.

— *Fest-Gruss des Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur an die 47. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte.* Breslau, 18 septembre 1874. — Gr. in-8°.

BRUXELLES. — *Société Entomologique de Belgique.* Série II, n° 21. *Compte rendu de l'Assemblée mensuelle du 8 janvier 1876.* — In-8°.

FLORENCE. — *Rivista scientifico-industriale.* 7e année, juin et novembre 1875. — In-8°.

HALLE. — *Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften. Redigirt von Dr.* C. G. GIEBEL *zu Halle.* 2e série, t. XI, 1875. — 1 vol. in-8°.

MUNICH. — *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie des Wissenschaften zu München.* 1875, 2e fasc. — In-8°.

ODESSA. — *Zapiski...* Mémoires de la Société des Naturalistes de la Nouvelle-Russie. T. III, fasc. 2, 1875. — Gr. in-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXV, n° 3, 5 février 1876. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXII, nos 1-4, janvier 1876. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. V, n° 49, janvier 1876. — Gr. in-8°.

ROME. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* XXIXe année, 1re séance, 19 décembre 1875. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. VIII, août 1875. — In-4°.

TOULOUSE. — *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres.* 7e série, t. VII, 1875. — Gr. in-8°.

VIENNE. — *Schriften des Vereines zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse zu Wien.* T. XV, 1875. — In-12.

WASHINGTON. — *War Department. Surgeon-General's Office. May 1, 1875. Circular n° 8. A Report on the Hygiene of the U. S. Army, with description of military Posts.* — 1 vol. in-4°.

LEONELLI. — *Supplément logarithmique. 2e édition. Précédée d'une Notice par* J. HOÜEL. Bordeaux, 1876. — 1 vol. in-8°. (Offert par M. Hoüel.)

Revue philosophique de la France et de l'Étranger. 1re année. N° 2, février 1876. Paris. — Gr. in-8°. (Offert par M. Tannery.)

Séance du 21 février 1876.

BERLIN. — *Monatsbericht der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Novembre 1875. — In-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 5e année, nos 7-8, février 1876. — In-4°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 15e année, novembre et décembre 1875; 16e année, janvier 1876. — In-8°.

BUDAPEST. — *A M. T. Akademia évkönyvei.* (Annales de l'Académie Hongroise des Sciences.) T. XI, fasc. 7. *Az emberi koponyaisme.* (Craniologie humaine.) 1875. — In-4°.

— *Értekezések a természet tudományok köréböl.* T. VI, fasc. 2-9; 1875. — In-8°.

— *Értekezéset a mathematikai tudományok köréböl.* T. III, fasc. 8; t. IV, fasc. 1-3; 1874-1875. — In-8°.

LEIPZIG. — *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft.* XIe année, fasc. 1; 1876. — In-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXV, février 1876, n° 4. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* T. VIII, Table des matières; t. IX, novembre 1875. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXII, nos 5-6, janvier, février 1876. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. V, n° 50, février 1876. — Gr. in-8°.

PISE. — *Il Nuovo Cimento.* 2e série. T. XIII-XIV, 1875. — In-8°.

UPSALA. — *Nova Acta Regiæ Societatis scientiarum Upsaliensis.* 3e série, t. IX, fasc. 1 et 2; 1874-1875. — In-4°.

— *Bulletin météorologique mensuel de l'Observatoire de l'Université d'Upsal.* T. V, nos 7-13, juin-décembre 1873; t. VI, 1874. — Gr. in-4°.

LAVOISIER. — *Œuvres, publiées par les soins du Ministre de l'Instruction publique.* T. I : *Traité élémentaire de Chimie.* Paris, 1864. — 1 vol. in-4°. (Offert par M. Hoüel.)

Séance du 9 mars 1876.

AMIENS. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel.* 5e année, n° 45, 1er mars 1876. — In-8°.

AUGSBOURG. — *23. Bericht des Naturhistorischen Vereins in Augsburg.* 1875. — In-8°.

BORDEAUX. — *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 15e année, octobre 1875; 16e année, février 1876. — In-8°.

BRUXELLES. — *Annales de la Société Entomologique de Belgique.* T. XVIII, 1875. — Gr. in-8°.

— *Société Entomologique de Belgique. Série II, n° 22. Compte rendu de l'Assemblée mensuelle du 5 février 1876.* — In-8°.

CANNES. — *Mémoires de la Société des Sciences naturelles et historiques, des Lettres et des Beaux-Arts de Cannes et de l'arrondissement de Grasse.* T. IV, 1874. — Gr. in-8°.

FLORENCE. — *Rivista scientifico-industriale.* VIIe année, janvier 1876. — In-8°.

LONDRES. — *Proceedings of the Royal Society of London.* T. XXII, n°s 151-155; 1874. — T. XXIII, n°s 156-163; 1874-1875. — In-8°.

NAPLES. — *Atti del Reale Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali, economiche e tecnologiche di Napoli.* 2e série, t. XII, 1875. — Gr. in-4°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXV, n° 5, 5 mars 1876. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* T. IX, décembre 1875. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXII, n°s 7-8, 14 et 21 février 1876. — In-4°.

ROME. — *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. VIII, septembre 1875. — In-4°.

Séance du 23 mars 1876.

ANGERS. — *Mémoires de la Société Académique de Maine-et-Loire.* T. XXXI-XXXII, 1875. — 1 vol. in-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 5e année, n°s 9-12, février-mars 1876. — In-4°.

BOSTON. — *Memoirs of the Boston Society of Natural History.* T. II, 3e partie, n°s 3-5 ; 4e partie, n° 1 ; 1874-1875. — In-4°.

— *Proceedings of the Boston Society of Natural History.* T. XXI, fasc. 3-4; t. XVII, fasc. 1-2; janvier-décembre 1874. — In-8°.

— JEFFRIES WYMAN : *Memorial Meeting of the Boston Society of Natural History. October 7, 1874.* — In-8°.

— *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences.* 2e série, t. II (X de la collection complète); mai 1874-mai 1875. — In-8°.

CAMBRIDGE (Mass.). — *Annual Report of the Trusties of the Museum of Comparative Zoölogy, at Harvard College, in Cambridge.* 1874-1875. — In-8°.

LAUSANNE. — *Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles.* 2e série, t. XIV, n° 75; 1876. — In-8°.

LILLE. — *Programme des concours ouverts par la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille, pour l'année 1876.* — In-8°.

LIVERPOOL. — *Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Liverpool.* 64e session, 1874-75, n° XXIX, 1875. — 1 vol. in-8°.

LONDRES. — *The Journal of the Linnean Society.* Botanique, t. XIV, nos 77-80; Zoologie, t. XII, nos 58-59. — In-8°.

— *Linnean Society. Proceedings of the session of 1873-74, and Obituary Notices. — Additions to the Library of the Linnean Society, 1873-1874.* — In-8°.

MOSCOU. — *Matematitcheskiï Sbornik.* T. VIII, fasc. 1, 1876. — Gr. in-8°.

NAPLES. — *R. Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali, economiche e tecnologiche. Programma di pubblico concorso per l'anno 1876.* — Gr. in-4°.

NEWPORT. — *Archives of Science.* T. I, nos 6-7, 1873-1874. — In-8°.

PARIS. — *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris.* T. IX, 2e série, fasc. 6, novembre et décembre 1874; t. X, fasc. 4, juillet-décembre 1875. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXII, nos 9-10, février-mars 1876. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. V, n° 51, mars 1876. — Gr. in-8°.

PHILADELPHIE. — *Proceedings of the American Philosophical Society.* T. XIV, n° 94, janvier-juin 1875. — In-8°.

ROME. — *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche et fisiche.* T. VIII, octobre 1875. — In-4°.

STOCKHOLM. — *Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar.* 2e série, t. IX (fasc. 2), X et XII; 1870-1873. — 3 vol. gr. in-4°.

— *Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar.* T. I et II, 1872-75. — In-8°.

— *Lefnadsteckningar öfver kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens efter år 1854 afledna ledamöter.* T. I, fasc. 3; 1873. — In-8°.

— *Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Forhandlingar* Années 28-31; 1871-1874. — 4 vol. in-8°.

WASHINGTON. — *Annual Reports of the Board of Regents of the Smithsonian Institution, for the Year 1874.* — 1 vol. in-8°.

— *Department of the Interior. Report of the United States Geological Survey of the Territories.* F. V. HAYDEN, *U.-S. Geologist in charge,* T. II, 1875. — In-4°.

— *The Scientific Education of Mechanics and Artizans.* By Prof. ANDREW P. PEABODY. Washington, 1873. — In-8° (double).
— *Drilling in Stone without metal. By* CHARLES RAU. Washington, 1868. — In-8°.
— *Report on the Chemistry of the Earth : By* CHARLES RAU. Washington, 1871. — In-8°.
— *Reports of Explorations in 1873 of the Colorado of the West and its, tributaries by Prof.* J.-W. POWELL. Washington, 1874. — In-8°.
BELLAVITIS (G.). — *Tredicesima rivista di Giornali.* 1re Partie. Venise, 1876. — In 8°.

Séance du 6 avril 1876.

ALAIS. — *Société scientifique et littéraire.* T. VI, 2e Bulletin, 1874. — Gr. in-8°.
AMIENS. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel,* n° 46; 1er avril 1876, 5e année, t. II. — In-8°.
ANGERS. — *Bulletin de la Société industrielle et agricole d'Angers et du département de Maine-et-Loire,* XLVIe année (XVIe de la série), 1875; 2e-4e trimestres. — In-8°.
BERLIN. — *Monatsbericht der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Décembre 1875. — In-8°.
BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 5e année, nos 13-14, mars-avril 1876. — In-4°.
— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 16e année, mars 1876. — In-8°.
BRUXELLES. — *Société Entomologique de Belgique. Série II, n° 23. Compte rendu de l'Assemblée mensuelle du 4 mars 1876.* — In-8°.
PARIS. — *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* T. X, janvier 1876. — Gr. in-8°.
— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXII, nos 11-13, mars 1876. — In-4°.
PISE. — *Atti della Società Toscana di Scienze naturali residente in Pisa* T. II, fasc. 1, 1876. — Gr. in-8°.
ROME. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* T. XXIX, 2e séance, 23 janvier 1876. — In-4°.
SEMUR. — *Bulletin de la Société des Sciences historiques et naturelles de Semur.* 11e année, 1874. — Gr. in-8°.
TOULOUSE. — *Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Toulouse.* 9e année, 1874-1875, feuille 17 à fin. — In-8°.
LESPIAULT (G.). — *Sur les orages du Sud-Ouest de la France en 1872, 1873 et 1874.* Extrait de l'*Atlas météorologique* des années 1872, 1873 et 1874. Paris, 1876. — In-4°.

Séance du 27 avril 1876.

ALGER. — *Bulletin de la Société des Sciences physiques, naturelles et climatologiques d'Alger.* 12e année, 1875, 4e trimestre ; 13e année, 1876, 1er trimestre. — In-8°.

BERLIN. — *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.* T. VI, année 1874, fasc. 1 ; 1876. — In-8°.

— *Monatsbericht der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Janvier 1876. — In-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 5e année, nos 15-17, avril 1876. — In-4°.

BUDAPEST. — *Icones selectæ Hymenomycetum Hungariæ, per* ST. SCHULZER *et* C. KALCHBRENNER *observatorum et delineatorum. Editæ sub auspiciis Academiæ Scientiarum Hungaricæ.* Fasc. III, 1875. — In-fol.

DUBLIN. — *The Journal of the Royal Dublin Society.* T. VII, n° 44, 1875. — In-8°.

EDIMBOURG. — *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh.* Session 1874-1875. — In-8°.

— *Transactions of the Royal Society of Edinburgh.* T. XXVII, 3e partie. Session 1874-1875. — In-4°.

LONDRES. — *Proceedings of the London Mathematical Sooiety.* Nos 85-86. — In-8°.

NAPLES. — *De' lavori accademici del R. Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali, economiche e tecnologiche nell' anno 1875, e cenno biografico del socio* PAOLO TUCCI, *dal Segretario perpetuo* F. DEL GIUDICE. 1876. — In-4°.

NICE. — *Annales de la Société des Lettres, Sciences et Arts des Alpes-Maritimes.* T. III, 1875. — Gr. in-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXV, n° 7, 5 avril 1876. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* T. IX, *Table des matières et noms d'auteurs;* 1875. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXII, nos 14-16, avril 1876. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. V, n° 52, avril 1876. — Gr. in-8°.

PISE. — *Il Nuovo Cimento.* 2e série, t. XV, janv.-févr. 1876. — In-8°.

ROME. — *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. VII, novembre 1875. — In-4°.

VENISE. — *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.* 5e série, t. I, 1874-1875, fasc. 7-9. — In-8°.

Müller (Alfred). — *Ueber das Auftreten der Wanderheuschrecke am Ufer des Bielersee's.* Lucerne, 1876. — In-8°.

Séance du 11 mai 1876.

Bordeaux. — *Le Bordeaux médical.* V[e] année, n[os] 18-19, mai 1876. — In-4°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 16[e] année, avril 1876. — In-8°.

Bruxelles. — *Société Entomologique de Belgique.* Série II, n° 24. *Compte rendu de l'Assemblée mensuelle du 1[er] avril 1876.* — In-8°.

Paris. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXV, n° 9, 5 mai 1876. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* T. X, février 1876. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXII, n° 17, 24 avril 1876. — In-4°.

Rome. — *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. VIII, décembre 1875. — In-4°.

Ross (D[r] A. M.). — *Catalogue to illustrate the Animal Resources of the Dominion of Canada. List of the fur-bearing, useful and injurious Animals, and the native and migrating Birds.* Toronto, Canada. — In-8°.

Séance du 1[er] juin 1876.

Amiens. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel.* N° 47, 1[er] mai 1876, 5[e] année, t. III. — In-8°.

Amsterdam. — *Verslagen en mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde.* 2[e] série, t. IX, 1876. — In-8°.

Berlin. — *Monatsbericht der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Février 1876. — In-8°.

Bordeaux. — *Le Bordeaux médical.* 5[e] année, n[os] 20-21, mai 1876. — In-4°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 16[e] année, mai 1876. — In-8°.

Brême. — *Abhandlungen herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Vereine zu Bremen.* T. IV, fasc. 4; t. V, fasc. 1; 1875-1876. — In-8°.

— *Beilage N° 5 zu den Abhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins zu Bremen. Tabellen über den Flächeninhalt des Bremischen Staats, die Höhenverhältnisse, etc., des Jahres 1874.* — In-4°.

Brest. — *Bulletin de la Société Académique de Brest.* 2[e] série, t. II, 1874-1875. — In-8°.

BUDAPEST. — *Mittheilungen aus dem Jahrbuche der Königl. Ung. Geologischen Anstalt.* T. IV, fasc. 1-2; 1875-1876. — Gr. in-8°.

— *A Magyar kir. földtani intézet évkönyve.* T. IV, fasc. 1-3; 1875-1876. — Gr. in-8°.

DAX. — *Bulletin de la Société Borda.* 1re année, 1er trimestre, 1876. — In-8°.

GÖTTINGUE. — *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und des Georg-Augusts Universität.* Année 1875. — 1 vol. in-12.

— *Göttingische gelehrte Anzeigen.* Année 1875. — 2 vol. in-12.

HEIDELBERG. — *Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg.* 2 série, t. I; fasc. 3; 1876. — In-8°.

KÖNIGSBERG. — *Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg.* Années XIV et XV; 1873-1874. — In-4°.

LEIPZIG. — *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft.* Xe année, n° 4; XIe année, n° 1; 1875-1876. — In-8°.

LISBONNE. — *Terrenos paleozoicos de Portugal. Sobre a existencia do terreno siluriano no Baixo Alemtejo. Memoria apresentada á Academia Real das Sciencias de Lisboa, por* J.-F.-N. DELGADO. (Com a traducção em francez.) 1876. — In-4°.

MOSCOU. — *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou.* Année 1875, n° 2. — In-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXV, n° 10, 20 mai 1876. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France.* T. IV, mars 1876, n° 3. — Gr. in-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* T. X, mars 1876. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXII, nos 18-20, mai 1876. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. V, n° 53, mai 1876. — Gr. in-8°.

PRAGUE. — *Archiv mathematiky a fysiky, publié par la Société Mathématique de Bohême, et rédigé par le Secrétaire perpétuel* Dr EMIL WEYR. T. I, fasc. II; 1875. — In-8°.

— *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky.* T. IV et V (nos 1-4); 1875-1876. — In-8°.

ROME. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* T. XXIX, 3e séance, 20 février 1876. — In-4°.

— *Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno* CCLXXI-CCLXXII, 2e série, t. I-II; 1873-1875. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. IX, janvier 1876. — In-4°.

VIENNE. — *Schriften des Vereines zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse zu Wien.* T. XIII et XIV, 1872-1874. — 2 vol. in-12.

ASBJÖRNSEN. — *La Vie et les Œuvres de* P. CHR. ASBJÖRNSEN. *Esquisse bibliographique et littéraire.* Christiania, 1873. — In-4°.

LAISANT (A.). — *Mémoire sur les puissances de points. Étude de Géométrie plane. Calcul du produit de tous les sinus du premier quadrant, de degré en degré. Note sur un compas trisecteur.* Nantes, 1875. — 2 brochures in-8°.

Séance du 15 juin 1876.

AMIENS. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel,* n° 48, 1er juin 1876; 5e année, t. III. — In-8°.

BERLIN. — *Monatsbericht der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Mars 1876. — In-8°.

BESANÇON. — *Mémoires de la Société d'Émulation du Doubs.* 4e série, t. VIII et IX, 1874-1875. — In-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 5e année, n° 22, mai-juin 1876. — In-4°.

FRANCFORT-S.-M. — *Abhandlungen herausgegeben von der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft.* T. X, 1876. — 1 vol. in-4°.

— *Bericht über die Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.* 1874-1875. — 1 vol. in-8°.

MOSCOU. — *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou.* Année 1875, nos 3-4. — In-8°.

PARIS. — *Association Française pour l'avancement des Sciences. Documents et informations diverses.* N° 13. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. IV, n° 11, 5 juin 1876. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXII, nos 21-22, mai 1876. — In-4°.

ROME. — *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* — T. IX, février 1876. — In-4°.

CHENU (le Dr). — *Encyclopédie d'Histoire naturelle. Papillons,* 1 vol. gr. in-8°. — *Coléoptères,* 2 vol. gr. in-8°. (Offert par M. HOÜEL.)

Séance du 29 juin 1876.

BERLIN. — *Mathematische und physikalische Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Année 1875. — 2 fasc. in-4°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 5e Année, nos 25-26, juin 1876. — In-4°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 16e année, juin 1876. — In-8°.

INNSBRUCK. — *Berichte des naturwissenschaftlich-medizinischen Vereines in Innsbruck.* Années V et VI (fasc. 1), 1875-1876. — In-8°.

LONDRES. — *Proceedings of the London Mathematical Society.* Nos 87-90. — In-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXV, n° 12, juin 1876. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXII, nos 23 et 25, juin 1876. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. V, n° 54, juin 1876. — Gr. in-8°.

PRIVAS. — *Bulletin de la Société des Sciences naturelles et historiques du département de l'Ardèche.* N° 9, 1875. — In-8°.

Séance du 13 juillet 1876.

AMIENS. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel.* N° 49, 1er juillet 1876, 5e année, t. III. — In-8°.

BATAVIA. — *Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië, uitgegeven door de Koninklijke natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië.* T. XXIV (7e série, t. IV); 1874. — In-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical,* 5e année, nos 27-28; 4-11 juillet 1876. — In-4°.

BRUXELLES. — *Société Entomologique de Belgique.* Série II, n° 26. Compte rendu de l'Assemblée mensuelle du 3 juin 1876. — In-8°.

DANZIG. — *Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig.* 2e série, t. III, fasc. 4; 1875. — Gr. in-8°.

FRIBOURG-EN-BRISGAU. — *Berichte über die Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. Br.* T. VI, fasc. IV; 1876. — In-8°.

GLASGOW. — *Proceedings of the Philosophical Society of Glasgow.* 1875-1876. T. X, n° 1. — In-8°.

HALLE. — *Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften. Redigirt von Dr.* C.-G. GIEBEL. 2e série, t. XII, 1875. — In-8°.

HARLEM. — *Archives du Musée Taylor.* T. I, fasc. 1 (2e édition); t. IV, fasc. I; 1875-1876. — In-4°.

— *Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.* T. X, fasc. 4-5; t. XI, fasc. 1; 1875-1876. — Gr. in-8°.

LEIDE. — *Annalen der Sternwarte in Leiden, herausgegeben von*

Dr. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN. T. IV; 1875. — In-4°.

MUNICH. — *Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königlich bayerischen Akademie der Wissenschaften.* T. XII, 1re partie, 1875. — In-4°.

— *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München.* 1875, fasc. III. — In-8°.

— *Ueber die Beziehungen der Chemie zur Rechtspflege, Festrede gehalten von Dr.* L. A. BUCHNER. 1875. — In-4°.

— *Almanach der Königlich bayerischen Akademie der Wissenschaften für das Jahr 1875.* — 1 vol. in-18.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXVI, n° 1, 5 juillet 1876. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXI, Tables; t. LXXXII, nos 24 et 26, juin 1876. — In-4°.

ROME. — *Bullettino di Bibliographia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. IX, mars 1876. — In-4°.

TOULOUSE. — *Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Toulouse.* 10e année, 1875-1876, 1er fasc. — In-8°.

UPSAL. — *Nova Acta Regiæ Societatis scientiarum Upsalensis.* 3e série, t. VIII, fasc. 1, 1871. — In-4° (Offert par M. Hoüel).

LAISANT (A.). — *Association Française pour l'avancement des Sciences. Service météorologique en Algérie.* Nantes, 1875. — Broch. in-8°.

Séance du 27 juillet 1876.

BERLIN. — *Monatsbericht der Königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Avril 1876. — In-8°.

BORDEAUX. — *Le Bordeaux médical.* 5e Année, nos 29-30; juillet 1876. — In-4°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux,* 16e année, juillet 1876. — In-8°.

— *Mémoires de la Société de Médecine et de Chirurgie de Bordeaux.* Année 1875, fasc. 3 et 4. — Gr. in-8°.

BRÜNN. — *Verhandlungen des Naturforschenden Vereines in Brünn.* T. XIII, 1874. — Gr. in-8°.

— *Katalog der Bibliothek des Naturforschenden Vereines in Brünn.* Septembre 1874. — Gr. in-8°.

BRUXELLES : Envois de l'*Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique* : — *Mémoires des Membres* (in-4°), t. XLI, 1875-1876. 2 fasc.

— *Mémoires couronnés et des Savants étrangers* (in-4°). T. XXXVIII

et XXXIX (1[re] partie). 1874-1876. — *Mémoires couronnés et autres Mémoires* (in-8°). T. XXIV-XXVI, 1875.

— *Bulletins de l'Académie,* 2[e] série, t. XXXVIII-XL, 1874-1875; 3 vol. in-8°. — *Annuaires de 1875 et 1876*; 2 vol. in-12. — *Bibliographie académique*, 1874. 1 vol. in-12.

— *Société Entomologique de Belgique. Série II, n° 27. Compte rendu de l'Assemblée mensuelle du 1[er] juillet 1876.* — In-8°.

Cherbourg. — *Mémoires de la Société nationale des Sciences naturelles de Cherbourg.* T. XIX (2[e] série, t. IX); 1875. — Gr. in-8°.

Copenhague. — *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder.* Année 1876, n° 1. — In-8°.

Harlem. — *Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.* T. XI, livr. 2-3; 1876. — In-8°.

— *Société Hollandaise des Sciences à Harlem. Notice historique et Liste des publications de la Société. Liste des publications qui se trouvent dans sa bibliothèque.* 1876. — In-8°.

La Rochelle. — *Académie de La Rochelle. Section des Sciences naturelles. Annales.* 1875. N° 12. — In-8°.

Paris. — *Annuaire du Club Alpin Français.* 2[e] année, 1875. — — 1 vol. in-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXVI, n° 2, 20 juillet 1876. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXIII, n[os] 1-2, juillet 1876. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. V, n° 55, juillet 1876. — Gr. in-8°.

Pise. — *Atti della Società Toscana di Scienze naturali residente in Pisa.* T. I, fasc. 3; 1876. — Gr. in-8°.

— *Il Nuovo Cimento.* 2[e] série, t. XV, mars-mai 1876. — In-8°.

Prague. — *Archiv mathematiky a fysiky.* T. I, n° 1, 1875. — *Extrait des Mémoires publiés en langue bohême* (dans le t. I). — In-8°.

Rome. — *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. IX, avril 1876. — In-4°.

Vienne. — *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe.* T. LXX, fasc. 8-10; t. LXXI, fasc. 1-5. — Gr. in-8°.

ÉLÉMENTS

DE LA

THÉORIE DES QUATERNIONS

CHAPITRE Ier.

SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES OPÉRATIONS.

---

§ Ier.

Considérations générales.

1. On sait de quelle manière, à l'aide des quantités négatives, puis des quantités complexes, on parvient à représenter par un symbole unique tout point d'un espace à une ou deux dimensions, et par un signe d'opération unique l'ensemble des opérations nécessaires pour passer d'un point à un autre de cet espace. On a reconnu, en outre, que ces symboles peuvent être soumis à un calcul dont les règles comprennent, comme cas particuliers, les règles du calcul arithmétique.

Si, au lieu des points d'un espace à une ou à deux dimensions, c'est-à-dire au lieu des valeurs de quantités dépendantes d'une ou de deux variables, il s'agit de représenter des fonctions d'un nombre quelconque n de variables, ou, comme on dit d'une manière abrégée, des points d'un espace à n dimensions, les quantités complexes dont nous nous sommes occupés jusqu'ici ne suffisent plus, et il faut introduire des quantités complexes d'ordre supérieur, dans la composition

desquelles entrent ***au moins n*** valeurs numériques indépendantes entre elles.

Mais ici la question se présente d'une manière beaucoup plus compliquée que dans les cas simples que nous avons mentionnés d'abord. Il y a, pour chaque nombre de dimensions, une infinité de représentations possibles d'un point par un symbole complexe. Seulement, il s'en faut de beaucoup que toutes ces représentations se prêtent à l'établissement d'un algorithme simple et régulier. Pour se guider d'une manière sûre dans la recherche des règles de calcul qui conviennent à tel ou tel système, et qui dérogent plus ou moins aux lois du calcul arithmétique, il est nécessaire de s'appuyer sur les principes généraux de la théorie abstraite des opérations, ces dernières étant considérées indépendamment de la nature du ***substratum*** qui leur est soumis.

2. Dans chacune des opérations fondamentales de l'Algèbre, il y a deux choses à distinguer : la signification particulière de cette opération dans ses diverses applications aux objets réels, et les propriétés essentielles qni caractérisent cette opération, et qui sont communes aux diverses formes sous lesquelles elle se présente. Par exemple, l'addition des nombres consiste dans la réunion des groupes d'unités; celle des longueurs, des angles, etc., dans la juxtaposition ***extérieure*** de ces quantités; celle des forces, dans leur application à un même point suivant une même direction, etc. Dans toutes ces opérations si différentes pour le but et les moyens d'exécution, on retrouve un certain nombre de propriétés communes, sur lesquelles reposent entièrement les règles qui président à la combinaison de toutes ces mêmes opérations entre elles et avec les autres. Ces propriétés sont exprimées par les égalités suivantes :

1° pour $a = a'$, $\quad a + b = a' + b$;
2° $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3° $a + b = b + a$;
4° $a + 0 = 0 + a = a$.

C'est leur ensemble qui constitue proprement l'*addition;* on pourra appeler de ce nom toute opération, quels qu'en soient l'objet et la nature, qui jouira de ces quatre propriétés, et lui appliquer immédiatement les règles établies pour l'addition arithmétique.

3. Lorsque l'on expose comment on se trouve amené à introduire de nouvelles espèces de quantités, telles que les quantités négatives et les quantités complexes, on fait voir en même temps que l'on doit modifier aussi la nature concrète des opérations, et donner pour celles-ci de nouvelles définitions, fondées sur l'étude directe des nouvelles quantités. Ces définitions posées, on commence d'abord par examiner si l'opération modifiée jouit encore de toutes les propriétés de l'opération primitive qu'elle remplace, et qu'elle comprend comme cas particulier. Pour les cas qui se présentent au début, on reconnaît généralement la persistance des propriétés fondamentales, du moins en ce qui concerne les opérations *directes*. Il en résulte que l'on n'a pas à modifier les règles de l'Algèbre des quantités réelles pour les appliquer aux opérations directes relatives aux quantités complexes. Quant aux opérations *inverses* (extraction des racines, résolution des équations, etc.), la considération des quantités complexes permet de donner à cette partie de l'Algèbre une généralité et une symétrie qui lui eussent manqué sans cela.

4. Mais il n'en sera pas toujours ainsi pour les espèces de quantités que nous aurons à considérer dans la représentation des espaces à plus de deux dimensions. Il pourra se faire que certaines des propriétés dont jouit une opération arithmétique deviennent incompatibles dans l'opération nouvelle que l'on est porté à lui assimiler. Il importe alors de savoir, parmi les règles déduites de ces propriétés en Arithmétique, quelles seront celles qui subsisteront pour les nouvelles quantités et quelles modifications les autres devront

subir. On conçoit dès lors quelle doit être l'utilité d'une étude générale et abstraite des opérations, fondée uniquement sur les propriétés qu'on leur suppose, et sans aucun égard à la manière dont ces propriétés ont été établies, non plus qu'à l'existence ou à la non-existence d'objets réels auxquels ces opérations soient applicables.

5. En raison de la multiplicité des moyens de passer d'un point donné à un autre point donné dans un espace à n dimensions, on peut choisir de plusieurs manières tant la composition des symboles représentatifs de ces points, que la définition des opérations fondamentales pour le passage d'un point à l'autre. Pour se guider dans ce choix, on observera que, un espace à n dimensions comprenant comme cas particuliers les espaces d'un nombre de dimensions moindre, les règles de calcul qui correspondent à n dimensions doivent, pour être générales, s'appliquer aux espaces d'ordre inférieur, et contenir, par conséquent, comme cas spécial, les règles établies pour ces espaces plus simples. C'est ainsi que les règles de calcul des quantités négatives contiennent celles des quantités arithmétiques, et sont contenues à leur tour dans celles des quantités complexes. Ce principe, que l'on doit observer dans les généralisations successives, nous l'appellerons, suivant l'expression proposée par Hankel, le ***principe de permanence*** des règles de calcul.

En vertu de ce principe, tout calcul fait pour les quantités généralisées doit s'appliquer aux quantités d'ordre inférieur, la généralisation ne pouvant introduire de nouvelles propriétés, ni donner lieu, par conséquent, à des règles qui ne résulteraient pas déjà des propriétés antérieurement admises.

6. Mais il peut se faire que quelques-unes des propriétés des opérations disparaissent dans la généralisation, ce qui ne permet plus de pratiquer les simplifications précédemment permises. Lorsque plusieurs propriétés deviennent contradictoires, et que l'on est forcé d'en sacrifier quelques-unes, on

doit alors chercher à conserver les plus importantes, celles qui se prêtent le mieux à l'établissement des règles de calcul simples et générales. C'est là, en quelque sorte, le principe réciproque du principe de permanence. Mais on ne peut donner sur son application de règles plus précises, et la question doit être directement posée dans chaque cas particulier.

7. Les considérations que nous allons exposer ne se bornent pas seulement aux combinaisons immédiates des quantités simples ou complexes; elles s'étendent aux combinaisons des signes d'opération, et même aux combinaisons d'idées de nature quelconque, pourvu que le sens des signes que nous emploierons puisse toujours être défini sans aucune ambiguïté et avec la précision mathématique. Aussi éviterons-nous d'employer le mot de *quantités*, en parlant des *substrata* de nos opérations; nous les désignerons par le terme plus vague et plus compréhensif d'*objets*, également applicable au concret et à l'abstrait.

§ II.

Propriétés générales des opérations.

8. Deux *combinaisons* d'objets sont dites *égales* entre elles, lorsqu'elles peuvent se remplacer mutuellement, sans que le résultat soit altéré.

9. Si a et b désignent deux objets de nature quelconque, semblable ou différente, nous représenterons par le signe $a \frown b$ un troisième objet formé par une combinaison ou opération quelconque faite sur les deux premiers.

10. L'opération $\frown$ sera dite *uniforme*, si,

$$(1) \qquad \text{pour} \left\{ \begin{matrix} a = a', \\ b = b', \end{matrix} \right\} \text{on a nécessairement } a \frown b = a' \frown b'.$$

Elle sera dite *associative*, si, a, b, c étant trois objets quelconques, on a l'égalité

$$(2)\qquad (a\frown b)\frown c = a\frown(b\frown c).$$

Dans ce cas, la valeur commune des deux membres pourra se désigner convenablement, en supprimant les parenthèses, par

$$a\frown b\frown c.$$

En étendant cette notation, on a, en vertu de la propriété associative,

$$\begin{aligned}[(a\frown b)\frown c]\frown d &= [a\frown(b\frown c)]\frown d = (a\frown b)\frown(c\frown d)\\ &= (a\frown b\frown c)\frown d = a\frown b\frown c\frown d,\end{aligned}$$

et ainsi de suite. On voit que, quel que soit le nombre des objets qui doivent être successivement combinés par une opération associative, on peut toujours remplacer plusieurs objets consécutifs par le résultat de leur combinaison, et *vice versa*.

11. Une opération est *commutative*, si l'on a, quels que soient a et b,

$$(3)\qquad a\frown b = b\frown a.$$

12. Exemples. L'addition et la multiplication arithmétiques sont des opérations uniformes, associatives et commutatives. En effet, les égalités précédentes subsistent, lorsqu'on y remplace le symbole général $\frown$ soit par le signe $+$, soit par le signe $\times$.

13. Une opération peut être associative sans être commutative. Nous en verrons plus tard un exemple dans la multiplication des quaternions.

Une opération peut être commutative sans être associative. Telle est l'opération qui consiste à prendre la moyenne arithmétique de deux quantités; on a, en effet,

$$a\frown b = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = b\frown a,$$

tandis que

$$(a \frown b) \frown c = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2}$$

n'est pas égal à

$$a \frown (b \frown c) = \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2} \cdot$$

Enfin, une opération peut n'être ni associative ni commutative. Ainsi, le résultat de l'opération exponentielle

$$a \frown b = a^b,$$

diffère de

$$b \frown a = b^a;$$

de plus,

$$(a \frown b) \frown c = (a^b)^c$$

n'est pas égal à

$$a \frown (b \frown c) = a^{(b^c)}.$$

14. Si l'on représente par les signes $\frown$ et $\uparrow$ deux opérations quelconques de nature différente, l'opération $\frown$ sera dite *distributive relativement à l'opération* $\uparrow$, si l'on a

(4) $$(a \uparrow b) \frown c = (a \frown c) \uparrow (b \frown c),$$

ou encore

(5) $$a \frown (b \uparrow c) = (a \frown b) \uparrow (a \frown c).$$

Dans le premier cas, elle sera distributive *par rapport à son premier terme;* dans le second, elle le sera *par rapport à son second terme.*

Ces deux définitions de la distributivité coïncident évidemment, si l'opération $\frown$ est commutative. Car de la propriété (4) on tire alors

$$a \frown (b \uparrow c) = (b \uparrow c) \frown a = (b \frown a) \uparrow (c \frown a) = (a \frown b) \uparrow (a \frown c).$$

C'est ainsi que la multiplication arithmétique est distributive relativement à l'addition, puisqu'on a

$$(a+b)\times c = a\times c + b\times c,$$
$$a\times(b+c) = a\times b + a\times c,$$

équations qui sont la conséquence l'une de l'autre, en vertu de la commutativité.

L'élévation aux puissances est distributive relativement à la multiplication, par rapport à son premier terme, puisque l'on a, conformément à l'égalité (4),

$$(a\times b)^c = a^c \times b^c;$$

mais elle ne l'est pas relativement à son second terme, car

$a^{b\times c}$ n'est pas égal à $a^b \times a^c$.

15. Les opérations peuvent encore jouir d'autres propriétés spéciales, qui servent à les caractériser, et qui se rapportent à des déterminations particulières des objets.

L'addition, par exemple, jouit de la propriété que, si l'un quelconque des deux termes s'annule, le résultat se réduit au terme restant, c'est-à-dire que l'on a

$$(6) \qquad \begin{cases} a \frown 0 = a, \\ 0 \frown a = a, \end{cases}$$

l'une des deux équations découlant ici de l'autre, en vertu de la commutativité.

La multiplication jouit de la double propriété que, 1° si l'un des objets s'annule, le résultat s'annule,

$$(7) \qquad \begin{cases} a \frown 0 = 0, \\ 0 \frown a = 0; \end{cases}$$

2° si l'un des objets se réduit à l'unité, le résultat se réduit à l'autre objet,

$$(8) \qquad \begin{cases} a \frown 1 = a, \\ 1 \frown a = a, \end{cases}$$

les deux égalités (7) découlant l'une de l'autre, de même que les égalités (8), en vertu de la commutativité.

16. Ces propriétés générales, exprimées par les équations (1) à (8), suffisent pour établir toutes les règles de l'addition et de la multiplication algébriques, d'où il s'ensuit que ces mêmes règles s'appliqueront à toute opération qui jouira des mêmes propriétés que l'addition ou que la multiplication. C'est ce que l'on exprimera d'une manière abrégée en donnant à cette opération le nom d'addition ou de multiplication.

Ainsi on pourra nommer *addition* toute opération qui sera 1° uniforme, 2° associative, 3° commutative, 4° qui satisfera aux conditions (6).

On pourra nommer *multiplication* toute opération qui sera 1° uniforme, 2° associative, 3° commutative, 4° distributive relativement à l'addition, 5° qui satisfera aux conditions (7) et (8).

Les opérations ainsi nommées se combineront suivant les règles correspondantes de l'Algèbre ordinaire.

§ III.

Des opérations inverses.

17. Supposons un objet c déterminé au moyen de deux autres a et b, par l'opération

$$a \frown b = c. \tag{9}$$

Il arrivera généralement que l'un quelconque des objets a, b sera aussi déterminé, lorsque l'on connaîtra l'autre et en même temps l'objet résultant c. L'opération qui sert à trouver b connaissant a et c, ou a connaissant b et c est dite une opération *inverse* de l'opération *directe* marquée par le signe $\frown$. Nous indiquerons cette opération inverse par le signe précédent renversé $\smile$.

19. Si l'opération directe $\frown$ est commutative, l'équation (9) pourra s'écrire aussi sous la forme

$$b \frown a = c,$$

et par conséquent a sera déterminé au moyen de b et de c par la même opération que b au moyen de a et de c, de sorte que, en désignant, comme nous venons de le dire, cette dernière opération par le signe $\smile$, on aura à la fois

(10) $$b = c \smile a,$$
et
(10)' $$a = c \smile b.$$

Dans ce cas l'opération $\frown$ n'admettra qu'une seule opération inverse.

Mais, si l'opération directe $\frown$ n'est pas commutative, les deux équations (10) et (10)' ne seront plus vraies ensemble, et, au lieu d'une seule opération inverse, il y en aura deux distinctes, suivant que l'on aura pris pour inconnue le second ou le premier terme de la combinaison $a \frown b$.

Si l'on désigne toujours par $\smile$ l'opération qui donne b au moyen de c et de a, il faudra alors prendre un autre signe, tel que $\smile'$, pour l'opération qui donne a au moyen de c et de b, et la relation (10)' sera remplacée par cette autre

(11) $$a = c \smile' b.$$

Par exemple, l'addition et la multiplication arithmétiques, étant des opérations commutatives, n'auront, chacune, qu'une seule opération inverse.

L'opération exponentielle

$$a \frown b = a^b = c,$$

n'étant pas commutative, admettra deux opérations inverses, définies par les égalités

$$b = c \smile a = \log_a c,$$
$$a = c \smile' b = \sqrt[b]{c}.$$

19. Par la définition même de l'opération inverse $\smile$, on a, à cause de $c \smile a = (a \frown b) \smile a$, l'identité

(12) $$(a \frown b) \smile a = b,$$

qui peut être considérée comme la définition de l'opération $\smile$.

De même, de l'égalité (11) résulte l'identité

(13) $$(a \frown b) \smile' b = a\,,$$

qui peut être considérée comme la définition de l'opération $\smile'$.

20. L'égalité (9) peut s'écrire, en vertu des égalités (10) et (11), sous les deux formes

(14) $$a \frown (c \smile a) = c\,,$$

(15) $$(c \smile' b) \frown b = c\,,$$

qui définissent l'opération $\frown$ comme inverse de chacune des opérations $\smile$ et $\smile'$.

21. Si l'égalité

$$a \frown b = a \frown b'\,,$$

ne peut subsister qu'avec l'égalité $b = b'$, c'est-à-dire si le résultat de l'opération $\frown$ change nécessairement lorsqu'on fait varier le second terme b, alors l'opération inverse $\smile$, définie par l'égalité (10) sera *uniforme*. Cela revient à dire que l'équation

$$a \frown x = c\,,$$

où x est l'inconnue, n'admet qu'ne seule solution, laquelle est donnée par la formule

$$(a \frown x) \smile a = x = c \smile a\,.$$

De même, si l'égalité

$$a \frown b = a' \frown b$$

entraîne l'égalité $a = a'$, l'opération inverse $\smile'$, définie par l'égalité (11), sera uniforme, et l'équation

$$x \frown b = c$$

n'aura qu'une seule solution.

Lorsqu'une opération est uniforme en même temps que ses opérations inverses, nous dirons, pour abréger, qu'elle est *complètement uniforme*.

22. Par exemple, une somme variant nécessairement lorsqu'un de ses termes varie seul, son opération inverse, la soustraction, est uniforme. Il en est de même de la division, inverse de la multiplication, sauf le cas où les deux termes du quotient sont nuls, $a \times 0$ ne variant pas avec a.

Les deux opérations, $\sqrt[b]{c}$, $\log_a c$, inverses de l'opération exponentielle, sont uniformes au point de vue de l'Arithmétique. Mais au point de vue algébrique, l'expression

$$a \frown b = a^b + a^{-b} = c$$

ne variant pas, lorsqu'on change b en $-b$, il en résulte que l'opération inverse qui donne

$$b = c \smile a$$

donnera pour b deux valeurs égales et de signe contraire; elle sera donc *biforme*. Il en sera de même pour l'opération inverse de $a \frown b = a^b = (-a)^b$, qui détermine a, lorsque b sera un nombre entier et pair.

Enfin, au point de vue des quantités complexes, l'opération inverse de $\sqrt[b]{c}$, l'exponentielle admet b solutions pour b entier; l'opération $\log_a c$ en admet une infinité.

§ IV.

Propriétés des opérations associatives.

23. Étudions maintenant les propriétés les plus essentielles des *opérations associatives*, et établissons certaines formules importantes concernant ces opérations.

Supposons que l'opération directe $\frown$ soit uniforme et associative, et soit $\smile$ son opération inverse, définie par l'équation (12)

$$(a \frown b) \smile a = b\,.$$

Considérons l'expression

$$x = (a \smile b) \frown c\,.$$

Substituons successivement chacun des deux membres de cette égalité à la place du second terme y de l'expression $b\frown y$, ou, comme nous le dirons d'une manière plus abrégée, *opérons par* $b\frown$ sur chacun des deux membres de l'égalité. L'opération $\frown$ étant uniforme, il viendra

$$b\frown x = b\frown[(a\smile b)\frown c]\,.$$

L'opération $\frown$ étant associative, le second membre pourra s'écrire sous la forme

$$[b\frown(a\smile b)]\frown c = a\frown c\,,$$

en vertu de l'égalité (14), d'où

$$b\frown x = a\frown c\,.$$

Opérons maintenant par $\smile b$ sur les deux membres; on aura d'après (12), en mettant pour x sa valeur,

(16) $$(a\smile b)\frown c = (a\frown c)\smile b\,.$$

Ainsi, dans le cas même où la multiplication n'est pas commutative, et où la division est définie par l'égalité

dividende = diviseur × quotient,

on a

$$\frac{a}{b}\cdot c = \frac{a.c}{b}\cdot$$

24. Soit maintenant l'expression

$$x = (a\smile b)\smile c\,;$$

on aura [éq. (14) et (12)], en opérant par $c\frown$, puis par $b\frown$, et enfin par $\smile(b\frown c)$,

$$c\frown x = c\frown[(a\smile b)\smile c] = a\smile b\,,$$
$$b\frown(c\frown x) = (b\frown c)\frown x = b\frown(a\smile b) = a\,,$$
$$[(b\frown c)\frown x]\smile(b\frown c) = x = a\smile(b\frown c)\,,$$

Donc

(17) $$(a\smile b)\smile c = a\smile(b\frown c)\,.$$

Ainsi

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} = \frac{a}{b.c}.$$

25. Soit encore l'expression

$$x = (a \frown b) \smile c.$$

On trouvera successivement

$$c \frown x = c \frown [(a \frown b) \smile c] = a \frown b,$$
$$(c \frown x) \smile a = (a \frown b) \smile a = b = (c \smile a) \frown x \text{ [éq. (16)]},$$
$$b \smile (c \smile a) = [(c \smile a) \frown x] \smile (c \smile a) = x,$$

d'où l'on tire la relation

(18) $$b \smile (c \smile a) = (a \frown b) \smile c,$$

puis, en ayant égard à l'égalité (16), cette autre relation

(19) $$b \smile (c \smile a) = (a \smile c) \frown b.$$

Ainsi

$$\frac{a.b}{c} = \frac{b}{\left(\frac{c}{a}\right)} = \frac{a}{c}.b.$$

26. Nous appellerons *module* d'une opération $\frown$ un objet m qui, combiné à l'aide de cette opération avec un autre objet quelconque a, donne pour résultat l'objet a lui-même, de manière que l'on ait, quel que soit a,

(20) $$a \frown m = a.$$

Pour l'addition, $m = 0$; pour la multiplication, $m = 1$.

On a, par le principe associatif,

$$a \frown (m \frown c) = (a \frown m) \frown c = a \frown c,$$

d'où, en supposant l'opération *complètement* uniforme,

$$m \frown c = c.$$

Donc l'équation (20), jointe aux propriétés d'associativité et d'uniformité complète, entraîne l'équation

(21) $$m \frown a = a,$$

c'est-à-dire que la propriété du module subsiste, qu'on le prenne pour premier terme ou pour second terme de la combinaison.

On a de plus [éq. (21) et 10)],

$$a \smile m = (m \frown a) \smile m = a .$$

Donc

(22) $$a \smile m = a .$$

La propriété du module, exprimée par l'équation (20), a donc lieu aussi pour l'opération inverse relative au second terme, et définie par l'équation (10)

27. En opérant par $\smile a$ sur l'équation (20), on a

(23) $$(a \frown m) \smile a = m = a \smile a .$$

Donc on obtient le module d'une opération en exécutant l'opération inverse $\smile$ sur un objet quelconque, combiné avec un autre objet identique au premier.

On a ainsi, pour l'addition, $m = a - a = 0$; pour la multiplication, $m = \frac{a}{a} = 1$.

28. Nous venons de voir que chacune des trois combinaisons $a \frown m$, $m \frown a$, $a \smile m$ se réduit à a. Il nous reste à examiner la combinaison $m \smile a$, qui n'a plus la même propriété. Nous appellerons le résultat de cette combinaison l'*objet réciproque* de l'objet a, et nous le représenterons par la notation

(24) $$m \smile a = \bar{a} .$$

D'après cela, dans le cas de l'addition, l'objet réciproque de a sera $0 - a$ ou $-a$; dans le cas de la multiplication, ce sera $\frac{1}{a}$.

Les deux objets a et $\bar{a}$ sont dans une relation de réciprocité mutuelle. En effet, la relation (18) donne, en y faisant $b = c = m$,

$$m \smile \bar{a} = m \smile (m \smile a) = (a \frown m) \smile m = a \smile m = a ;$$

donc a est l'objet réciproque de $\bar{a} = m \smile a$.

29. L'introduction du signe de réciprocité permet de remplacer une opération par son inverse. En effet,

1° L'égalité (16) donne, en y faisant $a = m$,

$$(m \frown c) \smile b = (m \smile b) \frown c,$$

c'est-à-dire [(24), (20)]

(25) $$c \smile b = \bar{b} \frown c \text{ (1)}.$$

Ainsi,

$$\frac{c}{b} = \frac{1}{b} . c .$$

2° De même, l'égalité (18) donne, en faisant $c = m$,

$$b \smile (m \smile a) = (a \frown b) \smile m,$$

c'est-à-dire [(24), (22)]

(26) $$a \frown b = b \smile \bar{a} .$$

Ainsi

$$a.b = \frac{b}{\left(\frac{1}{a}\right)} .$$

3° Faisant, dans (19), $b = m$, on a

$$m \smile (c \smile a) = (a \smile c) \frown m,$$

ou

(27) $$a \smile c = \overline{c \smile a},$$

c'est-à-dire qu'en échangeant entre eux les deux termes d'une

---

(1) En particulier

(25)* $$a \smile a = a \frown \bar{a} = m,$$

ou, en changeant a en $\bar{a}$, et remarquant que a est le réciproque de $\bar{a}$,

(25)** $$\bar{a} \frown a = m .$$

Donc l'opération directe entre un objet et son réciproque est toujours commutative, et donne pour résultat le module.

combinaison par l'opération inverse $\smile$, le résultat se change dans l'objet réciproque. Par exemple,

$$\frac{a}{c} = \frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)}\,.$$

4° Enfin, dans (17), faisons $a = m$; il viendra

$$(m \smile b) \smile c = m \smile (b \frown c)\,,$$

ou [(24), (26)], c étant le réciproque de $\bar{c}$,

(28) $$\bar{b} \smile c = \overline{b \frown c} = \bar{c} \frown \bar{b}\,.$$

Ainsi

$$\frac{\left(\frac{1}{b}\right)}{c} = \frac{1}{b.c} = \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{b}\,.$$

30. A l'aide de la notation des objets réciproques, on peut écrire les équations (16), (17), (18), (19) sous la forme

(29) $$(\bar{b} \frown a) \frown c = \bar{b} \frown (a \frown c)\,,$$

(30) $$\bar{c} \frown (\bar{b} \frown a) = (\overline{b \frown c}) \frown a = (\bar{b} \smile c) \frown a = (\bar{c} \frown \bar{b}) \frown a\,,$$

(31) $$\overline{(\bar{a} \frown c)} \frown b = \bar{c} \frown (a \frown b) = (\bar{c} \frown a) \frown b\,,$$

et ces nouvelles égalités transforment les formules établies pour l'opération inverse, laquelle n'est pas associative, en formules associatives, relatives seulement à l'opération directe.

31. Supposons maintenant que l'opération directe $\frown$ ne soit plus seulement ***associative,*** mais encore ***commutative,*** de sorte que l'on ait, pour deux objets quelconques

$$a \frown b = b \frown a\,.$$

On pourra alors, aux formules précédentes, en joindre quelques autres.

Les formules (12) et (14) donneront les suivantes,

(32) $$(b \frown a) \smile a = b\,,$$

(33) $$(c \smile a) \frown a = c\,.$$

Dans l'équation (17), remplaçons b par $b \smile c$, on aura [éq. (14)]

$$[a \smile (b \smile c)] \smile c = a \smile [(b \smile c) \frown c] = a \smile [c \frown (b \smile c)] = a \smile b,$$

d'où, en opérant par $c \frown$,

$$c \frown \{[a \smile (b \smile c)] \smile c\} = a \smile (b \smile c) = c \frown (a \smile b).$$

Donc, ***si l'opération $\frown$ est commutative,*** on aura la relation

(34) $$a \smile (b \smile c) = c \frown (a \smile b).$$

Ainsi, dans le cas où $\frown$ représente la multiplication arithmétique, qui est commutative, on a

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = c \cdot \frac{a}{b}.$$

32. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que l'opération directe $\frown$, pratiquée sur une série d'objets

(A) $$a, b, c, \ldots,$$

était toujours possible, et donnait pour résultat un objet appartenant à cette même série, que nous appellerons la ***série directe.***

Mais il pourra bien se faire que l'opération inverse ne soit pas toujours possible aux mêmes conditions. Par exemple, si la série (A) se compose des nombres positifs et entiers, les résultats des opérations $a - b$ et $\frac{a}{b}$ pourront bien ne pas être exprimables par des nombres de cette série.

L'opération inverse $\smile$ sera, dans ce cas, ***impossible,*** à moins que l'on ne puisse ajouter à la série (A) une série complémentaire, et que les opérations, directe et inverse, ne puissent être généralisées de manière à s'appliquer aux objets de la nouvelle série, et à faire passer d'une série à l'autre.

C'est à cette condition que la définition des quantités réciproques, donnée au n° 28, peut être acceptable dans tous les cas.

33. Supposons que l'opération directe, ainsi généralisée, conserve sa propriété associative, ce que l'on devra constater dans chaque cas particulier. Dès lors, toutes les formules établies jusqu'ici et fondées sur cette propriété continueront à subsister.

En particulier, il résulte de l'équation (27) que les deux objets $a \smile b$ et $b \smile a$ seront réciproques l'un de l'autre.

Si donc l'une de ces opérations est exécutable au moyen des objets de la série directe (A), l'autre opération conduira à un objet de la série

$$(\bar{A}) \qquad \bar{a}\,, \bar{b}\,, \bar{c}\,, \ldots\,,$$

formée avec les objets réciproques de ceux de la première, et que nous appellerons la *série réciproque*.

S'il en est ainsi, toutes les équations (25)-(31) auront lieu pour l'ensemble des deux séries (A), ($\bar{A}$), et l'on pourra, en remplaçant un objet de l'une par son correspondant dans l'autre, transformer une opération dans l'opération inverse.

Si l'on admet, de plus, que l'opération $\frown$ soit commutative pour les objets des deux séries, les formules (32)-(34) continueront à subsister après la généralisation.

§ V.

De la propriété distributive.

34. Soient deux opérations directes différentes, que nous désignerons par les signes $\uparrow$ et $\frown$. On peut exprimer [14] de deux manières différentes la distributivité de la seconde par rapport à la première, en disant qu'elle est distributive soit par rapport au premier terme, soit par rapport au second, c'est-à-dire que l'on a l'une ou l'autre des deux équations

$$(35) \qquad (a \uparrow b) \frown c = (a \frown c) \uparrow (b \frown c),$$

$$(36) \qquad a \frown (b \uparrow c) = (a \frown b) \uparrow (a \frown c).$$

Si les deux équations (35) et (36) ont lieu en même temps, la distributivité sera *complète*. On aura alors

$$\begin{aligned}(a \uparrow b) \frown (c \uparrow d) &= [a \frown (c \uparrow d)] \uparrow [b \frown (c \uparrow d)] \\ &= [(a \frown c) \uparrow (a \frown d)] \uparrow [(b \frown c) \uparrow (b \frown d)] \\ &= [(a \uparrow b) \frown c] \uparrow [(a \uparrow b) \frown d] \\ &= [(a \frown c) \uparrow (b \frown c)] \uparrow [(a \frown d) \uparrow (b \frown d)].\end{aligned}$$

Si l'opération $\uparrow$ est associative, on devra donc avoir, en transposant les crochets,

$$\begin{aligned}&(a \frown c) \uparrow [(a \frown d) \uparrow (b \frown c)] \uparrow (b \frown d) \\ &\qquad = (a \frown c) \uparrow [(b \frown c) \uparrow (a \frown d)] \uparrow (b \frown d),\end{aligned}$$

et par suite, si cette même opération est complètement uniforme [21], il faudra que l'on ait

$$(a \frown d) \uparrow (b \frown c) = (b \frown c) \uparrow (a \frown d),$$

et comme $a \frown d$ et $b \frown c$ sont des objets quelconques, l'opération $\uparrow$ devra être, de plus, commutative.

On voit donc que, l'opération $\uparrow$ étant supposée associative et complètement uniforme, la condition nécessaire et suffisante pour que la distributivité, par rapport à $\uparrow$, de l'opération $\frown$, relativement à l'un de ses termes entraîne la distributivité relativement à l'autre, est que l'opération $\uparrow$ soit commutative.

35. Considérons maintenant les objets de la série $(\bar{A})$, réciproque de (A) par rapport à l'opération $\uparrow$ (¹). En faisant $b = \bar{a}$ dans l'égalité (35), il vient, à cause de $a \uparrow \bar{a} = \mu$ [éq. (25)*, art. 29, Note], μ étant le module de l'opération $\uparrow$,

$$(a \uparrow \bar{a}) \frown c = (a \frown c) \uparrow (\bar{a} \frown c) = \mu \frown c,$$

(¹) Par exemple, si $\uparrow$ est le signe $+$ de l'addition, la série $(\bar{A})$ sera la série des quantités négatives.

et, si l'opération $\frown$ est telle que l'on ait (*)

$$(37) \qquad \mu \frown c = \mu ,$$

on en conclura

$$(a \frown c) \uparrow (\bar{a} \frown c) = \mu ,$$

d'où, en désignant par $\downarrow$ l'opération inverse de $\uparrow$, et opérant par $\downarrow (a \frown c)$,

$$(38) \qquad \bar{a} \frown c = \mu \downarrow (a \frown c) = \overline{a \frown c} ,$$

c'est-à-dire que $\bar{a} \frown c$ est l'objet réciproque de $a \frown c$ par rapport à l'opération $\uparrow$.

Posant, de même, $c = \bar{b}$ dans l'égalité (36), et admettant que l'opération $\frown$ soit telle que l'on ait (*)

$$(39) \qquad a \frown \mu = \mu ,$$

on trouvera

$$(40) \qquad a \frown \bar{b} = \overline{a \frown b} ,$$

c'est-à-dire que $a \frown \bar{b}$ est le réciproque de $a \frown b$.

Enfin, on a, dans l'hypothèse de la distributivité complète, à cause des relations (38) et (40), et en admettant les égalités (37) et (39),

$$\begin{aligned}(a \uparrow \bar{a}) \frown (b \uparrow \bar{b}) &= \mu \frown \mu = \mu \\ &= (a \frown b) \uparrow (a \frown \bar{b}) \uparrow (\bar{a} \frown b) \uparrow (\bar{a} \frown \bar{b}) \\ &= (a \frown b) \uparrow (\overline{a \frown b}) \uparrow (\overline{a \frown b}) \uparrow (\bar{a} \frown \bar{b}) \\ &= \mu \uparrow (\overline{a \frown b}) \uparrow (\bar{a} \frown \bar{b}) = (\overline{a \frown b}) \uparrow (\bar{a} \frown \bar{b}) ,\end{aligned}$$

d'où, en opérant par $\downarrow \overline{(a \frown b)}$,

$$(41) \qquad \bar{a} \frown \bar{b} = \mu \downarrow (\overline{a \frown b}) = a \frown b .$$

(*) Pour $\uparrow = +$, $\frown = \times$, on a $\mu = 0$, et alors $\mu \times c = 0 = \mu$, $a \frown \mu = 0 = \mu$.

Exemples :

$$(-b) \times c = -(b \times c),$$
$$a \times (-c) = -(a \times c),$$
$$(-a) \times (-b) = (a \times b).$$

36. Considérons enfin la combinaison de l'opération $\uparrow$ avec l'opération $\smile$ inverse de $\frown$. On a, en supposant $\frown$ associative et distributive relativement à $\uparrow$,

$$(b \frown d) \frown [(a \smile b) \uparrow (c \smile d)] = [b \frown d \frown (a \smile b)] \uparrow [b \frown d \frown (c \smile d)]$$
$$= (b \frown d \frown \bar{b} \frown a) \uparrow (b \frown c),$$

d'où, en opérant par $\smile (b \frown d)$

(42) $$(a \smile b) \uparrow (c \smile d) = [(b \frown d \frown \bar{b} \frown a) \uparrow (b \frown c)] \smile (b \frown d),$$

le second membre n'étant pas, en général, susceptible de réduction, à moins que l'on n'ait $d = b$, auquel cas

$$b \frown [(a \smile b) \uparrow (c \smile b)] = [b \frown (a \smile b)] \uparrow [b \frown (c \smile b)] = a \uparrow c,$$

et par suite

(43) $$(a \smile b) \uparrow (c \smile b) = (a \uparrow c) \smile b,$$

ce qui est d'ailleurs une conséquence du principe distributif, puisque cela revient à

$$(\bar{b} \frown a) \uparrow (\bar{b} \frown c) = \bar{b} \frown (a \uparrow c) = (a \uparrow c) \smile b;$$

ou bien encore à moins que l'opération $\frown$ ne soit commutative; alors on a

(44) $$(a \smile b) \uparrow (c \smile d) = [(a \frown d) \uparrow (c \frown b)] \smile (b \frown d).$$

37. Si l'opération $\frown$ n'est pas commutative, on a

(45) $$(a \smile b) \frown (c \smile d) = \bar{b} \frown a \frown \bar{d} \frown c,$$

ce qui se réduit, dans le cas de la commutativité, à

(46) $$(a \smile b) \frown (c \smile d) = (a \frown c) \smile (b \frown d).$$

38. En changeant les signes ↑ et ⌒ respectivement en + et ×, on obtiendra les formules qui expriment les règles de la multiplication et de la division, avec ou sans commutativité.

Ainsi, dans le cas de non-commutativité, on a

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b.d.\frac{1}{b}.a+bc}{bd},$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{1}{b}.a.\frac{1}{d}.c.$$

Dans le cas de la commutativité, on retrouve les formules connues.

CHAPITRE II.

DES QUANTITÉS COMPLEXES EN GÉNÉRAL.

§ I[er].

Propriétés générales.

39. Soient $i_1, i_2, i_3, \ldots$ diverses quantités constantes, irréductibles entre elles et avec l'unité qui sert à former les quantités numériques ou *réelles*. Appelons ces quantités des *unités imaginaires*, par analogie avec la dénomination adoptée pour désigner la quantité $i = \sqrt{-1}$.

Nous supposerons chaque unité imaginaire i_k susceptible d'addition avec elle-même, et par suite aussi de multiplication et de division par un nombre quelconque entier, fractionnaire ou incommensurable, positif ou négatif (1).

Nous admettrons que l'addition d'une unité imaginaire avec elle-même et ses multiples jouisse des mêmes propriétés que l'addition arithmétique, et il en sera de même, par conséquent, de la multiplication ou de la division par des quantités réelles. Ainsi l'addition et la multiplication par un facteur réel sont des opérations uniformes et associatives. L'addition est commutative; la multiplication l'est en ce sens que nous poserons, par définition, a étant une quantité *réelle*,

$$i_k \times a = a \times i_k;$$

(1) On pourrait même, en vue de certaines recherches algébriques, considérer la multiplication d'une unité imaginaire i_k par une quantité complexe ordinaire, de la forme $\alpha + \beta i$. Mais cette extension n'étant d'aucun usage dans les applications que nous nous proposons de traiter, nous nous contenterons de la mentionner ici.

de sorte que nous représenterons le produit indifféremment par $i_k a$ ou par $a i_k$. La multiplication par un facteur réel est distributivé pour les polynômes formés avec une même unité. Enfin la multiplication jouit des propriétés exprimées par les équations

$$a \times 0 = 0 \times a = 0\,, \qquad a \times 1 = 1 \times a = a\,.$$

D'après cela, on aura, par exemple,

$$i_k . a = a . i_k\,, \qquad i_k . 0 = 0 . i_k = 0\,,$$
$$i_k . (a + b) = (a + b) . i_k = a i_k + b i_k\,,$$

a et b étant des quantités réelles.

40. Supposons maintenant qu'avec différentes unités imaginaires i_1, i_2, ... on ait formé des monômes à coefficients réels $a_1 i_1$, $a_2 i_2$, ... Appelons *addition* une opération exécutée sur ces monômes, et jouissant de toutes les propriétés essentielles de l'addition arithmétique, c'est-à-dire une opération uniforme, associative, commutative, et satisfaisant à la condition $a + 0 = 0 + a = a$. La manière dont cette opération s'effectuera dépendra de la nature des unités imaginaires.

41. Cela posé, nous appellerons *quantité complexe* toute expression linéaire par rapport à des unités imaginaires, et de la forme

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots,$$

a_0, a_1, a_2, ... étant des quantités réelles.

Nous supposerons que l'opération qui relie les divers termes de la quantité complexe et que nous appellerons *addition* est commutative comme l'addition ordinaire.

Si les unités imaginaires *distinctes* i_1, i_2, ..., sont au nombre de n, nous dirons que la quantité complexe est *de la* $n^{\text{ième}}$ *classe*. Une quantité complexe ordinaire est ainsi de la première classe.

42. Dans une quantité complexe, nous supposerons toujours

les unités imaginaires *distinctes* entre elles ; c'est-à-dire que ces unités ne devront satisfaire à aucune relation linéaire à coefficients réels, de la forme

$$(1) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_n i_n = 0,$$

où les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ne seraient pas *tous nuls séparément.*

De cette hypothèse il résulte que, toutes les fois qu'un calcul, fait sur des unités imaginaires distinctes, conduira à une équation de la forme (1), cette équation se décomposera nécessairement dans les $n+1$ équations

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n = 0.$$

43. Telles sont les propriétés que nous supposerons d'abord exister chez les quantités complexes dont nous nous occuperons. L'établissement même de ces propriétés dépend des considérations spéciales qui donnent naissance à ces quantités, et nous les démontrerons en même temps que nous étudierons la représentation des objets concrets à l'aide des symboles complexes.

44. En suivant la marche tracée dans les raisonnements généraux du Chapitre précédent, on parvient sans peine à établir les formules suivantes.

Désignons, pour abréger, par $\sum a_k i_k$ (i_0 représentant l'unité numérique) la quantité complexe

$$a_0 + a_1 i_1 + \ldots + a_n i_n.$$

De la commutativité de l'addition des termes d'une quantité complexe et de la distributivité de la multiplication d'une même unité par des facteurs réels résulte la formule

$$(2) \qquad \sum a_k i_k + \sum b_k i_k = \sum (a_k + b_k) i_k.$$

De $a_k + b_k = b_k + a_k$ on tire

$$(3) \qquad \sum a_k i_k + \sum b_k i_k = \sum b_k i_k + \sum a_k i_k.$$

L'addition de deux quantités complexes, formées avec les mêmes unités, est donc commutative.

On verra de même que cette addition est associative, c'est-à-dire que l'on a

$$(4)\qquad \left(\sum a_k i_k + \sum b_k i_k\right) + \sum c_k i_k = \sum a_k i_k + \left(\sum b_k i_k + \sum c_k i_k\right).$$

L'égalité $\sum a_k i_k = \sum b_k i_k$ pouvant s'écrire

$$\sum (a_k - b_k) i_k = 0\,,$$

on en conclut [42] $a_k - b_k = 0$ pour toutes les valeurs de l'indice k. Donc deux quantités complexes, dont les unités sont toutes *distinctes*, ne peuvent être égales qu'autant que les coefficients des mêmes unités sont égaux de part et d'autre.

45. Soit une quantité complexe

$$(5)\qquad j = a_0 + a_1 i_1 + \ldots + a_n i_n\,.$$

On pourra remplacer dans le calcul une quelconque i_1 des unités complexes par cette quantité j. On a, en effet, le coefficient a_1 étant supposé différent de zéro,

$$i_1 = \frac{1}{a_1} j - \frac{a_0}{a_1} - \frac{a_2}{a_1} i_2 - \ldots - \frac{a_n}{a_1} i_n\,,$$

relation qui exprime i_1 en fonction des n unités

$$j\,,\ i_2\,, \ldots,\ i_n\,.$$

De plus, ces nouvelles unités sont distinctes; car s'il existait entre elles une relation linéaire de la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1 j + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_n i_n = 0\,,$$

en y mettant pour j sa valeur (5), cette relation se changerait en une relation linéaire entre les anciennes unités $i_1, i_2, \ldots, i_n$, qui ne seraient plus distinctes entre elles, comme nous les supposons.

Il s'ensuit de là que, si $j_1, j_2, \dots, j_n$ sont des fonctions linéaires de $i_1, i_2, \dots, i_n$, telles que

$$j_1 = a'_0 + a'_1 i_1 + \dots + a'_n i_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$j_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} i_1 + \dots + a_n^{(n)} i_n,$$

et dont le déterminant

$$|\, a'_1 a''_2 \dots a_n^{(n)} \,|$$

ne soit pas nul, ces n fonctions j_l pourront être considérées comme de nouvelles unités imaginaires, distinctes entre elles et pouvant remplacer les unités primitives i_k.

46. On entend par *produit* de deux quantités complexes

$$\text{A} = a_0 + a_1 i_1 + \dots + a_n i_n = \sum a_k i_k,$$
$$\text{B} = b_0 + b_1 i_1 + \dots + b_n i_n = \sum b_l i_l,$$

formées avec le même système d'unités imaginaires, l'expression

$$\text{AB} = \sum a_k i_k . \sum b_l i_l = \sum a_k b_l i_k i_l, \quad (k, l = 0, 1, \dots, n),$$

formée d'après le principe distributif de la multiplication des polynômes [25] et suivant les règles de la multiplication ordinaire des monômes, si ce n'est en ce qui concerne la multiplication des unités imaginaires entre elles, laquelle n'est pas généralement commutative. Ainsi il n'est pas permis d'y réduire ensemble les termes en $i_k\, i_l$ et ceux en $i_l\, i_k$.

Le sens que l'on attache à un produit de deux unités imaginaires $i_k\, i_l$ peut varier à l'infini. C'est la définition spéciale d'un tel produit qui forme le caractère propre de telle ou telle espèce de multiplication des quantités complexes. Nous verrons des exemples de la manière dont une telle définition peut s'établir.

47. Nous supposerons seulement, dans ce qui va suivre,

que la multiplication des unités soit une opération associative, c'est-à-dire que l'on ait

$$(i_k i_l) i_m = i_k (i_l i_m).$$

On conclut de là que

$$\left(\sum a_k i_k . \sum b_l i_l\right) . \sum c_m i_m = \sum a_k b_l i_k i_l . \sum c_m i_m$$
$$= \sum a_k b_l c_m (i_k i_l) i_m = \sum a_k b_l c_m i_k (i_l i_m)$$
$$= \sum a_k i_k . \sum b_l c_m i_l i_m = \sum a_k i_k . \left(\sum b_l i_l . \sum c_m i_m\right).$$

La multiplication de plusieurs quantités complexes est donc associative, dès que celle des unités imaginaires jouit de cette propriété.

De plus,

$$\left(\sum a_k i_k + \sum b_k i_k\right) . \sum c_m i_m = \sum (a_k + b_k) i_k . \sum c_m i_m$$
$$= \sum (a_k + b_k) c_m i_k i_m = \sum a_k c_m i_k i_m + \sum b_k c_m i_k i_m$$
$$= \sum a_k i_k . \sum c_m i_m + \sum b_k i_k . \sum c_m i_m.$$

Donc la multiplication des quantités complexes est distributive par rapport à son premier facteur. On prouverait de même qu'elle est distributive par rapport à son second facteur, et par suite qu'elle est *complètement distributive* (art. 34).

48. De la définition de la multiplication résulte son uniformité. Mais nous verrons que cette uniformité n'est pas toujours *réciproque*, et qu'un produit peut, dans certains cas, rester invariable, lorsqu'*un seul* de ses facteurs varie. Par conséquent, l'opération inverse de la multiplication, c'est-à-dire la division, peut quelquefois être indéterminée.

49. Un produit de deux quantités complexes se présente immédiatement sous la forme d'un polynôme du second degré par rapport aux unités imaginaires, et par conséquent sous la forme d'une quantité complexe d'un *degré* supérieur au premier. Si l'on conservait le produit sous cette forme, il

faudrait regarder les carrés et les produits des unités imaginaires primitives comme de nouvelles unités, que l'on pourrait appeler unités imaginaires *du second degré*. De même, un produit de trois facteurs amènerait des unités *du troisième degré*, et ainsi de suite.

Dans la théorie des quaternions, nous n'aurons pas l'occasion d'employer de système de cette nature, et nous ferons seulement usage de quantités complexes formant un système *limité*, dans lequel les carrés et les produits deux à deux des unités primitives seront exprimables par des fonctions linéaires de ces mêmes unités. On conclura de là sans peine qu'il en sera de même des puissances et des produits quelconques de ces unités, et par suite des puissances et des produits quelconques des quantités complexes qui en sont formées.

50. Dans les calculs où il n'entre qu'une seule unité imaginaire, combinée avec des quantités réelles, la multiplication est commutative, et se fait exactement par les mêmes règles que celle des quantités réelles.

51. Soit maintenant un système d'unités imaginaires $i_1, i_2, \ldots, i_n$, au nombre de n, et supposons que le produit de deux quelconques de ces unités soit de la forme

$$i_k i_l = f_0 + f_1 i_1 + \ldots + f_n i_n.$$

En considérant les produits de l'une des unités i_1 par les $n-1$ autres, on devra donc avoir $n-1$ équations de la forme

$$\begin{aligned} i_1 i_2 &= b_0 + b_1 i_1 + \ldots + b_n i_n, \\ i_1 i_3 &= c_0 + c_1 i_1 + \ldots + c_n i_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_1 i_n &= h_0 + h_1 i_1 + \ldots + h_n i_n, \end{aligned}$$

que l'on peut écrire ainsi

$$\begin{aligned} (b_2 - i_1) i_2 + b_3 i_3 + \ldots + b_n i_n &= -b_0 - b_1 i_1, \\ c_2 i_2 + (c_3 - i_1) i_3 + \ldots + c_n i_n &= -c_0 - c_1 i_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_2 i_2 + h_3 i_3 + \ldots + (h_n - i_1) i_n &= -h_0 - h_1 i_1. \end{aligned}$$

En ajoutant ces équations, multipliées respectivement par les déterminants mineurs correspondants à la $(k-1)^{\text{ième}}$ ligne verticale du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} b_2 - i_1 & b_3 & \dots & b_n \\ c_2 & c_3 - i_1 & \dots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_2 & h_3 & \dots & h_n - i_1 \end{vmatrix},$$

considérés comme *premiers facteurs*, il viendra

$$\Delta i_k = -(b_0 + b_1 i_1)\frac{\partial \Delta}{\partial b_k} - \dots - (h_0 + h_1 i_1)\frac{\partial \Delta}{\partial h_k}.$$

Le carré i_1^2 étant supposé exprimé, comme les autres produits, par une fonction linéaire des n unités,

$$i_1^2 = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \dots + a_n i_n,$$

substituons les valeurs précédentes de

$$\Delta i_2, \Delta i_3, \dots, \Delta i_n$$

dans l'expression

$$\Delta i_1^2 = a_0 \Delta + a_1 \Delta i_1 + a_2 \Delta i_2 + \dots + a_n \Delta i_n.$$

On obtiendra une équation algébrique entre i_1 et des quantités réelles (¹), et cette équation sera du degré $n+1$ par rapport à i_1, le coefficient de la plus haute puissance étant l'unité. Or, si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ les racines de cette équation, lesquelles sont des quantités complexes ordinaires, l'équation pourra s'écrire identiquement sous la forme

$$(i_1 - \alpha_1)(i_1 - \alpha_2) \dots (i_1 - \alpha_{n+1}) = 0.$$

On conclut de là que, si l'on admet qu'un produit ne puisse s'évanouir qu'autant qu'un de ses facteurs s'annule, l'unité imaginaire i_1 devra être une des racines d'une équation algé-

---

(¹) Ou des quantités complexes ordinaires, si l'on admet l'extension indiquée dans la Note de l'art. 39.

brique, et par conséquent une quantité de la forme $p+q\sqrt{-1}$, absolument comme l'unité imaginaire des quantités complexes ordinaires.

52. Il devra en être de même pour les autres unités $i_2, \ldots, i_n$; de sorte que, si l'on désigne par $j_1, j_2, \ldots, j_n$ des quantités assujetties à avoir pour carré -1, mais pouvant représenter des objets de nature quelconque, et restant toujours irréductibles les unes aux autres par voie d'addition, on pourra poser

$$\begin{aligned} i_1 &= p_1 + q_1 j_1, \\ i_2 &= p_2 + q_2 j_2, \\ &\cdots\cdots \\ i_n &= p_n + q_n j_n. \end{aligned}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'expression d'une quantité complexe quelconque

$$a_0 + a_1 i_1 + \ldots + a_n i_n,$$

cette expression prendra la forme

$$b_0 + b_1 j_1 + \ldots + b_n j_n,$$

et par conséquent une quantité complexe peut toujours être représentée au moyen d'unités imaginaires dont chacune a pour carré -1.

Ainsi nous supposerons, dans tout ce qui va suivre, que les unités imaginaires sont choisies de manière que leur carré soit l'unité négative.

53. Ces conclusions devraient être modifiées, si l'on admettait dans les calculs l'introduction de l'unité imaginaire ordinaire i, concurremment avec l'unité imaginaire i_1, en la considérant comme irréductible avec elle. Alors le théorème fondamental de la théorie des équations algébriques n'aurait plus lieu, et un produit pourrait s'annuler sans qu'aucun de ses facteurs devînt égal à zéro.

Considérons, par exemple, l'équation

$$z^2+1=0,$$

et, pour la résoudre, posons

$$z=x+yi_1.$$

L'équation deviendra

$$x^2-y^2+2i_1xy+1=0,$$

et elle sera satisfaite si on la partage dans les deux équations

$$x^2-y^2+1=0, \qquad xy=0,$$

qui donnent les systèmes de solutions

$$\begin{array}{lllll} x= & +i, & -i, & 0, & 0, \\ y= & 0, & 0, & +1, & -1, \end{array}$$

et par suite, si i_1 est considéré comme irréductible avec i, l'équation $z^2+1=0$ admettra les quatre solutions

$$z=+i, \quad -i, \quad +i_1, \quad -i_1.$$

De cette manière le premier membre z^2+1, qui est identiquement égal à

$$(z+i)(z-i),$$

pourra s'annuler sans qu'aucun des facteurs $z+i$, $z-i$ s'annule.

Si l'on opère donc simultanément avec plusieurs unités imaginaires irréductibles entre elles, une équation algébrique pourra admettre plus de racines qu'il n'y a d'unités dans son degré.

§ II.

Des nombres alternés.

54. Pour donner un exemple du calcul d'un système de quantités complexes, prenons celui qui a été proposé pour la première fois par M. H. Grassmann en 1844, et que Cauchy a traité depuis sous le nom de *Clefs algébriques*.

Dans ce système, la multiplication des unités imaginaires est soumise aux règles suivantes :

1° Le produit de deux unités change de signe quand on intervertit l'ordre des facteurs,

$$i_k i_l = -i_l i_k\ ;$$

d'où il résulte que

2° Le produit d'une unité par elle-même est nul,

$$i_k i_k = 0\,.$$

Ces règles étant posées, on a, pour le produit de deux quantités complexes quelconques

$$\text{A} = \sum a_k i_k\,, \quad \text{B} = \sum b_l i_l\,,$$

$$\text{AB} = \sum \begin{vmatrix} a_k & a_l \\ b_k & b_l \end{vmatrix} i_k i_l\,,$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\text{BA} = \sum \begin{vmatrix} b_k & b_l \\ a_k & a_l \end{vmatrix} i_k i_l = -\text{AB}\,.$$

Donc, dans ce système, le produit de deux quantités complexes change de signe lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs; d'où il résulte que le produit d'une quantité complexe par elle-même s'annûle,

$$\text{A}\,.\,\text{A} = 0\,.$$

On voit là un exemple d'un système dans lequel l'annulation d'un produit n'entraîne pas celle de l'un des facteurs.

55. Si l'on compare la règle de l'alternance des signes dans la multiplication avec la règle qui sert à fixer le signe d'un terme d'un déterminant, on voit que, dans les deux cas, si l'on part d'un terme où tous les facteurs soient rangés dans leur ordre naturel, et que l'on considère ce terme comme ayant le signe +, par exemple, le signe d'un produit formé par une disposition quelconque des mêmes facteurs sera, dans les deux cas, celui de —1 élevé à une puissance égale au

nombre des ***dérangements*** que présentent les facteurs pris deux à deux. Ainsi, la disposition BDEAC présentant les 5 dérangements BA, DA, DC, EA, EC, on aura

$$\text{BDEAC} = (-1)^5 \text{ABCDE}.$$

56. Il résulte de là que, si les quantités complexes A, B, ... représentent des rayons ou lignes droites ***dirigées*** dans le plan ou dans l'espace (*voir* le Chapitre suivant), le produit de deux rayons OA = A, AB = B représentera, en grandeur et en position, l'aire du parallélogramme construit sur OA et AB, c'est-à-dire le produit OA.AB sin OAB. Le produit de trois rayons OA = A, OB = B, OC = C est, en grandeur et en position, le volume du parallélipipède construit sur ces trois rayons.

En effet, soit

$$\text{A} = a_1 i_1 + a_2 i_2, \qquad \text{B} = b_1 i_1 + b_2 i_2;$$

on aura, par ce qui précède,

$$\text{AB} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} i_1 i_2.$$

De même, si l'on fait

$$\begin{aligned} \text{A} &= a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3, \\ \text{B} &= b_1 i_1 + b_2 i_2 + b_3 i_3, \\ \text{C} &= c_1 i_1 + c_2 i_2 + c_3 i_3, \end{aligned}$$

on aura

$$\text{ABC} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} i_1 i_2 i_3.$$

Or on sait que les multiplicateurs de $i_1 i_2$ et de $i_1 i_2 i_3$ sont les valeurs numériques de l'aire et du volume en question.

57. Dans ce système, la division est indéterminée. On a, en effet, n étant un nombre réel quelconque,

$$\text{AX} = \text{A}(\text{X} + n\text{A}),$$

puisque $\text{A}^2 = 0$. Si donc on pose

$$\text{AX} = \text{B},$$

et que $\frac{B}{A}$ soit une des solutions de cette équation, la valeur générale du quotient sera

$$x = \frac{B}{A} + nA,$$

ou encore

$$x \equiv \frac{B}{A}, \text{ mod. } A.$$

58. *Décomposition des déterminants en facteurs.*

Le produit des facteurs

$$(a'_1 i_1 + a'_2 i_2 + \dots + a'_n i_n) \dots (a^{(n)}_1 i_1 + a^{(n)}_2 i_2 + \dots + a^{(n)}_n i_n)$$
$$= \sum a'_k a''_l \dots a^{(n)}_m . i_k i_l \dots i_m,$$
$$(k, l, \dots, m = 1, 2, \dots, n),$$

où les indices k, l, ..., m doivent être permutés de toutes les manières possibles, les produits contenant deux indices égaux disparaissant, peut s'écrire, en désignant par $[kl \dots m]$ le facteur ± 1, suivant que le nombre des dérangements de la suite k, l, ..., m est pair ou impair,

$$= i_1 i_2 \dots i_n \sum [kl \dots m] a'_k a''_l \dots a^{(n)}_m$$

$$= i_1 i_2 \dots i_n \begin{vmatrix} a'_1 & a''_1 & \dots & a^{(n)}_1 \\ a'_2 & a''_2 & \dots & a^{(n)}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_n & a''_n & \dots & a^{(n)}_n \end{vmatrix}.$$

Ainsi un déterminant quelconque peut se décomposer en un produit de facteurs complexes.

59. Si l'on considère le produit

$$(a'_1 i_1 + \dots + a'_n i_n) \dots (a^{(p)}_1 i_1 + \dots + a^{(p)}_n i_n)$$
$$= \sum a'_k a''_l \dots a^{(p)}_m . i_k i_l \dots i_m,$$
$$(k, l, \dots, m = 1, 2, \dots n),$$

et que p soit $> n$, les p nombres k, l, ..., m, dont les valeurs doivent être prises dans la suite 1, 2, ..., n, ne pourront pas être tous inégaux entre eux. Donc le produit $i_k i_l \dots i_m$ s'annu-

lera toujours, et par suite aussi le produit des facteurs complexes.

Pour $p = n$, on a la formule relative aux déterminants.

Pour $p < n$, on pourra partager les termes de la somme $\sum a'_k \dots a^{(p)}_m . i_k \dots i_m$ en sommes partielles correspondantes aux diverses combinaisons possibles de n nombres p à p. Chacune de ces sommes partielles formera un déterminant. Donc le produit des p facteurs complexes sera la somme, multipliée par $i_1 i_2 \dots i_n$, de tous les déterminants que l'on peut former avec les éléments du tableau

$$\begin{array}{c} a'_1 , a''_1 , \dots , a^{(p)}_1 , \\ \dots\dots\dots\dots \\ a'_n , a''_n , \dots , a^{(p)}_n , \end{array}$$

en prenant les lignes horizontales p à p de toutes les manières possibles, c'est-à-dire que

$$(a'_1 i_1 + \dots + a'_n i_n) \dots (a^{(p)}_1 i_1 + \dots + a^{(p)}_n i_n)$$
$$= \sum | a'_{k_1} a''_{k_2} \dots a^{(p)}_{k_p} | . i_{k_1} i_{k_2} \dots i_{k_p} ,$$
$$(k_1 , k_2 , \dots , k_p = 1 , 2 , \dots , n).$$

Multipliant cette équation par

$$(a^{(p+1)}_1 i_1 + \dots + a^{(p+1)}_n i_n) \dots (a^{(n)}_1 i_1 + \dots + a^{(n)}_n i_n)$$
$$= \sum | a^{(p+1)}_{k_{p+1}} a^{(p+2)}_{k_{p+2}} \dots a^{(n)}_{k_n} | . i_{k_{p+1}} i_{k_{p+2}} \dots i_{k_n} ,$$

on aura le théorème de Laplace

$$| a'_1 a''_2 \dots a^{(n)}_n | = \sum [k_1 k_2 \dots k_n] . | a'_{k_1} a''_{k_2} \dots a^{(p)}_{k_p} | . | a^{(p+1)}_{k_{p+1}} a^{(p+1)}_{k_{p+1}} \dots a^{(n)}_{k_n} | .$$

60. On a de même les autres théorèmes fondamentaux de la théorie des déterminants. Soit

$$\begin{array}{c} A' = a'_1 i_1 + \dots + a'_n i_n , \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ A^{(n)} = a^{(n)}_1 i_1 + \dots + a^{(n)}_n i_n . \end{array}$$

On a

$$A'A''\dots A^{(n)} = |\,a'_1 a''_2 \dots a^{(n)}_n\,| \,.\, i_1 i_2 \dots i_n \,.$$

Si de même

$$B' = \sum b'_k A^{(k)}\,, \dots, B^{(n)} = \sum b^{(n)}_k A^{(k)}\,.$$

on aura

$$B'B''\dots B^{(n)} = |\,b'_1 b''_2 \dots b^{(n)}_n\,| \,.\, A' \dots A^{(n)}\,,$$

et par suite

$$B'B''\dots B^{(n)} = |\,b'_1 b''_2 \dots b^{(n)}_n\,| \,.\, |\,a'_1 a''_2 \dots a^{(n)}_n\,| \,.\, i_1 i_2 \dots i_n \,.$$

Or si la substitution des A dans les B donne

$$B' = \sum c'_k i_k\,, \dots, B^{(n)} = \sum c^{(n)}_k i_k\,,$$

où, en général,

$$c^{(l)}_k = b^{(l)}_1 a'_k + b^{(l)}_2 a''_k + \dots + b^{(l)}_n a^{(n)}_k\,,$$

on en conclura

$$B'B''\dots B^{(n)} = |\,c'_1 c''_2 \dots c^{(n)}_n\,| \,.\, i_1 i_2 \dots i_n\,,$$

d'où l'on tire le théorème de la multiplication des déterminants,

$$|\,c'_1 c''_2 \dots c^{(n)}_n\,| = |\,a'_1 a''_2 \dots a^{(n)}_n\,| \,.\, |\,b'_1 b''_2 \dots b^{(n)}_n\,| \,.$$

61. Soient les équations linéaires

$$\sum a^{(k)}_1 x_k = B', \dots, \sum a^{(k)}_n x_k = B^{(n)}\,.$$

Multiplions-les respectivement par $i_1, \dots, i_n$, et ajoutons. On a alors, en posant

$$A' = \sum a'_l i_l, \quad \dots, \quad A^{(n)} = \sum a^{(n)}_l i_l, \quad B = \sum B^{(l)} i_l\,,$$

l'équation

$$\sum A^{(k)} x_k = B\,.$$

Multipliant les deux membres par $A'' \dots A^{(n)}$, il ne reste dans le premier membre que le terme en x_1, d'où

$$x_1 A'A''A''' \dots A^{(n)} = B A'' A''' \dots A^{(n)}\,,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{X}_1 \,.\, | a'_1 a''_2 \ldots a_n^{(n)} | = | \mathrm{B} a''_2 a'''_3 \ldots a_n^{(n)} | .$$

62. Nous renvoyons, pour plus de détails sur cette étude, aux ouvrages de Grassmann (¹) et aux Mémoires de Saint-Venant (²) et de Cauchy (³).

(¹) *Die Wissenschaft der extensiven Grössen*; 1844.

Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Charakteristik; 1847.

Ausdehnungslehre; 1862.

(²) *Comptes rendus*, t. XXI, p. 620; 1845.

(³) *Comptes rendus*, t. XXXVI, p. 70, 129, 161; 1853.

CHAPITRE III.

TRANSLATIONS; ADDITION DES VECTEURS.

---

§ Ier.

Définitions et principes généraux.

63. Soient O un point fixe de l'espace, pris pour origine, et A un autre point quelconque. Ce point sera déterminé lorsque la droite OA, qui va de l'origine O à ce point, sera donnée *en grandeur et en direction.*

Nous appellerons cette droite, suivant laquelle nous concevons que s'effectue le *transport* de O en A, le *rayon vecteur,* ou simplement le *vecteur* du point A.

Cette translation de O en A peut s'effectuer en déplaçant parallèlement à lui-même un système solide quelconque, lié au point mobile, le déplacement ayant lieu de manière que chaque point du système décrive une droite égale et parallèle à OA.

Nous dirons, dans ce cas, que tous les points du système subissent des translations égales à OA. En d'autres termes, nous dirons que deux translations qui font décrire à deux points des droites *égales et parallèles,* sont *égales* entre elles.

Si donc nous considérons les *droites dirigées* ou *vecteurs* comme représentant des *translations* d'un système quelconque, nous dirons que *deux vecteurs sont égaux, lorsqu'ils sont de même longueur, parallèles et dirigés dans le même sens.*

64. Si l'on fait glisser le système parallèlement à lui-même le long d'une droite AB, puis le long d'une autre droite BC, tous les points du système décriront deux côtés de parallélo-

grammes égaux, et parviendront en même temps aux extrémités des diagonales de ces parallélogrammes. Or, toutes ces diagonales, étant égales et parallèles, formeront des vecteurs égaux.

Le résultat de ces deux translations successives est donc, pour un point quelconque, le même que celui de la translation unique et déterminée AC. On voit donc que la combinaison AB⌒BC de deux translations est une opération ***uniforme.***

De plus, si ***un seul*** des vecteurs AB,BC varie, AC variera. Donc l'opération est ***complètement uniforme*** (art. 21).

65. Si, au lieu de faire décrire au point A les côtés AB,BC du parallélogramme ABCD, on lui avait fait décrire les deux autres côtés AD,DC, on aurait encore obtenu pour résultat la même translation AC. Or, puisque l'on a AD=BC et DC=AB en grandeur et en direction, la première combinaison de translations étant représentée par AB⌒BC, la seconde pourra l'être par BC⌒AB. Donc, on a

$$AB \frown BC = AC = BC \frown AB,$$

c'est-à-dire que l'opération est ***commutative.***

66. Faisons maintenant parcourir au point mobile les trois arêtes contiguës d'un parallélipipède ABCDEFGH, savoir, AB, BF, FG. On a évidemment

$$AB \frown BF = AF, \qquad AF \frown FG = AG;$$
$$BF \frown FG = BG, \qquad AB \frown BG = AG.$$

Donc

$$(AB \frown BF) \frown FG = AB \frown (BF \frown FG).$$

L'opération est donc ***associative.***

Enfin, si l'un des vecteurs AB, BC s'annule, le résultat AB⌒BC se réduit à l'autre vecteur.

Donc cette opération de la combinaison des translations possède toutes les propriétés essentielles de l'addition ordi-

Pareillement, *si, entre trois vecteurs* AB, CD, EF, *non parallèles à un même plan, il existe une relation à coefficients réels* l, m, n, *de la forme*

$$(6) \qquad l.\mathrm{AB} + m.\mathrm{CD} + n.\mathrm{EF} = 0,$$

sans qu'aucun de ces vecteurs soit nul, l'équation se décomposera en trois autres,

$$l = 0, \quad m = 0, \quad n = 0.$$

Car la somme de deux termes du premier membre de (6) est un vecteur situé dans un plan parallèle à ces deux termes, et par suite ne peut être égal et opposé au troisième terme.

72. En vertu de la définition de l'addition, un vecteur quelconque A est égal à la somme de ses projections sur trois axes rectangulaires quelconques $\mathrm{O}\iota_1$, $\mathrm{O}\iota_2$, $\mathrm{O}\iota_3$.

Désignons par $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ des unités de longueur portées sur ces trois axes, dans le sens positif, à partir de l'origine. Tout vecteur porté sur $\mathrm{O}\iota_1$, par exemple, pourra être représenté par le produit de ι_1 multiplié par un facteur numérique, positif ou négatif, suivant que cette longueur devra être portée dans le sens positif $\mathrm{O}\iota_1$ ou dans le sens opposé, et dont la valeur numérique exprimera la longueur absolue de ce vecteur.

Par conséquent, les trois composantes ou projections de A sur les trois axes pourront s'exprimer respectivement par

$$a_1\iota_1, \quad a_2\iota_2, \quad a_3\iota_3,$$

a_1, a_2, a_3 étant les projections algébriques de A sur les axes. On aura ainsi

$$(7) \qquad \mathrm{A} = a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_3.$$

73. Les trois vecteurs $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ n'étant pas parallèles à un même plan, il ne pourra, d'après ce que nous avons vu dans l'art 71, exister entre eux aucune relation à coefficients réels, de la forme

$$a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_3 = 0,$$

A l'aide de l'équation (4), on pourra toujours remplacer la soustraction d'un vecteur AB par l'addition de son réciproque BA, de sorte que, au lieu de AC—AB, on pourra écrire AC+BA.

69. Si l'on ajoute deux vecteurs situés en ligne droite, la somme sera un vecteur situé sur la même droite, et dont la longueur sera la somme ou la différence des longueurs des deux premiers, selon que ceux-ci seront de même sens ou de sens contraire.

Si l'on ajoute un nombre n de vecteurs égaux en grandeur et en direction, la somme sera le *produit* de l'un de ces vecteurs par n, et ce produit sera un vecteur de même direction et de longueur n fois plus grande.

Du cas de n entier, on passe, par le raisonnement connu, au cas de n fractionnaire ou incommensurable.

70. D'après cela, AB étant un vecteur quelconque, $n.\mathrm{AB}$ représentera un vecteur de même sens ou de sens contraire, selon que n sera positif ou négatif. Ainsi, *une relation entre deux vecteurs* AB, CD, *de la forme*

$$\mathrm{AB} + n.\mathrm{CD} = 0,$$

où n est un nombre RÉEL, *exprime qne les droites* AB *et* CD *sont parallèles.*

On a évidemment

$$n.\mathrm{AB} = - n.\mathrm{BA}.$$

71. On conclut de là cette proposition importante :

S'il existe entre deux vecteurs AB, CD *une relation de la forme*

$$m.\mathrm{AB} + n.\mathrm{CD} = 0 \tag{5}$$

(*m et n étant* RÉELS), *sans que* AB *et* CD *soient parallèles ni nuls, il faudra nécessairement que les coefficients m et n soient nuls séparément, de sorte que l'équation se décomposera dans les deux suivantes,*

$$m = 0, \quad n = 0.$$

76. Si l'on représente par $OA = A$ un vecteur constant, et par t un facteur numérique variable, l'équation

(8) $$OM = t.OA, \quad \text{ou} \quad x = At$$

représentera le vecteur d'un point quelconque de la ligne OA, considérée comme prolongée indéfiniment dans les deux sens. Ce sera donc l'*équation de cette droite.*

Il est clair que cette équation n'est pas altérée, si l'on prend pour variable, au lieu de t, le produit kt de t par un facteur réel k, ce qui revient au même que si l'on avait multiplié par k le coefficient complexe A. Donc, *l'équation d'une droite passant par l'origine n'est pas altérée, lorsqu'on multiplie le coefficient angulaire* A *par une constante réelle quelconque.* (*Voir* art. 74.)

77. Si l'on ajoute au vecteur OM, déterminé par l'équation (8), un vecteur constant $OB = MN = B$, l'équation

(9) $$ON = x = At + B$$

représentera une droite parallèle à la droite (8), et passant par l'extrémité B du vecteur OB.

78. Si l'on veut exprimer les vecteurs constants A et B au moyen de leurs composantes rectangulaires, l'équation d'une droite quelconque passant par le point B prendra la forme

(10) $$x = (a_1 t + b_1)i_1 + (a_2 t + b_2)i_2 + (a_3 t + b_3)i_3 .$$

Ainsi le vecteur d'un point variable d'une droite est représenté par une expression de la forme

$$x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + x_3 i_3 ,$$

linéaire et homogène par rapport aux unités imaginaires i_1, i_2, i_3, et dont les coefficients x_1, x_2, x_3 sont des fonctions réelles et du premier degré d'une variable réelle t.

79. x étant le vecteur d'une droite, et λ, L des constantes, dont la première soit un nombre réel, la seconde un vecteur quelconque,

$$x' = \lambda x + L$$

sera l'équation d'une droite, cette expression étant toujours réductible à la forme (10); et, de plus, cette droite sera parallèle à la droite qui a pour vecteur x.

80. Considérons maintenant l'équation

$$\text{(11)} \qquad \mathrm{x} = \mathrm{A}t + \mathrm{B}u + \mathrm{C},$$

A, B, C étant trois vecteurs constants, et t, u deux variables indépendantes réelles. Pour $u =$ const., l'équation représentera une droite parallèle à la droite $\mathrm{x} = \mathrm{A}t + \mathrm{C}$. En faisant varier u, on aura une série de parallèles à la même droite, et, en faisant partout $t = 0$, on voit que toutes ces parallèles rencontreront la droite $\mathrm{x} = \mathrm{B}u + \mathrm{C}$. Donc le lieu de ces parallèles, représenté par l'équation (11), est un plan passant par le point C, et parallèle aux deux vecteurs A et B.

En remplaçant les vecteurs A, B, C par leurs composantes rectangulaires, on voit que le vecteur d'un plan est une fonction linéaire complexe de deux variables indépendantes réelles, et s'exprime sous la forme

$$\text{(12)} \quad \mathrm{x} = (a_1 t + b_1 u + c_1)\mathrm{I}_1 + (a_2 t + b_2 u + c_2)\mathrm{I}_2 + (a_3 t + b_3 u + c_3)\mathrm{I}_3.$$

D'après cela, toute équation de la forme

$$\mathrm{x} = \mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \ldots,$$

où A, B, ... sont des vecteurs constants, et $\alpha, \beta, \ldots$ des fonctions linéaires réelles, représentera une droite ou un plan, suivant que $\alpha, \beta, \ldots$ dépendront d'une ou de deux indéterminées.

81. L'équation d'une droite passant par deux points donnés A, B est de la forme

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{x} = \mathrm{A} + (\mathrm{B} - \mathrm{A})t,$$

ou, ce qui revient au même, en changeant t en $1 - t$, de la forme

$$\text{(14)} \qquad \mathrm{x} = (\mathrm{A} - \mathrm{B})t + \mathrm{B}.$$

L'équation (13) peut s'écrire

$$x + (t-1)A - tB = 0,$$

ou, en multipliant par un facteur indéterminé, et désignant par p, q, r les trois coefficients obtenus, dont la somme est nulle,

$$(15) \qquad pA + qB + rX = 0,$$

avec la condition

$$(16) \qquad p + q + r = 0.$$

Donc, *en égalant à zéro une fonction linéaire et homogène de trois vecteurs, dont les coefficients réels ont une somme nulle, on exprime que les extrémités des trois vecteurs sont en ligne droite.*

De même, l'équation du plan qui contient les extrémités de trois vecteurs A, B, C peut s'écrire sous la forme

$$(17) \qquad X = A + (B - A)t + (C - A)u,$$

ou

$$(18) \qquad pA + qB + rC + sX = 0,$$

p, q, r, s étant tels que

$$(19) \qquad p + q + r + s = 0;$$

en sorte que les relations (18) et (19) expriment que les extrémités des quatre vecteurs A, B, C, X sont dans un même plan.

§ II.

Applications.

82. Étant donnés trois points A, B, C, le point B sera le milieu de la droite qui joint les deux autres, si l'on a

$$AB = BC, \quad \text{ou} \quad OB - OA = OC - OB,$$

et, par suite,

$$OB = \frac{OA + OC}{2}.$$

83. Si A, B, C, D sont les sommets d'un parallélogramme, on aura $AB = DC$, ou, O étant le point de concours des diagonales,

$$OB - OA = OC - OD,$$

d'où

$$AO - OC = BO - OD.$$

$AO - OC$ et $BO - OD$ étant des segments pris respectivement sur les deux diagonales, c'est-à-dire sur deux droites non parallèles, il s'ensuit (art. 71) que l'égalité précédente ne peut subsister que si l'on a séparément

$$AO - OD = 0, \qquad BO - OD = 0.$$

donc le point de concours des diagonales est le le milieu de chacune d'elles.

84. *Si la somme de trois vecteurs est nulle, on peut construire un triangle dont les côtés soient égaux et parallèles à ces vecteurs.*

Soient, par exemple, AA', BB', CC' les trois médianes d'un triangle ABC. On a

$$\begin{aligned} BA' &= A'C = \tfrac{1}{2}BC, & AA' &= AB + BA', \\ CB' &= B'A = \tfrac{1}{2}CA, & BB' &= BC + CB', \\ AC' &= C'B = \tfrac{1}{2}AB, & CC' &= CA + AC', \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} AA' + BB' + CC' &= (AB + BC + CA) + (BA' + CB' + AC') \\ &= \tfrac{3}{2}(AB + BC + CA) = 0. \end{aligned}$$

Donc avec les trois médianes d'un triangle, transportées parallèlement à elles-mêmes, on peut construire un autre triangle.

85. Soient maintenant A', B', C' trois points divisant proportionnellement les trois côtés d'un triangle, de manière que l'on ait

$$BA' = n.BC, \qquad CB' = n.CA, \qquad AC' = n.AB.$$

En opérant comme dans l'article précédent, on trouvera

$$AA' + BB' + CC' = (1 + n)(BC + CA + AB) = 0.$$

Donc les trois droites AA', BB', CC' sont égales et parallèles aux trois côtés d'un triangle, ce qui est une généralisation de la propriété des médianes.

Cherchons le point de rencontre G de BB' et de CC'. Posons, pour cela,

$$BG = u.BB', \qquad CG = v.CC',$$

u et v étant deux inconnues réelles. On a

$$BB' = BA + AB' = BA + (n-1)CA,$$
$$CC' = CA + AC' = CA + n.AB,$$

d'où

$$BG = BA + AG = u[BA + (n-1)CA],$$
$$CG = CA + AG = v(CA + n.AB).$$

Éliminant AG entre ces deux équations, il vient

$$BA - CA = u[BA + (n-1)CA] - v(CA - n.BA).$$

Nous sommes ainsi parvenus, en exprimant toutes les lignes au moyen de BA et de CA, à obtenir une équation linéaire et homogène entre deux vecteurs non parallèles, équation qui, d'après l'art. 71, se décompose en deux autres,

$$1 = u + nv, \qquad -1 = (n-1)u - v,$$

d'où

$$u = \frac{1-n}{1-n+n^2}, \qquad v = \frac{n}{1-n+n^2}.$$

Pour $n = \frac{1}{2}$, $u = v = \frac{2}{3}$, d'où l'on conclut aisément que les trois médianes concourent en un même point.

Réciproquement, pour que les trois droites AA', BB', CC' concourent en un même point, il faut que, en appelant G' le point de concours de CC' et de AA', et faisant

$$CG' = v'.CC', \qquad AG' = w.AA',$$

d'où

$$v' = \frac{1-n}{1-n+n^2}, \qquad w = \frac{n}{1-n+n^2},$$

la valeur de v' soit égale à celle de v trouvée précédemment, ce qui exige que l'on ait $1 - n = n$, ou $n = \frac{1}{2}$.

86. Si A représente un point de masse m, les moments de ce point par rapport aux trois plans $O i_2 i_3, O i_3 i_1, O i_1 i_2$ seront $m a_1, m a_2, m a_3$. Les sommes des moments de plusieurs points A, A', ..., de masses $m, m', \ldots$, par rapport aux mêmes plans, savoir $\sum m a_1, \sum m a_2, \sum m a_3$, seront les composantes du vecteur

$$\sum m \mathrm{A} = i_1 \sum m a_1 + i_2 \sum m a_2 + i_3 \sum m a_3.$$

En égalant ces sommes de moments à $A_1 \sum m, A_2 \sum m, A_3 \sum m$, on voit que le vecteur du centre de gravité A sera déterminé par l'équation

$$A = \frac{\sum m \mathrm{A}}{\sum m}.$$

Dans le cas de n points de masses égales, A deviendra le centre des moyennes distances,

$$A = \frac{\sum \mathrm{A}}{n}.$$

87. Le centre de gravité de l'aire d'un triangle homogène est situé au point de concours G des médianes. Or, nous avons vu (art. 85) que

$$\mathrm{AG} = \tfrac{2}{3}\mathrm{AA'}, \quad \mathrm{BG} = \tfrac{2}{3}\mathrm{BB'}, \quad \mathrm{CG} = \tfrac{2}{3}\mathrm{CC'},$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{AG} + \mathrm{BG} + \mathrm{CG} = \tfrac{2}{3}(\mathrm{AA'} + \mathrm{BB'} + \mathrm{CC'}) = 0,$$

ou, O étant une origine quelconque,

$$\mathrm{OG} - \mathrm{OA} + \mathrm{OG} - \mathrm{OB} + \mathrm{OG} - \mathrm{OC} = 0,$$
$$\mathrm{OG} = \tfrac{1}{3}(\mathrm{OA} + \mathrm{OB} + \mathrm{OC}).$$

G coïncide donc avec le centre des moyennes distances des trois sommets.

88. Considérons actuellement le tétraèdre DABC. Le centre de gravité se trouve sur chacune des droites qui joignent deux sommets D, A aux centres de gravité G, G_1 des deux faces respectivement opposées ABC, BCD, droites qui se coupent évidemment, puisqu'elles sont situées l'une et l'autre dans le plan qui passe par les deux sommets et par le milieu I de l'arête opposée BC. Soit H le point de concours des droites DG, AG_1, et posons

$$DH = u.DG, \qquad AH = v.AG_1.$$

Nous avons AH=AD+DH. D'ailleurs

$$2DI = DB + DC, \qquad 2AI = AB + AC,$$

$$DG = \tfrac{1}{3}(DA + DB + DC) = \tfrac{1}{3}(DA + 2DI),$$

$$AG_1 = \tfrac{1}{3}(AD + AB + AC) = \tfrac{1}{3}(AD + 2AI) = \tfrac{1}{3}(3AD + 2DI);$$

donc

$$DH = u.\tfrac{1}{3}(DA + 2DI), \qquad AD + DH = v.\tfrac{1}{3}(2DI - 3DA),$$

d'où, en éliminant DH,

$$DA = u.\tfrac{1}{3}(DA + 2DI) + v.\tfrac{1}{3}(3DA - 2DI),$$

et, par la règle de l'art. 71,

$$1 = \tfrac{1}{3}u + v, \qquad 0 = \tfrac{2}{3}u - \tfrac{2}{3}v,$$

ce qui donne $u = v = \frac{3}{4}$.

On a maintenant, O étant une origine quelconque,

$$OH = OA + AH = OB + BH = OC + CH = OD + DH,$$

d'où

$$4OH = OA + OB + OC + OD + AH + BH + CH + DH.$$

Or, $AH = \frac{3}{4}AG_1 = \frac{1}{4}(AB + AC + AD)$, etc., d'où, en faisant la somme,

$$AH + BH + CH + DH = 0.$$

Donc

$$OH = \tfrac{1}{4}(OA + OB + OC + OD),$$

et partant le centre de gravité d'un tétraèdre est le centre des moyennes distances des quatre sommets.

89. Si deux triangles ABC, A'B'C' ont leurs sommets situés deux à deux sur des droites AA', BB', CC', concourant en un même point O, les points de concours des côtés correspondants BC et B'C', CA et C'A', AB et A'B' seront en ligne droite.

En effet, désignons, pour abréger, par $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots$ les vecteurs OA, OB, ... (art. 68, note), de sorte que le vecteur AB, par exemple, sera représenté par $\mathrm{B} - \mathrm{A}$. Si nous désignons par $\alpha, \beta, \ldots$ des coefficients réels, et par $\mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}$ les trois points de concours en question, on aura d'abord

$$\mathrm{A}' = \alpha\mathrm{A}, \quad \mathrm{B}' = \beta\mathrm{B}, \quad \mathrm{C}' = \gamma\mathrm{C}.$$

Ensuite, D étant à la fois sur BC et sur B'C',

$$\mathrm{D} - \mathrm{B} = \delta(\mathrm{C} - \mathrm{B}), \quad \mathrm{D} - \mathrm{B}' = \delta'(\mathrm{C}' - \mathrm{B}') = \delta'(\gamma\mathrm{C} - \beta\mathrm{B}),$$

d'où, en éliminant D,

$$(1 - \delta)\mathrm{B} + \delta\mathrm{C} = (1 - \delta')\beta\mathrm{B} + \delta'\gamma\mathrm{C},$$

et, par la règle de l'art. 71,

$$1 - \delta = \beta(1 - \delta'), \quad \delta = \gamma\delta',$$

ce qui donne

$$\delta' = \frac{1 - \beta}{\gamma - \beta}, \quad \delta = \gamma \cdot \frac{1 - \beta}{\gamma - \beta}.$$

La valeur de D devient alors

$$\mathrm{D} = \frac{1 - \beta}{\gamma - \beta} \cdot \mathrm{C}' - \frac{1 - \gamma}{\gamma - \beta}\mathrm{B}'.$$

En formant par des permutations de lettres les deux expressions analogues pour les autres points de rencontre, on obtiendra ainsi les trois relations

$$(\gamma - \beta)\mathrm{D} = (1 - \beta)\mathrm{C}' - (1 - \gamma)\mathrm{B}',$$
$$(\alpha - \gamma)\mathrm{E} = (1 - \gamma)\mathrm{A}' - (1 - \alpha)\mathrm{C}',$$
$$(\beta - \alpha)\mathrm{F} = (1 - \beta)\mathrm{B}' - (1 - \beta)\mathrm{A}',$$

d'où l'on tire

$$(1-\alpha)(\gamma-\beta)\,\mathrm{D}+(1-\beta)(\alpha-\gamma)\,\mathrm{E}+(1-\gamma)(\beta-\alpha)\,\mathrm{F}=0.$$

On a d'ailleurs identiquement

$$(1-\alpha)(\gamma-\beta)+(1-\beta)(\alpha-\gamma)+(1-\gamma)(\beta-\alpha)=0.$$

Donc (art. 81) les trois points D, E, F sont en ligne droite.

On pourrait encore le voir en calculant le vecteur $\mathrm{DE}=\mathrm{E}-\mathrm{D}$, ce qui donne

$$\frac{(\gamma-\beta)(\alpha-\gamma)}{1-\gamma}\,.\,\mathrm{DE}=(\gamma-\beta)\,\mathrm{A}'+(\alpha-\gamma)\,\mathrm{B}'+(\beta-\alpha)\,\mathrm{C}'.$$

Le second membre, ne changeant pas par la permutation cyclique des lettres, représente aussi la valeur de $\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)}{1-\alpha}\mathrm{EF}$; donc les deux vecteurs DE, EF, ayant un rapport réel, sont en ligne droite.

CHAPITRE IV.

DES BIRADIALES EN GÉNÉRAL.

---

90. Pour passer d'un point M de la droite OM à un autre point N de la même droite, il faut multiplier OM par un nombre qui exprime le rapport des longueurs OM, ON, ce nombre $\frac{ON}{OM}$ étant pris positivement ou négativement, suivant que le vecteur ON sera de même sens que OM ou de sens contraire. On aura ainsi

$$ON = OM \times \frac{ON}{OM}, \tag{1}$$

en supposant les signes + ou — incorporés dans les notations OM, ON, qui représentent les deux vecteurs.

91. Supposons maintenant que les deux vecteurs OM, ON ne soient pas en ligne droite. Alors le passage du point M au point N exigera une double opération :

1° Il faudra multiplier la longueur absolue de OM, que nous désignerons par $\mathfrak{T}OM$, par le rapport $\frac{\mathfrak{T}ON}{\mathfrak{T}OM}$ de la longueur de ON à celle de OM.

2° Il faudra faire tourner la direction du vecteur OM dans le plan OMN, de l'angle MON que font entre elles les deux directions.

Nous considérerons ces deux opérations comme ne formant qu'une seule opération composée, à laquelle nous donnerons le nom de *biradiale*. Provisoirement, nous désignerons cette bira-

diale par la notation MON; ou encore, en représentant par a le *module* $\dfrac{\mathfrak{T}\mathrm{ON}}{\mathfrak{T}\mathrm{OM}}$ ou $\mathfrak{T}\mathrm{MON}$ de la biradiale, et par α son *argument*, c'est-à-dire l'angle MON, considéré à la fois *en grandeur et en position* (¹), nous dénoterons la biradiale par le symbole

$$\mathrm{a}_\alpha,$$

dont on fait souvent usage dans la théorie des quantités complexes ordinaires.

92. On voit que, si l'angle MON était nul, cette double opération se réduirait à la simple multiplication par le rapport $\dfrac{\mathfrak{T}\mathrm{ON}}{\mathfrak{T}\mathrm{OM}}$, dans lequel se changerait la biradiale MON. On satisfera donc au principe de permanence en donnant à la double opération représentée par une biradiale quelconque le nom de *multiplication par cette biradiale,* et nous justifierons cette dénomination par l'examen des propriétés des biradiales. Nous aurons ainsi, par définition,

(2) $$\mathrm{ON} = \mathrm{OM} \times \mathrm{MON}.$$

Par la même raison, nous pourrons considérer la biradiale MON, par laquelle il faut multiplier OM pour obtenir ON, comme étant le *rapport* des vecteurs OM, ON, considérés *en grandeur et en direction,* et nous poserons, comme définition,

(3) $$\mathrm{MON} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OM}}.$$

93. Les deux parties dont se compose la double opération peuvent être exécutées séparément et dans un ordre quelconque. En effet, au lieu de commencer par multiplier OM par le rapport des longueurs

$$\frac{\mathfrak{T}\mathrm{ON}}{\mathfrak{T}\mathrm{OM}} = \mathrm{a},$$

pour le faire ensuite tourner de l'angle $\mathrm{MON} = \alpha$, ce qui

(¹) C'est-à-dire comme ayant une *grandeur* et un *sens déterminés* dans un *plan déterminé.*

revient à multiplier le résultat $OM \times \mathbf{a} = OM'$ par la biradiale $M'ON$, de module $\frac{\mathfrak{T}ON}{\mathfrak{T}OM'} = 1$ et d'argument α, et que nous représenterons, d'après le système de notation adopté, par le symbole 1_α; on peut commencer par faire tourner OM de l'angle MON, ou le multiplier par 1_α, puis multiplier le résultat $OM \times 1_\alpha = ON'$ par le module $\mathbf{a}$, de sorte que l'on a les égalités

(4) $$OM \times \mathbf{a}_\alpha = (OM \times \mathbf{a}) \times 1_\alpha = (OM \times 1_\alpha) \times \mathbf{a}.$$

Le facteur 1_α, dont l'effet consiste en un changement de direction sans changement de longueur, s'appelle une *biradiale unitaire* ou un *verseur*.

Un verseur se réduit à l'unité, quand son argument devient nul, c'est-à-dire que l'on a

(5) $$1_0 = 1.$$

94. Si l'on définit l'opération $\mathbf{a}_\alpha$, dont l'effet équivaut aux multiplications successives par $\mathbf{a}$ et par 1_α, comme étant le *produit* de ces deux symboles $\mathbf{a}$ et 1_α, c'est-à-dire si l'on pose

(6) $$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{a} \times 1_\alpha.$$

l'égalité

(7) $$OM \times (\mathbf{a} \times 1_\alpha) = (OM \times \mathbf{a}) \times 1_\alpha = OM \times \mathbf{a} \times 1_\alpha$$

prendra la forme associative.

De plus, des égalités (4) il résulte que l'on devra poser, pour être conséquent avec la définition d'un produit,

(8) $$\mathbf{a} \times 1_\alpha = 1_\alpha \times \mathbf{a},$$

pour que ces égalités subsistent encore pour $OM = 1$. La multiplication d'un nombre par un verseur est donc commutative.

Observons encore que, si l'un des facteurs, OM ou $\mathbf{a}$, s'annule, le produit s'annule; si l'un des facteurs $OM, \mathbf{a}, 1_\alpha$ se réduit à l'unité, le résultat se réduit au produit des deux autres facteurs.

Ainsi la nouvelle opération possède les propriétés les plus

essentielles de la multiplication ordinaire, ce qui justifie le nom de *multiplication* que nous lui avons donné.

95. Ces propriétés subsistent encore, quand on multiplie un même vecteur consécutivement par plusieurs biradiales. Les multiplications successives que subira la longueur du vecteur par le fait des modules des biradiales pourront se combiner d'une manière quelconque entre elles et avec les multiplications par les verseurs. On pourra, par exemple, multiplier le vecteur par le produit de tous les modules, dans lequel les facteurs pourront être intervertis comme on voudra, puis multiplier le résultat successivement par chacun des verseurs, en observant seulement que, dans cette dernière opération, il n'est pas permis d'altérer l'ordre des facteurs (art. 156); ou bien on pourra multiplier d'abord par les verseurs, puis par les modules, etc.

96. Il résulte de là une conséquence importante : c'est que l'on peut isoler les deux éléments d'une biradiale, en traitant séparément la multiplication par le module, laquelle rentre dans les règles ordinaires de l'Algèbre, et la multiplication par le verseur, laquelle exige une étude spéciale. Nous pourrons ainsi, si nous le jugeons convenable, supposer d'abord le module égal à l'unité, le rétablissement de la valeur quelconque du module donné pouvant se faire facilement à la fin de l'opération.

97. Si l'on considère le vecteur mobile qui passe de la direction OM à la direction ON comme appartenant à un système solide, ce passage pourra s'effectuer en faisant tourner de l'angle α, autour de O, le plan qui passe par OM et ON; ou, si l'on veut, en faisant tourner le système de l'angle α autour d'un axe A, perpendiculaire au plan MON. Dans ce mouvement, tout vecteur OP, situé dans le plan MON (ou dans un plan parallèle), décrira aussi un angle $POQ = \alpha$. Les deux verseurs correspondants aux angles MON et POQ devront être

considérés comme égaux, puisque la multiplication par chacun d'eux produit sur le système une rotation identique. En associant ces deux verseurs avec le même module, on aura ainsi deux biradiales identiques quant à leurs effets.

Nous dirons donc que deux biradiales sont *égales*, lorsqu'elles sont *coplanaires*, c'est-à-dire situées dans un même plan (ou dans des plans parallèles), et qu'elles ont des modules égaux et des arguments égaux et de même sens.

Ainsi deux biradiales MON, POQ seront dites égales, lorsque les deux triangles MON, POQ, qu'elles déterminent, seront situés dans un même plan (ou dans des plans parallèles), et qu'ils seront *directement* semblables.

On peut donc toujours supposer le premier rayon OM d'une biradiale MON égal à l'unité, et représenter ainsi une biradiale par un triangle situé dans le plan donné, et ayant pour côtés l'unité et le module, et pour angle compris entre ces côtés l'argument.

La multiplication d'un vecteur OP par la biradiale 1ON consistera donc à construire, sur OP homologue à O1, un triangle OPQ directement semblable à O1N; OQ sera le produit cherché.

98. Si l'on fait passer un vecteur variable (de grandeur et de position) de l'état OM à l'état ON en le multipliant par la biradiale MON, puis de l'état ON à l'état OP en multipliant le produit ON par la biradiale NOP, il est clair que l'on aurait pu parvenir directement au même résultat final OP, en multipliant OM par la biradiale unique MOP.

Cette biradiale MOP, qui peut remplacer à elle seule l'effet combiné des biradiales MON et NOP, est dite le produit de ces deux biradiales. Nous justifierons cette dénomination, à laquelle nous a conduits l'application du principe de permanence, en montrant que la combinaison des opérations indiquées par les biradiales MON, NOP jouit des propriétés essentielles de la multiplication ordinaire, à l'exception de la

propriété commutative, qui n'a plus lieu lorsque les deux biradiales sont situées dans des plans différents.

On aura donc, par définition, quels que soient les vecteurs, OM, ON, OP,

$$\text{MON} \times \text{NOP} = \text{MOP}, \tag{9}$$

ou, si l'on représente (art. 92) chaque biradiale sous la forme d'un rapport de deux vecteurs,

$$\frac{\text{ON}}{\text{OM}} \times \frac{\text{OP}}{\text{ON}} = \frac{\text{OP}}{\text{OM}}, \tag{10}$$

formule qui satisfait évidemment à la loi de permanence.

99. Deux biradiales qui ont, comme MON et NOP, un vecteur ON commun, sont dites *collinéaires*. Nous venons de voir que, dans ce cas, la multiplication se fait immédiatement.

Si l'on propose de multiplier entre elles deux biradiales non collinéaires MON, POQ, on commencera par les transformer en deux biradiales collinéaires. Pour cela, soit OR l'intersection des deux plans de ces biradiales; on fera tourner celles-ci auteur de O, dans leurs plans respectifs, jusqu'à ce que le rayon final ON de la *première* et le rayon *initial* OP de la *seconde* viennent se placer tous les deux dans la direction OR. Soient M'ON', P'OQ' les nouvelles positions des biradiales; on multipliera les deux vecteurs de l'une d'elles, de la seconde, par exemple, par un nombre k tel que $\text{OP}' \times k$ devienne égal à ON' (il suffira pour cela de mener N'Q' parallèle à P'Q'); on aura alors deux biradiales collinéaires M'ON', N'OQ', dont le produit sera M'OQ'.

100. On appelle biradiales *conjuguées* deux biradiales *coplanaires* dont les modules sont égaux, et les arguments égaux et de signe contraire. Ainsi les deux biradiales MON, M'ON' seront conjuguées, si elles sont situées dans le même plan (ou dans des plans parallèles), et que les rapports de leurs vecteurs $\frac{\text{ON}}{\text{OM}}, \frac{\text{ON}'}{\text{OM}'}$ soient égaux, tandis que les arguments MON, M'ON'

sont de même grandeur, mais dirigés en sens contraire. En d'autres termes, deux biradiales sont conjuguées, lorsque les triangles qu'elles déterminent sont situés dans le même plan (ou dans des plans parallèles) et *inversement* semblables.

Nous désignerons les conjuguées d'une biradiale $\mathrm{MON} = A$ par les mêmes lettres surmontées d'un trait horizontal, ou, suivant les cas, par le signe $\mathfrak{C}$, abrégé de *conjugué*. Ainsi nous écrirons

$$\mathfrak{C}\,\mathrm{MON} = \mathfrak{C}A = \overline{\mathrm{MON}} = \bar{A}.$$

101. Si l'on opère sur un vecteur quelconque par la biradiale MON, et sur le produit, par la biradiale conjugée $\overline{\mathrm{MON}}$, les effets des deux rotations égales et de sens contraire se détruiront, et le vecteur sera ainsi ramené sur sa première direction, tandis que sa longueur aura été multipliée deux fois par le module.

Donc, conformément à la définition du produit de deux biradiales, nous dirons que *le produit d'une biradiale A par sa conjuguée $\bar{A}$ est égal au carré du module commun* $\mathfrak{T}A$, de sorte que

$$(11) \qquad A.\bar{A} = \bar{A}.A = (\mathfrak{T}A)^2.$$

Si la biradiale A est unitaire et se réduit à son verseur 1_α, la biradiale conjuguée sera $\bar{1}_\alpha = 1_{-\alpha}$, et le produit de la biradiale par sa conjuguée,

$$1_\alpha . \bar{1}_\alpha = 1_\alpha . 1_{-\alpha} = 1,$$

sera égal à l'unité absolue.

102. Si l'on a une relation quelconque entre des biradiales coplanaires, qui forment une certaine figure dans le plan, et que l'on construise la figure symétrique de celle-là par rapport à un axe quelconque tracé dans le plan, tous les éléments étant les mêmes de part et d'autre, la relation devra subsister. Or, dans le passage de la première figure à sa symétrique, chaque biradiale se change dans sa conjuguée. On a donc ce principe important, qu'une relation entre des biradiales copla-

naires continue à subsister, lorsqu'on y remplace toutes les biradiales par leurs conjuguées.

Nous verrons que le même principe subsiste également pour les biradiales quelconques.

103. Pour étudier les questions qui dépendent de la multiplication des biradiales, nous considérerons à part le cas où les biradiales sont toutes coplanaires, et celui où elles sont situées dans des plans différents.

Nous avons traité ailleurs le premier de ces deux cas, principalement au point de vue algébrique. Nous le reprendrons ici à un point de vue différent, celui de l'établissement d'une méthode analytique pour la solution des problèmes de Géométrie plane, comme introduction à l'application des biradiales quelconques à la Géométrie des trois dimensions.

CHAPITRE V.

DES BIRADIALES COPLANAIRES OU QUANTITÉS COMPLEXES ORDINAIRES. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

§ Ier.

Principes généraux.

104. Une biradiale située dans un plan donné peut être déplacée dans ce plan [97] de manière que son rayon initial vienne coïncider avec un axe fixe $0x$, tracé dans ce plan, et à partir duquel on compte les angles, et que, de plus, la longueur de ce rayon soit réduite à l'unité de longueur 01. On pourra donc toujours représenter une biradiale de ce plan par 1 0A, 0A étant un vecteur dont la longueur représente le module de la biradiale, et faisant avec $0x$ un angle égal à l'argument de cette biradiale.

Dès lors, la biradiale 1 0A sera complètement déterminée par le vecteur 0A, et pourra être représentée par ce vecteur. Nous dirons, dans ce sens, ***multiplier par le vecteur*** 0A, pour signifier la multiplication par la biradiale 1 0A. Telle est la définition de la multiplication des deux vecteurs situés dans un même plan que l'origine $0x$ des angles.

En conséquence, multiplier un vecteur 0M par la biradiale 1 0A ou par le vecteur 0A (en supposant tout situé dans le même plan) revient à construire sur 0M, homologue à 01, un triangle 0MN directement semblable à 01A, et le produit sera représenté par le vecteur 0N ou par la biradiale 1 0N.

105. En se rappelant ce que l'on établit dans la théorie des

quantités complexes ordinaires, on voit que la multiplication de deux biradiales coplanaires, ou de deux vecteurs situés dans un plan passant par la droite, origine des angles, est une opération jouissant des propriétés suivantes :

1° Elle est uniforme;

2° Elle est associative;

3° Elle est commutative;

4° Elle est distributive [1];

5° Elle satisfait à la relation $a \frown 0 = 0 \frown a = 0$;

6° et à la relation $a \frown 1 = 1 \frown a = a$.

Donc cette opération, possédant toutes les propriétés de la multiplication des quantités réelles, doit être soumise absolument aux mêmes règles.

106. Le produit de deux biradiales coplanaires ou de deux vecteurs a donc pour module le produit des modules, et pour

---

[1] La propriété distributive de la multiplication peut se démontrer simplement de la manière suivante :

Soit $OM + ON = OM + MP = OP$ *(fig. 1)*, la somme de deux vecteurs. Si l'on multiplie ces trois lignes par le module a du multiplicateur, on aura le triangle $OM'P'$, semblable à OMP, et dans lequel

Fig. 1.

$$OP' = OM' + M'P',$$

c'est-à-dire

$$OP \times a = OM \times a + MP \times a,$$

ce qui montre d'abord que la multiplication est distributive dans le cas d'un multiplicateur réel.

En faisant maintenant tourner un côté OM' du triangle $OM'P'$ de l'angle α de la biradiale multiplicateur, les deux autres côtés tourneront aussi chacun du même angle α. Donc chacune des lignes OM, $ON = MP$, OP aura été, en vertu de cette double opération, multipliée par la biradiale a_α, et par conséquent l'égalité $OP_1 = OM_1 + M_1P_1$ pourra s'écrire

$$OP \times a_\alpha = (OM + ON) \times a_\alpha = OM \times a_\alpha + ON \times a_\alpha,$$

c'est-à-dire que l'opération est distributive relativement au multiplicande. Comme elle est, en outre, commutative, on en conclut (art. 14) qu'elle est complètement distributive.

argument la somme des arguments des deux facteurs. Ce résultat montre immédiatement que l'opération est associative et commutative.

107. On conclut de là les règles données en Algèbre pour la division et l'élévation aux puissances entières des biradiales ou des vecteurs.

108. Toutes ces opérations sont uniformes, bien que l'argument d'une biradiale donnée soit toujours susceptible d'une infinité de valeurs différentes, la biradiale ne changeant pas quand on augmente son argument d'un multiple quelconque de 2π. On peut en dire autant de toutes les opérations qui conduisent à des expressions rationnelles par rapport aux biradiales.

Mais il n'en est plus de même des opérations dans lesquelles il entre des expressions fractionnaires des arguments, telles que les extractions de racines. On sait que, dans ce cas, on a des valeurs multiformes.

109. Si l'on projette un vecteur a sur deux axes rectangulaires, sur l'un desquels les longueurs sont mesurées avec l'unité réelle, tandis qu'elles sont mesurées sur l'autre au moyen de l'unité *imaginaire* i, ou du vecteur unitaire perpendiculaire à l'axe Ox, ce vecteur prendra la forme $a_0 + a_1 i$, et les opérations faites sur les vecteurs conduiront généralement, comme on le sait d'ailleurs, à des expressions de cette même forme.

Ce vecteur unitaire perpendiculaire à Ox représente (art. 104), la ***biradiale unitaire rectangle*** ou le ***verseur rectangle***, que nous avons désigné précédemment par $1_{\frac{\pi}{2}}$.

110. Le module du vecteur $a = a_0 + a_1 i$ étant désigné par $\mathbf{a}$ et son argument par α, le vecteur pourra se mettre sous la forme

$$a = \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{a} \, . \, 1_\alpha = \mathbf{a} (\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

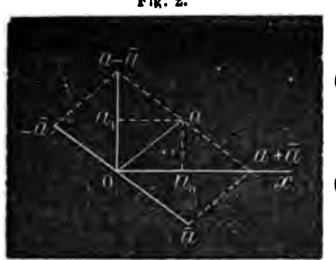
cos α et sin α étant les projections du vecteur unitaire $\mathbf{1}_\alpha$ sur les deux axes rectangulaires.

En changeant α en $-\alpha$, ou, ce qui revient au même, i en $-i$, on a le vecteur conjugué

$$\bar{a} = \mathbf{a}_{-\alpha} = \mathbf{a}\,.\,\mathbf{1}_{-\alpha} = \mathbf{a}(\cos\alpha - i\sin\alpha) = a_0 - a_1 i.$$

On a immédiatement, entre deux vecteurs conjugués, les relations suivantes :

Fig. 2.



(1) $$\frac{a+\bar{a}}{2} = a_0 = \mathbf{a}\cos\alpha$$
= la partie réelle,

(2) $$\frac{a-\bar{a}}{2} = a_1 i = i\mathbf{a}\sin\alpha$$
= la partie imaginaire,

où l'on voit que $a+\bar{a}$ et $a-\bar{a}$ représentent deux vecteurs perpendiculaires entre eux;

(3) $$\sqrt{a\,.\,\bar{a}} = \mathbf{a},$$

(4) $$\sqrt{\frac{a}{\bar{a}}} = \mathbf{1}_\alpha,$$

formules qui déterminent les composantes du vecteur, son module et son verseur.

111. Étant donnés deux vecteurs

$$a = \mathbf{a}_\alpha, \qquad b = \mathbf{b}_\beta,$$

dont les conjugués sont

$$\bar{a} = \mathbf{a}_{-\alpha}, \qquad \bar{b} = \mathbf{b}_{-\beta},$$

on aura

(5) $$\sqrt{a\,.\,b} = \sqrt{\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}}\,.\,\mathbf{1}_{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)},$$

expression d'un vecteur qui est la *moyenne proportionnelle bissectrice* des deux vecteurs proposés a, b.

On a, de plus,

$$(6)\qquad \sqrt{\frac{a}{\bar{a}} : \frac{b}{\bar{b}}} = 1_{\alpha-\beta},$$

pour l'expression du verseur de la biradiale formée par ces deux vecteurs.

§ II.

Applications à la Géométrie élémentaire.

112. On sait de quelle manière on établit, au moyen du théorème de Moivre, les formules fondamentales de la goniométrie.

Soient maintenant $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ les longueurs des côtés d'un triangle ABC; α, β, γ les angles extérieurs, suppléments des angles intérieurs A, B, C du triangle; on a entre ces angles la relation

$$(7)\qquad \alpha + \beta + \gamma = 2\pi.$$

Si l'on désigne par θ l'argument du côté c, ceux des côtés a, b seront respectivement

$$\theta + \beta, \quad \text{et} \quad \theta + \beta + \gamma = \theta + 2\pi - \alpha,$$

cette dernière valeur pouvant être remplacée par $\theta - \alpha$. La somme des trois vecteurs AB, BC, CA étant nulle, on a l'équation fondamentale de la trigonométrie plane

$$(8)\qquad \mathbf{c}_\theta + \mathbf{a}_{\theta+\beta} + \mathbf{b}_{\theta-\alpha} = 0.$$

En y faisant $\theta = 0$, il vient

$$\mathbf{c} + \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{b}_{-\alpha} = 0,$$

d'où l'on tire, par la séparation du réel et de l'imaginaire,

$$\mathbf{c} = -\mathbf{a}\cos\beta - \mathbf{b}\cos\alpha, \quad \mathbf{a}\sin\beta - \mathbf{b}\sin\alpha = 0.$$

Si l'on fait $\theta = -\frac{1}{2}(\beta+\gamma) = -\pi + \frac{1}{2}\alpha$, il vient

$$-\mathbf{c}_{\frac{1}{2}\alpha} + \mathbf{a}_{\frac{1}{2}(\beta-\gamma)} - \mathbf{b}_{-\frac{1}{2}\alpha} = 0,$$

d'où l'on tire les formules de Mollweide

$$\mathbf{a}\cos\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) - (\mathbf{b}+\mathbf{c})\cos\tfrac{1}{2}\alpha = 0,$$
$$\mathbf{a}\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma) + (\mathbf{b}-\mathbf{c})\sin\tfrac{1}{2}\alpha = 0,$$

que l'on ramènerait à la forme habituelle en remplaçant α, β, γ par $\pi - A, \pi - B, \pi - C$.

113. En désignant par Δ l'aire du triangle ABC, on a

$$2\Delta = \mathbf{b}.\mathbf{c}.\sin\alpha.$$

Si l'on représente maintenant par b, c les deux *vecteurs* AC, AB, rapportés à l'origine A, on a (art. 110)

$$\mathbf{b} = \sqrt{b.\bar{b}}, \quad \mathbf{c} = \sqrt{c.\bar{c}},$$

$$\text{verseur AC} = \sqrt{\frac{b}{\bar{b}}}, \quad \text{verseur AB} = \sqrt{\frac{c}{\bar{c}}},$$

d'où

$$\text{verseur BAC} = \frac{\text{verseur AC}}{\text{verseur AB}} = \sqrt{\frac{b}{\bar{b}}} : \sqrt{\frac{c}{\bar{c}}} = 1_A,$$

$$2i\sin A = 1_A - 1_{-A} = \sqrt{\frac{b}{\bar{b}} : \frac{c}{\bar{c}}} - \sqrt{\frac{\bar{b}}{b} : \frac{\bar{c}}{c}},$$

$$4i\Delta = \sqrt{b\bar{b}.c\bar{c}}\left(\sqrt{\frac{b}{\bar{b}} : \frac{c}{\bar{c}}} - \sqrt{\frac{\bar{b}}{b} : \frac{\bar{c}}{c}}\right) = b\bar{c} - c\bar{b} = \begin{vmatrix} b & \bar{b} \\ c & \bar{c} \end{vmatrix}.$$

Si A n'est plus pris pour origine, on remplacera b, c par $b-a, c-a$, et il viendra

$$4i\Delta = \begin{vmatrix} b-a, & c-a \\ \bar{b}-\bar{a}, & \bar{c}-\bar{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & \bar{a} \\ 1 & b & \bar{b} \\ 1 & c & \bar{c} \end{vmatrix},$$

pour l'expression de l'aire d'un triangle au moyen des vecteurs des trois sommets. En remplaçant a, b, c par $x_1 + y_1 i, x_2 + y_2 i,$

x_1+y_1i, on retrouvera facilement l'expression connue de l'aire du triangle au moyen des coordonnées rectangles de ses sommets.

Par exemple, si les valeurs des trois vecteurs sont

$$a=2-i,\quad b=-1+3i,\quad c=-1-2i,$$

on trouvera

$$4i\Delta=\begin{vmatrix}1, & 2-i\ , & 2+i\\ 1, & -1+3i, & -1-3i\\ 1, & -1-2i, & -1+2i\end{vmatrix}=-30i,$$

d'où $\Delta=-\frac{15}{2}$.

114. En supposant $\Delta=0$, on a la condition pour que trois points a, b, x soient en ligne droite, c'est-à-dire l'équation de la ligne droite menée par les deux points a, b,

$$\begin{vmatrix}1 & x & \bar{x}\\ 1 & a & \bar{a}\\ 1 & b & \bar{b}\end{vmatrix}=0.$$

On pourrait encore obtenir cette équation en éliminant t entre l'équation de la ligne droite (art. 81)

$$x+(t-1)a-tb=0,$$

et sa conjuguée

$$\bar{x}+(t-1)\bar{a}-t\bar{b}=0.$$

Nous allons encore donner quelques exemples de l'application de cette méthode, empruntés pour la plupart aux ouvrages de M. Bellavitis.

115. Soit une droite coupant en A', B', C' les trois côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC. En prenant A pour origine, et désignant, pour abréger, par B, C, ... les vecteurs AB, AC, ..., soient p, q, r, t des indéterminées. Les conditions pour que les

groupes de points (A',B,C),(B',C,A),(C',A,B),(A',B',C') soient situés chacun en ligne droite s'exprimeront par les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \text{A}' + (p-1)\text{B} - p\text{C} = 0, \\ \text{B}' = q\text{C}, \\ \text{C}' = r\text{B}, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \text{D}' + (t-1)\text{B}' - t\text{C}' = 0.$$

Cette dernière équation devient, en vertu des équations (1),

$$-(p-1)\text{B} + p\text{C} + q(t-1)\text{C} - rt\text{B} = 0,$$

équation qui exprime que la somme des deux vecteurs dirigés, l'un suivant AB, l'autre suivant AC, est nulle. Or, *une somme de deux vecteurs de directions différentes ne peut s'annuler, que si chacun de ces vecteurs s'annule séparément.* Donc l'équation précédente se partagera dans les deux suivantes,

$$p - 1 + rt = 0, \qquad p + q(t-1) = 0.$$

Éliminant t entre ces deux équations, il vient

$$(3)\qquad (p-1)q + pr - qr = 0,$$

équation de condition résultant de ce que les points A',B',C' sont en ligne droite.

Or on a

$$\begin{aligned} \text{AC}'.\text{BA}'.\text{CB}' &= \text{C}'.(\text{A}' - \text{B}).(\text{B}' - \text{C}) \\ &= r\text{B}.p(\text{C} - \text{B}).(q-1)\text{C} \\ &= p(q-1)r.\text{AB}.\text{CB}.\text{AC}, \\ \text{BC}'.\text{CA}'.\text{AB}' &= (\text{C}' - \text{B})(\text{A}' - \text{C}).\text{B}' \\ &= (r-1)\text{B}.(p-1)(\text{C} - \text{B}).q\text{C} \\ &= (p-1)q(r-1).\text{AB}.\text{BC}.\text{AC}. \end{aligned}$$

Mais, en ajoutant au coefficient

$$(p-1)\,q\,(r-1)$$

le premier membre de l'égalité (3), qui est nul, le résultat est égal au coefficient

$$p(q-1)r$$

de l'autre produit. Donc, à cause de $CB = -BC$, on a

(4) $$AC'.BA'.CB' = -BC'.CA'.AB'.$$

Dans ces deux produits, les facteurs sont deux à deux situés sur une même droite, et par suite ils ont deux à deux des verseurs égaux ou opposés. Donc l'équation (4) subsiste quand on y considère les vecteurs comme remplacés par leurs modules.

116. Soient ABC un triangle, et AA', BB', CC' des droites concourant en un même point O, et rencontrant les côtés BC, CA, AB en A', B', C'. On aura, en prenant le point O pour origine, et désignant par p, q, r, t, u, v des coefficients réels,

(1) $$\mathrm{A}' = p.\mathrm{A}, \qquad \mathrm{B}' = q.\mathrm{B}, \qquad \mathrm{C}' = r.\mathrm{C},$$
(2) $$BA' = t.BC, \qquad CB' = u.CA, \qquad AC' = v.AB,$$
(3) $$A'C = (1-t)BC, \quad B'A = (1-u).CA, \quad C'B = (1-v).AB.$$

Les deux premières équations (2) peuvent s'écrire, en vertu des équations (1)

$$p.\mathrm{A} - \mathrm{B} = t(\mathrm{C} - \mathrm{B}), \qquad q.\mathrm{B} - \mathrm{C} = u(\mathrm{A} - \mathrm{C}),$$

d'où, en éliminant A,

$$(tu - u + pq)\mathrm{B} + (pu - p - tu)\mathrm{C} = 0,$$

équation qui se partage (art. 115) en deux autres

$$u(1-t) = pq, \qquad tu = -p(1-u).$$

Formant les quatre équations qui se déduisent des deux précédentes par des changements de lettres, on en tire, par multiplication,

$$tuv(1-t)(1-u)(1-v) = (pqr)^2,$$
$$(tuv)^2 = -pqr(1-t)(1-u)(1-v);$$

puis, en multipliant de nouveau et supprimant un facteur commun,

$$(tuv)^3 = -(pqr)^3, \quad \text{d'où} \quad tuv = -pqr,$$

et par suite

$$tuv = (1-t)(1-u)(1-v).$$

Les équations (2) et (3) donneront, par conséquent,

$$BA'.CB'.AC' = A'C.B'A.C'B,$$

égalité qui subsistera encore lorsqu'on y remplacera les vecteurs par leurs modules.

117. Si l'on a une relation identique quelconque entre des quantités $a, b, c, \ldots$, on pourra supposer que ces quantités représentent des vecteurs. En l'interprétant alors conformément au sens que l'on attache aux opérations relatives aux vecteurs, on obtiendra un théorème de géométrie.

Ainsi, on a identiquement

$$(B-A)(D-C)+(D-A)(C-B)+(C-A)(B-D)=0.$$

En supposant que A, B, C, D soient des vecteurs ou des points du plan, la relation subsistera et donnera

$$(1) \qquad AB.CD + AD.BC + AC.DB = 0.$$

Si l'on pose maintenant

$$AB.CD = \lambda.P, \quad AD.BC = \lambda.Q, \quad AC.DB = \lambda.R,$$

les trois vecteurs P, Q, R, dont la somme est nulle en vertu de l'égalité (1), pourront former les trois côtés d'un triangle.

Supposons maintenant que ce triangle se réduise à une droite, ce qui arrivera si l'on a entre les modules la relation

$$(2) \qquad \mathfrak{T}P + \mathfrak{T}Q + \mathfrak{T}R = 0.$$

Alors, si θ est l'argument commun de P et de Q, l'argument de $R = -(P+Q)$ sera égal à $\theta \pm \pi$. Or

$$\arg P = \arg AB + \arg DC, \text{ etc.}$$

Donc

$$\arg AB + \arg CD = \arg AD + \arg BC = \pi + \arg AC + \arg DB,$$

d'où

$$\arg AB - \arg AD + \arg CD - \arg BC = 0,$$

c'est-à-dire, CB' étant le prolongement de BC,

$$\text{angle}\,\mathrm{DAB} + \text{angle}\,\mathrm{B'CD} = 0,$$

ou, en ayant égard au sens des angles,

$$\mathrm{DAB} = \mathrm{DCB'} = \pi - \mathrm{BCD},$$

ce qui indique que le quadrilatère ABCD est inscriptible au cercle. L'égalité (2) n'est autre chose que le théorème de Ptolémée,

$$\mathfrak{T}\mathrm{AB}.\mathfrak{T}\mathrm{CD} + \mathfrak{T}\mathrm{AD}.\mathfrak{T}\mathrm{BC} = \mathfrak{T}\mathrm{AC}.\mathfrak{T}\mathrm{DB}.$$

118. Passons à la solution d'un problème, énoncé par Lagrange dans son Mémoire « *Sur la construction des cartes géographiques* (¹) » :

Trois points R, R', R'' *étant donnés, construire sur une même base* AB *trois triangles dont les sommets soient aux points donnés, et qui soient tels 1° que les différences des angles au sommet* BRA, BR'A, BR''A *soient données; 2° que les raisons des côtés qui comprennent ces angles, c'est-à-dire* $\frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RA}}, \frac{\mathrm{R'B}}{\mathrm{R'A}}, \frac{\mathrm{R''B}}{\mathrm{R''A}}$, *soient entre elles dans des rapports donnés.*

Si l'on désigne par $\mathbf{r}_\rho, \mathbf{r}'_{\rho'}, \mathbf{r}''_{\rho''}$ les trois biradiales ARB, AR'B, AR''B, les données du problème seront les rapports des modules

$$\frac{\mathbf{r}'}{\mathbf{r}} = \mathbf{m}, \quad \frac{\mathbf{r}''}{\mathbf{r}} = \mathbf{n},$$

et les différences des arguments

$$\rho' - \rho = \mu, \quad \rho'' - \rho = \nu.$$

On pourra facilement construire, en grandeur et en direction, deux vecteurs R''G, R'H, tels que l'on ait

$$\frac{\mathrm{R'B}}{\mathrm{R'A}} : \frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RA}} = \mathbf{m}_\mu = \frac{\mathrm{R''G}}{\mathrm{R''A}},$$

$$\frac{\mathrm{R''B}}{\mathrm{R''A}} : \frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{RA}} = \mathbf{n}_\nu = \frac{\mathrm{R'H}}{\mathrm{R'A}}.$$

(¹) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, 1779. — *Œuvres de Lagrange*, t. IV, p. 682. — Lagrange ajoute : « Or ce Problème me paraît assez difficile à résoudre par la Géométrie; et quant à la solution algébrique, je ne l'ai pas tentée.... »

En éliminant de ces équations les quantités,

$$R'A = RA - RR', \quad R'B = RB - RR',$$
$$R''A = RA - RR'', \quad R''B = RB - RR'',$$

pour ne conserver que les deux inconnues RA, RB, il vient

$$(RB - RR').R'R.RA = (RA - RR').R'G.RB,$$
$$(RB - RR'').R'R.RA = (RA - RR'').R'H.RB.$$

Retranchant ces deux égalités l'une de l'autre, et divisant par RB, on obtient, toutes réductions faites,

$$GH.RA = RR'.R'G + RR''.R'H.$$

Si l'on construit les triangles RR'I, RR'K, respectivement semblables à GHR', HGR'', on aura KA = RI, ce qui déterminera le point A.

Pour trouver simplement le point B, on recommencera un calcul semblable, en posant cette fois

$$m_\mu = \frac{R'R}{R'G'}, \qquad n_\nu = \frac{R'R}{R'H'}.$$

110. *Trouver le sommet commun* X *de deux triangles inversement semblables, dont on donne les bases* AD, BC *(fig. 3).*

La condition de similitude inverse de deux triangles revient à celle de l'égalité de la biradiale correspondante à l'un avec la conjuguée de la biradiale correspondante à l'autre, ce qui donne

$$\frac{AX}{AD} = \frac{\overline{BX}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AX} - \overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

La conjuguée de cette équation donne

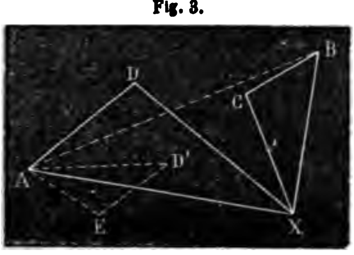
$$\frac{\overline{AX}}{\overline{AD}} = \frac{BX}{BC}, \qquad \text{d'où} \qquad \overline{AX} = \frac{BX.\overline{AD}}{BC},$$

et par suite

$$\frac{AX}{AD} = \frac{BX.\overline{AD}}{\overline{BC}.BC} - \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{(AX - AB).\overline{AD}}{\overline{BC}.BC} - \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

Si l'on prend maintenant, pour plus de simplicité, AB comme axe des x, on aura $\overline{AB} = AB$, et l'équation précédente deviendra

Fig. 8.



$$AX.(AD.\overline{AD} - BC.\overline{BC}) = AB.AD.(\overline{AD} + BC),$$

ou, en désignant par D' le point symétrique de D relativement à AB, et faisant $D'E = BC$,

$$AX[(\mathfrak{T}AD)^2 - (\mathfrak{T}BC)^2] = AB.AD.AE.$$

Le coefficient de AX étant réel, l'argument de AX doit être égal à celui du produit AD.AE, c'est-à-dire à

$$\arg AE + \arg AD = \arg AE - \arg AD' = \text{angle}\, D'AE.$$

Donc l'angle $DAX = CBX = D'AE$, ce qui détermine la position du point X.

120. ***Inscrire dans un cercle un quadrilatère* WXYZ, *dont les côtés* WX, XY, YZ *passent respectivement par des points donnés* A, B, C, *et dont le quatrième côté* ZW *soit de longueur donnée.***

Prenons le centre O du cercle pour origine, et une droite quelconque O1 pour axe des abscisses. La condition pour que les points A, W, X soient en ligne droite donne

$$a - w = p(a - x);$$

éliminant p entre cette équation et sa conjuguée

$$\bar{a} - \bar{w} = p(\bar{a} - \bar{x}),$$

il vient

$$\frac{a - w}{\bar{a} - \bar{w}} = \frac{a - x}{\bar{a} - \bar{x}};$$

ou, à cause de $w.\bar{w} = x.\bar{x} =$ le carré du rayon du cercle $= 1$, en prenant ce rayon pour unité,

$$\frac{(a - w)w}{\bar{a}.w - 1} = \frac{(a - x)x}{\bar{a}.x - 1} = \frac{a(w - x) - (w^2 - x^2)}{\bar{a}(w - x)} = \frac{a - w - x}{\bar{a}},$$

d'où l'on tire

(1) $$w = \frac{a - x}{1 - \bar{a}.x}.$$

On aura de même

(2) $$x = \frac{b - y}{1 - \bar{b}.y},$$

(3) $$y = \frac{c - z}{1 - \bar{c}.z}.$$

Connaissant d'ailleurs la longueur du côté ZW, on connaît l'arc ZW, et par suite l'angle ZOW, et son verseur k. On aura donc

(4) $$w = k.z.$$

De là on tirera, par des substitutions et des constructions successives,

$$w = \frac{a - b + (1 - a.\bar{b})y}{1 - \bar{a}.b + (\bar{a} - \bar{b})y} = \frac{a_1 + f.y}{\bar{f} + \bar{a}_1.y}$$

$$= \frac{a_1 + c.f - (f + a_1.\bar{c})z}{\bar{f} + \bar{a}_1.b - (\bar{a}_1 + \bar{c}.\bar{f})z} = \frac{a_2 - g.z}{\bar{g} - \bar{a}_2.z} = \frac{a_2 - g.\frac{w}{k}}{\bar{g} - \bar{a}_2.\frac{w}{k}},$$

d'où

$$w + k\frac{a_2}{\bar{a}_2}.\frac{1}{\bar{w}} = \frac{g + k\bar{g}}{\bar{a}_2} = h.$$

Le facteur $\frac{a_2}{\bar{a}_2}$, étant un produit de verseurs, a pour module l'unité, ainsi que $\frac{1}{\bar{w}}$. Donc le point W est distant d'un point connu H d'une longueur égale au rayon du cercle donné, et par suite on l'obtiendra par l'intersection de ce cercle avec un cercle égal de centre H.

On voit donc que, pour résoudre le problème, il faut construire $a_1 = a - b = BA$, $1F = -a.\bar{b}$, et par suite $\frac{1F}{OA} = -\frac{O\bar{B}}{O1}$. Faisant le triangle OAP inversement semblable à O1B, on mènera $1F = -OP = PO$. On construira ensuite le triangle

OFQ directement semblable à $O1C$, et l'on mènera $A_1A_2 = OQ$; puis on fera le triangle OA_1R inversement semblable à $O1C$, et l'on mènera $FG = OR$. Soit maintenant $1K$ une corde égale à la longueur donnée du côté ZW, d'où $OK =$ le verseur κ. Menons la bissectrice OM de l'angle $1OK$; elle fera avec OG l'angle $= 1OG - \frac{1}{2}1OM$ et avec le conjugué $O\overline{G}$ l'angle $1O\overline{G} + \frac{1}{2}1OM$. Donc elle sera bissectrice de l'angle que fait OG avec la droite qui a pour argument $1OG + 1OK$, c'est-à-dire avec le vecteur $\overline{G}K = \text{G}'$. En achevant donc le losange $GOG'M$, on aura $OM = \text{G} + \overline{\text{G}}.\kappa$. Il ne restera plus qu'à construire le triangle OMH inversement semblable à $OA_2 1$. La perpendiculaire sur le milieu de OH coupera le cercle donné au sommet W du quadrilatère cherché.

Le rayon $O1$ peut être dirigé arbitrairement. Si on le fait coïncider avec OC, les triangles $O1C, OFG, OA_1R$ se réduiront à trois droites coupées proportionnellement.

121. *Transformation des coordonnées rectilignes.*

Soient α, β les arguments des axes positifs Ox, Oy; α', β' ceux des nouveaux axes Ox', Oy', de même origine. On aura pour la double expression du vecteur d'un point quelconque,

$$z = x_\alpha + y_\beta = x'_{\alpha'} + y'_{\beta'}. \tag{1}$$

En développant, et séparant le réel de l'imaginaire, il vient

$$\left\{\begin{array}{l} x\cos\alpha + y\cos\beta = x'\cos\alpha' + y'\cos\beta', \\ x\sin\alpha + y\sin\beta = x'\sin\alpha' + y'\sin\beta', \end{array}\right. \tag{2}$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} x\sin(\beta-\alpha) = x'\sin(\beta-\alpha') + y\sin(\beta-\beta'), \\ y\sin(\beta-\alpha) = x'\sin(\alpha'-\alpha) + y'\sin(\beta'-\alpha). \end{array}\right. \tag{3}$$

Si l'on transporte l'origine au point $c'_{\gamma'}$, on aura

$$z = x'_{\alpha'} + y'_{\beta'} + c'_{\gamma'},$$

et l'on devra ajouter aux seconds membres des formules (2) les termes $+c'\cos\gamma', +c'\sin\gamma'$, et aux seconds membres des formules (3) les termes $+c'\sin(\beta-\gamma')$, $+c'\sin(\gamma'-\alpha)$.

§ III.

Applications à la théorie des courbes planes.

122. Soit z un point du plan ou un vecteur variable, t une variable réelle. Si l'on établit entre ces deux variables une relation quelconque

(1) $$z = f(t),$$

le lieu géométrique des points pour lesquels elle sera satisfaite sera une ligne déterminée. Car, si l'on remplace z par $x+iy$, et que l'on sépare le réel de l'imaginaire, l'élimination de t conduira à une équation entre les coordonnées x, y du point.

Réciproquement, il est aisé de voir que l'équation de toute courbe plane peut se ramener à la forme (1). Car on peut toujours supposer que les deux coordonnées, rectangulaires ou polaires, de chaque point de la courbe soient exprimées en fonction d'une variable t (qui peut coïncider avec l'une d'elles). Alors $z = x+iy = r.1_r$ sera aussi une fonction donnée de t.

123. D'après ce que nous avons vu, **a** étant une quantité réelle,

(1) $$z = \mathbf{a}t$$

représente l'axe réel 01;

(2) $$z = i\mathbf{a}t$$

l'axe imaginaire $0i$;

(3) $$z = \mathbf{a}_\alpha t$$

une droite faisant avec 01 l'angle α;

(4) $$z = i\mathbf{a}_\alpha t$$

une droite perpendiculaire à la droite (3),

(5) $$z = \mathbf{a}_{\alpha+\beta} t$$

une droite faisant avec la droite (3) l'angle β;

(6) $$z = \mathbf{a}_\alpha t + \mathbf{b}_\beta$$

une droite parallèle à (3) et passant par le point $\mathbf{b}_\beta$.

Si l'on désigne par a, b des points ou des vecteurs,

(7) $$z + (t-1)a - tb = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{z-a}{b-a} = t$$

sera l'équation de la droite qui joint les deux points a et b.

Si

(8) $$z = at, \quad z = a't$$

sont deux vecteurs, le verseur de l'angle qu'ils font entre eux sera

(9) $$1_\theta = \frac{a'}{a};$$

ils seront perpendiculaires entre eux, si $\frac{a'}{a} = \pm i$.

Les bissectrices des angles de ces vecteurs seront données par la formule

(10) $$z = t\sqrt{\pm aa'},$$

où l'on prendra le signe + ou le signe —, suivant que les côtés de l'angle considéré correspondront à des valeurs de t de même signe ou de signe contraire.

Les deux droites

(11) $$z = at + b, \quad z = a't + b'$$

seront parallèles, si $\frac{a'}{a}$ est réel.

L'équation d'une droite menée par le point b perpendiculairement à $z = at$ sera

(12) $$z = iat + b.$$

Celle d'une droite menée par b et faisant avec $z = at$ l'angle θ sera

(13) $$z = 1_\theta at + b.$$

124. Un vecteur a de longueur constante $\mathfrak{T}a$ et d'argument variable, dont une des extrémités est fixe, décrit par son autre extrémité une circonférence. Ainsi

(14) $$z = a.1_t = a_t$$

est l'équation d'un cercle de rayon $\mathfrak{T}a$ et dont le centre est à l'origine;

(15) $$z = a_t + b$$

est l'équation d'un cercle de même rayon et de centre b.

Si le centre d'un cercle de rayon $\mathfrak{T}a$ se transporte le long d'une droite $z = bt$, tandis que le rayon tourne autour du centre, l'extrémité de ce rayon décrira une cycloïde,

(16) $$z = a_t + bt,$$

allongée ou raccourcie, suivant que $\mathfrak{T}b$ sera $> \mathfrak{T}a$ ou $< \mathfrak{T}a$.

Si le centre décrit un autre cercle de rayon $\mathfrak{T}b$,

(17) $$z = a_t + b_{nt}$$

sera l'équation d'une épicycloïde ou d'une hypocycloïde.

On verra de même que

	les équations	représentent
(18)	$z = ta_t$	... une spirale d'Archimède;
(19)	$z = a_t e^{nt}$	... une spirale logarithmique;
(20)	$z = a_t(1 - it)$	... une développante de cercle;
(21)	$z = a_t \cdot \dfrac{t}{\sin t}$	... une quadratrice;
(22)	$z = a\left(t + \dfrac{i}{t}\right)$	... une hyperbole;

etc.

125. Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sont deux demi-diamètres conjugués d'une ellipse, et u, v deux variables réelles assujetties à la condition

$$u^2 + v^2 = 1,$$

l'ellipse pourra être représentée par les équations

$$x = \mathbf{a}u, \qquad y = \mathbf{b}v.$$

En désignant maintenant par α, β les angles que ces diamètres font avec l'axe O1, le rayon vecteur OM du point $M(x, y)$ sera

$$z = x_\alpha = y_\beta = \mathbf{a}_\alpha u + \mathbf{b}_\beta v.$$

ou, en désignant par a, b les deux vecteurs $\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{b}_\beta$,

(1) $$z = au + bv.$$

On peut prendre, par exemple, $u = \cos t$, $v = \sin t$, d'où

(2) $$z = a\cos t + b\sin t.$$

En particulier, si $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ sont les demi-axes de l'ellipse, on peut supposer $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, d'où

(3) $$z = \mathbf{a}\cos t + i\mathbf{b}\sin t.$$

Si dans (2) on remplace t par $t + \frac{\pi}{2}$, on aura un autre point N de l'ellipse, représenté par

(4) $$z_1 = -a\sin t + b\cos t.$$

Or, l'expression

$$Z = z\cos T + z_1\sin T = a\cos(T + t) + b\sin(T + t)$$

représente encore un point de l'ellipse, quel que soit T. Donc $OM = z$ et $ON = z_1$ sont deux demi-diamètres conjugués; de sorte que l'on passe d'un diamètre à son conjugué en faisant varier t de $\frac{\pi}{2}$.

Les équations (2) et (4) donnent

$$z^2 + z_1^2 = a^2 + b^2 = f^2 = (a + ib)(a - ib),$$

d'où l'on conclut que le vecteur f est la moyenne proportionnelle bissectrice des vecteurs $a + ib$, $a - ib$.

On peut encore construire

$$f = \sqrt{a\left(a + \frac{b^2}{a}\right)},$$

en construisant le triangle Obc directement semblable à Oab, d'où $c = \frac{b^2}{a}$, et menant la ligne ad égale et parallèle à Oc. Alors f sera la moyenne proportionnelle bissectrice de Oa et Od. Les deux points f et $f_1 = -f$ ainsi obtenus sont les foyers de l'ellipse.

L'équation $z^2 + z_1^2 = f^2$ donnera

$$z_1^2 = \mathrm{ON}^2 = (f - z)(z - f_1) = \mathrm{M}f . f_1\mathrm{M}.$$

Donc le demi-diamètre conjugué de OM est la moyenne proportionnelle bissectrice des deux rayons vecteurs $\mathrm{M}f$, $f_1\mathrm{M}$; il est donc parallèle à la bissectrice de l'angle formé par un de ces rayons vecteurs et le prolongement de l'autre.

On aurait eu l'équation de l'hyperbole, en supposant, dans (1), u et v assujettis à l'équation

$$u^2 - v^2 = 1,$$

en prenant, par exemple, $u = \mathrm{Ch}\, t$, $v = \mathrm{Sh}\, t$.

126. Étant donnée l'équation d'une courbe

$$z = f(t),$$

la différentielle dz représentera en grandeur et en direction l'élément d'arc de la courbe, et, si l'on désigne par ds la longueur de cet élément et par ω l'angle de la tangente avec l'axe 01, on aura

$$dz = 1_\omega . ds.$$

La valeur de ds est la moyenne proportionnelle entre dz et son conjugué [art. 111, (3)],

$$ds = \sqrt{dz . d\bar{z}};$$

l'angle ω est déterminé [art. 111, (4)] par la formule

$$1_\omega = \sqrt{\frac{dz}{d\bar{z}}}.$$

En différentiant cette dernière expression, on obtient l'angle de contingence $d\omega$. On a

$$d . 1_\omega = d . e^{i\omega} = ie^{i\omega} d\omega = 1_\omega . i d\omega,$$

d'où

$$d\omega = - i . 1_{-\omega}\, d 1_\omega$$

Ainsi, pour la spirale logarithmique, à cause de $d(a_t) = ia_t dt$, on trouve

$$dz = (i+n)\,a_t e^{nt} dt, \qquad \overline{dz} = (-i+n)\,a_{-t} e^{nt} dt$$

$$ds = \sqrt{1+n^2}.e^{nt} dt, \qquad 1_\omega = a_t \sqrt{\frac{n+i}{n-i}}.$$

Pour l'ellipse rapportée à ses axes [art. 125, (3)], on a

$$dz = (-\mathrm{a}\sin t + i\mathrm{b}\cos t)\,dt,$$

d'où résulte

$$ds = \sqrt{\mathrm{a}^2\sin^2 t + \mathrm{b}^2\cos^2 t}.dt.$$

127. Cherchons maintenant l'équation de la tangente. Cette équation étant de la forme [art. 120, (3)]

$$\zeta = z + a\tau,$$

où τ est une variable réelle, le coefficient angulaire a doit être égal [art. 123, (11)] à dz multiplié par une quantité réelle, que nous pourrons choisir égale à $\frac{1}{dt}$. En posant donc

$$\frac{dz}{dt} = z',$$

nous avons, pour l'équation de la tangente au point z,

(1) $$\zeta = z + z'\tau.$$

D'après cela, l'équation de la normale au même point sera

(2) $$\zeta = z + iz'\tau;$$

celle d'une *oblique*, faisant avec la tangente l'angle γ,

(3) $$\zeta = z + 1_\gamma z'\tau.$$

128. *Exemples*. I. D'après cela, la tangente à la spirale logarithmique aura pour équation, à cause de $dz = (n+i)z\,dt$,

$$\zeta = z[1 + (n+i)\tau].$$

L'angle θ qu'elle fait avec le rayon vecteur est donné par une équation de la forme

$$1_\theta = k\frac{z'}{z} = k(p+qi),$$

k étant un coefficient réel, d'où

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{q}{p},$$

et dans le cas actuel

$$1_\theta = k(n+i), \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{1}{n} = \text{const.}$$

II. L'équation de la tangente à l'ellipse est

$$\zeta = a\cos t + b\sin t + (-a\sin t + b\cos t)\tau = z + z_1\tau,$$

z_1 étant le demi-diamètre conjugué de z. Donc la tangente est parallèle au diamètre conjugué du vecteur du point de contact.

ζ étant la somme des deux composantes $a(\cos t - \tau\sin t)$, $b(\sin t + \tau\cos t)$, parallèles l'une à Oa, l'autre à Ob, cette droite rencontrera l'un de ces diamètres lorsque sa composante parallèle à l'autre diamètre sera nulle, c'est-à-dire que, pour $\tau = -\operatorname{tang} t$, la tangente rencontrera Oa en un point dont le vecteur sera

$$\zeta_a = \frac{a}{\cos t}.$$

De même, elle rencontrera Ob au point

$$\zeta_b = \frac{b}{\sin t}.$$

On en tire la relation

$$\frac{a^2}{\zeta_a^2} + \frac{b^2}{\zeta_b^2} = 1.$$

III. La parabole étant engendrée par la composition de deux mouvements, l'un dirigé suivant Oa et proportionnel au carré du temps, l'autre dirigé suivant Ob et proportionnel au temps, son équation sera

$$z = at^2 + bt,$$

a, b étant deux vecteurs constants quelconques.

On aura, pour l'équation de la tangente,

$$\zeta = at^2 + bt + (2at + b)\tau.$$

Cette tangente rencontre $O'a$ pour $\tau = -t$, ce qui donne $\zeta_a = -at^2$. Ce point est donc, par rapport à l'origine, le symétrique de l'extrémité de la composante at^2 parallèle à Oa. La tangente rencontre Ob pour $\tau = -\frac{1}{2}t$, d'où $\zeta_b = -\frac{1}{2}bt$.

Par le point M, menons une droite Mf, qui fasse avec la tangente le même angle que celle-ci fait avec Oa. En introduisant un facteur réel indéterminé k, on aura

$$\frac{1}{k} Mf : MT = MT : Oa,$$

d'où, en remplaçant MT par $\zeta - z = (2at + b)\tau$,

$$Mf = \frac{k\tau^2}{a}(2at + b)^2.$$

Donc $Of = OM + Mf$ a pour valeur

$$(1 + 4k\tau^2)(at^2 + bt) + k\tau^2\frac{b^2}{a},$$

et cette valeur sera indépendante de t, si l'on prend $k\tau^2 = -\frac{1}{4}$, d'où

$$Of = -\frac{b^2}{4a};$$

valeur qu'il est facile de construire. Il existe donc un point fixe par lequel passent toutes les droites faisant avec la tangente un angle égal à l'angle de celle-ci avec Oa. C'est le foyer de la parabole.

129. *Trouver l'angle que forme la tangente d'une courbe avec la droite qui, partant du point de contingence, divise en deux parties égales la corde infiniment petite, menée parallèlement à cette tangente* (1).

---

(1) Carnot, *Géométrie de position*, p. 477.

Représentons par $z = f(t)$ l'équation de la courbe; soient z_0 le milieu de la corde,

$$z_1 = f(t+h), \qquad z_{-1} = f(t-h')$$

ses extrémités. On a

$$z_0 = \frac{z_1 + z_{-1}}{2}.$$

La droite qu'il s'agit de déterminer est la droite

$$\overrightarrow{zz_0} = z_0 - z.$$

Or on a, en désignant par z_1''', z_1'' des quantités quelconques infiniment peu différentes de z''', z'',

$$z_1 = z + hz' + \frac{h^2}{2} z'' + \frac{h^3}{6} z_1''',$$

$$z_{-1} = z - h'z' + \frac{h'^2}{2} z'' - \frac{h'^3}{6} z_1''',$$

d'où, aux quantités du troisième ordre près,

$$z_0 - z = \frac{h-h'}{2} z' + \frac{h^2+h'^2}{2} z_1''.$$

Il faut maintenant déterminer h' de manière que la corde $z_1 - z_{-1}$ soit parallèle à la tangente en z, et par suite qu'elle soit égale à z' multiplié par une quantité réelle. Or on a

$$z_1 - z_{-1} = (h+h')z' + \frac{h^2-h'^2}{2} z'' + \frac{h^3+h'^3}{6} z_1'''$$

$$= (h+h')\left[z' + \frac{h-h'}{2} z'' + \frac{h^2-hh'+h'^2}{6} z_1'''\right].$$

Pour que cette quantité soit à z' dans un rapport réel, il faut que l'on ait

$$\frac{h-h'}{2} z'' + \frac{h^2-hh'+h'^2}{6} z_1''' = \lambda z',$$

ou, en faisant $h - h' = \delta$, et écrivant $\frac{1}{6}\lambda$ au lieu de λ,

$$\delta z'' + \frac{h'^2 + \delta h' + \delta^2}{3} z_1''' = \frac{1}{3}\lambda z',$$

ou enfin, en remarquant que δ doit être infiniment petit du second ordre, négligeant les quantités d'ordre supérieur, et écrivant δ, λ au lieu de $\frac{\delta}{h^2}$, $\frac{\lambda}{h^2}$,

$$3\delta z'' + z''' = \lambda z',$$

λ devant être réel, ainsi que δ. En séparant l'équation en deux autres, on déterminera δ et λ.

On a ensuite, avec le même ordre d'approximation,

$$z_0 - z = \frac{\delta h^2}{2} z' + \frac{h^2}{2} z'',$$

ou simplement, en multipliant par le facteur réel $\frac{2}{h^2}$,

$$z_0 - z = \delta z' + z'',$$

ce qui détermine la droite cherchée.

Exemple. Soit la développante du cercle

$$z = a_t(1 - it).$$

On a

$$z' = a_t . t, \quad z'' = a_t(1 + it), \quad z''' = a_t(2i - t),$$

d'où

$$3\delta(1 + it) + 2i - t = \lambda t,$$

et par suite

$$3\delta - (1 + \lambda)t = 0, \quad 3\delta t + 2 = 0, \quad \delta = -\frac{2}{3t},$$

$$z_0 - z = 1_t\left(\frac{1}{3} + it\right).$$

On a ensuite $\frac{z_0 - z}{z'} = \frac{1}{3t} + i = k . 1_\psi$, ψ étant l'angle de la droite $z_0 - z$ avec la tangente, d'où

$$\operatorname{tang} \psi = 3t.$$

130. Cherchons actuellement le centre de courbure, intersection de deux normales infiniment voisines.

Pour passer d'une normale à la suivante, il faut changer t en $t + dt$. Au point d'intersection des deux normales, ζ doit être le même, et par conséquent $d\zeta$ doit être nul; mais τ aura

dû varier d'une normale à l'autre, et se changer en $\tau + d\tau$. On différentiera donc l'équation

(1) $$\zeta = z + iz'\tau$$

de la normale par rapport à t (dont z dépend) et à τ, en laissant ζ constant, et l'on aura ainsi l'équation

(2) $$0 = z'\left(1 + i\frac{d\tau}{dt}\right) + iz''\tau,$$

laquelle se partagera en deux équations réelles, d'où l'on tirera les valeurs de τ et de $\frac{d\tau}{dt}$ pour le point d'intersection. En mettant pour τ, dans l'équation (1), la valeur trouvée, on aura le ζ du centre de courbure, correspondant au point z.

La longueur du rayon de courbure sera donnée par la formule

(3) $$\rho = \sqrt{(\zeta - z)(\bar{\zeta} - \bar{z})} = \tau\sqrt{z'\bar{z}'}.$$

Si, dans l'équation qui donne le ζ du centre de courbure, on considère t comme variable, on aura l'équation du lieu des centres de courbure ou de la développée de la courbe proposée.

Le même calcul s'applique à la recherche du lieu des intersections successives des obliques représentées par l'équation

(4) $$\zeta = z + 1_\gamma z'\tau;$$

ce lieu porte le nom de *développée imparfaite* de la courbe.

131. *Exemples*. I. L'équation de la parabole, rapportée à son axe principal,

$$z = \mathbf{a}t^2 + i\mathbf{b}t$$

donne, pour l'équation de l'oblique qui fait l'angle γ avec la tangente,

$$\zeta = \mathbf{a}t^2 + i\mathbf{b}t + 1_\gamma(2\mathbf{a}t + i\mathbf{b})\tau,$$

d'où, en différentiant sans faire varier ζ,

$$0 = (2\mathbf{a}t + i\mathbf{b})\left(1 + 1_\gamma\frac{d\tau}{dt}\right) + 1_\gamma . 2\mathbf{a}\tau,$$

puis, en séparant le réel de l'imaginaire,

$$0=2\mathrm{a}t+(2\mathrm{a}t\cos\gamma-\mathrm{b}\sin\gamma)\frac{d\tau}{dt}+2\mathrm{a}\tau\cos\gamma,$$

$$0=\mathrm{b}\quad+(2\mathrm{a}t\sin\gamma+\mathrm{b}\cos\gamma)\frac{d\tau}{dt}+2\mathrm{a}\tau\sin\gamma.$$

On en tire, en éliminant $\frac{d\tau}{dt}$,

$$\tau=-\frac{4\mathrm{a}^2t^2+\mathrm{b}^2}{2\mathrm{ab}}\sin\gamma,$$

d'où, en substituant dans l'équation de l'oblique,

$$\zeta+i\frac{\mathrm{b}^2\sin\gamma}{2\mathrm{a}}.1_\gamma=\mathrm{a}t^2+i\mathrm{b}t-1_\gamma.\sin\gamma\left(\frac{4\mathrm{a}^2t^2+\mathrm{b}^2t}{\mathrm{b}}+2\mathrm{a}it^2\right).$$

En posant $\zeta=\xi+i\eta$, et séparant le réel de l'imaginaire, on aura, par l'élimination de t, l'équation de la développée imparfaite de la parabole en coordonnées rectangulaires.

Pour $\gamma=\frac{\pi}{2}$, $1_\gamma=i$, il vient

$$\zeta-\frac{\mathrm{b}^2}{2\mathrm{a}}=3\mathrm{a}t^2-i.\frac{4\mathrm{a}^2t^3}{\mathrm{b}},$$

d'où l'on déduit aisément l'équation de la développée ordinaire.

II. La cycloïde ordinaire, rapportée à son point de rebroussement, a pour équation, le rayon du cercle générateur étant pris pour unité,

$$z=t+i(1-1_{-t}).$$

L'équation de la tangente sera donc, à cause de $d.1_{-t}=d.e^{-it}=-1_{-t}.idt$,

$$\zeta=t+(\tau+i)(1-1_{-t}).$$

Pour $\tau=i\frac{1+1_{-t}}{1-1_{-t}}=\cot\frac{t}{2}$, on a $\zeta=t+2i$. Donc la tangente passe par l'extrémité supérieure du diamètre du cercle générateur.

L'équation de la normale est

$$\zeta=t+i(1+\tau)(1-1_{-t}).$$

Elle donne $\zeta = t$ pour $\tau = -1$; donc la normale passe au point de contact du cercle générateur. En différentiant, il vient

$$0 = 1 - (1+\tau).1_{-t} + i(1 - 1_{-t})\frac{d\tau}{dt},$$

d'où l'on tire $\tau = -2$, et par suite le rayon de courbure est double de la *normale*. L'équation de la développée est donc

$$\zeta = t - i(1 - 1_{-t}),$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$\zeta + \pi + 2i = t + \pi + i(1 - 1_{-(t+\pi)}),$$

et qui représente, par suite, une cycloïde égale à la proposée.

Si l'on cherche de même la développée imparfaite, lieu des intersections des obliques

$$\zeta = t + (i + 1_{\gamma}\tau)(1 - 1_{-t}),$$

on trouve $\tau = -2\sin\gamma$, et l'on obtient, pour l'équation du lieu,

$$\zeta = t + i.1_{2\gamma}(1 - 1_{-t}),$$

ou

$$\zeta + 2\gamma + (1 - 1_{2\gamma})i = t - 2\gamma + i[1 - 1_{-(t-2\gamma)}],$$

équation qui représente encore une cycloïde égale à la première.

132. La recherche des développées est un cas particulier du problème des enveloppes, et la solution de celui-ci peut être comprise, avec celle du problème des trajectoires orthogonales ou obliquangles, dans une même formule commune.

Soit

$$(1) \qquad z = f(t, \lambda)$$

l'équation d'une courbe, renfermant un paramètre arbitraire λ, que nous supposerons *réel*, comme la variable t. Si l'on considère une ligne rencontrant toutes les courbes de la série représentée par cette équation pour les différentes valeurs de λ, les divers points de cette ligne correspondront à des valeurs de z données par l'équation (1), où l'on fera varier

simultanément t et λ. Si l'on établit entre ces deux quantités une certaine relation, on déterminera la nature de la ligne qui traverse les courbes (1).

Supposons maintenant que la trajectoire cherchée doive couper les lignes (1) sous un angle constant θ. On exprimera cette condition en écrivant que l'angle des tangentes à la ligne (1) et à la trajectoire (tangentes que l'on obtient en considérant tour à tour λ comme constant et comme variable) est égal à l'angle donné θ.

En différentiant l'équation (1) dans les deux hypothèses, et posant, pour abréger,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = z', \qquad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} = z_{,},$$

on trouvera respectivement, pour les coefficients angulaires des deux tangentes,

$$\frac{dz}{dt} = z', \qquad \frac{dz}{dt} = z' + z_{,}\frac{d\lambda}{dt}.$$

On aura donc, pour déterminer l'angle que ces tangentes font entre elles [art. 111, (6)]

$$\frac{z' + z_{,}\dfrac{d\lambda}{dt}}{\bar{z}' + \bar{z}_{,}\dfrac{d\lambda}{dt}} : \frac{z'}{\bar{z}'} = 1_{2\theta},$$

ou en faisant $1_{2\theta} = m$,

$$(2) \qquad (mz'\bar{z}_{,} - \bar{z}'z_{,})\frac{d\lambda}{dt} + (m-1)z'\bar{z}' = 0.$$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors $m = -1$, et l'on a, pour l'équation aux trajectoires orthogonales,

$$(3) \qquad (z'\bar{z}_{,} + \bar{z}'z_{,})\frac{d\lambda}{dt} + 2z'\bar{z}' = 0.$$

133. L'équation (2) sert aussi à la détermination des courbes enveloppes. En y faisant $\theta = 0$, d'où $m = 1$, le second

terme de l'équation disparaît, et si l'on supprime le facteur $\frac{d\lambda}{dt}$, qui, égalé à zéro, donnerait une quelconque des enveloppées, on a, pour déterminer l'enveloppe, l'équation

(4) $$z'\bar{z}_1 - \bar{z}'z_1 = 0.$$

Tirant de là la valeur de λ, et la reportant dans l'équation (1), on aura l'équation de l'enveloppe.

Remarque. L'égalité (4) se présente sous la forme

$$(p+iq)(p'-iq')-(p-iq)(p'+iq')=0,$$

laquelle se réduit à la forme plus simple

(5) $$-pq'+qp'=0, \quad \text{ou} \quad \frac{p}{p'}=\frac{q}{q'}.$$

134. *Exemples.* I. Trouver l'enveloppe des ellipses d'aire constante et dont les axes coïncident en direction.

Soit

$$z = \lambda \cos t + i\mu \sin t$$

l'équation d'une de ces ellipses, λ et μ étant liés par la relation

$$\lambda\mu = k^2.$$

On a, en différentiant,

$$z' = -\lambda \sin t + i\mu \cos t, \qquad z_1 = \cos t + i\frac{d\mu}{d\lambda}\sin t,$$

d'où, par la formule (5),

$$\frac{-\lambda \sin t}{\cos t} = \frac{\mu \cos t}{\frac{d\mu}{d\lambda}\sin t}, \quad \text{ou} \quad \lambda d\mu \sin^2 t + \mu d\lambda \cos^2 t = 0.$$

Comme l'équation de condition donne $\lambda d\mu = -\mu d\lambda$, il en résulte que l'on doit avoir

$$\sin^2 t - \cos^2 t = 0, \quad \text{d'où} \quad t = \pm\frac{\pi}{4}.$$

Remplaçant t par cette valeur et μ par $\frac{k^2}{\lambda}$, l'équation proposée devient

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(\lambda \pm i\frac{k^2}{\lambda}\right),$$

λ étant la variable. Cette équation est celle de deux hyperboles équilatères, ayant les axes coordonnés pour asymptotes.

II. Cherchons encore les trajectoires obliquangles d'une cycloïde mobile le long de sa base, et représentée par l'équation

$$z' = \lambda + t + i(1 - 1_{-t}).$$

On a ici

$$z = 1 - 1_{-t}, \qquad z_t = 1;$$

l'équation (2) devient alors

$$0 = [\sin\theta + \sin(t - \theta)]\frac{d\lambda}{dt} + 2\sin\theta(1 - \cos t),$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$2\sin\frac{t}{2}\cos\left(\frac{t}{2} - \theta\right)\frac{d\lambda}{dt} + 4\sin\theta\sin^2\frac{t}{2} = 0,$$

ou

$$\cos\left(\frac{t}{2} - \theta\right)\frac{d\lambda}{dt} + 2\sin\theta\sin\left(\frac{t}{2} - \theta + \theta\right) = 0,$$

$$\frac{d\lambda}{dt} + 2\sin^2\theta + \sin 2\theta \operatorname{tang}\left(\frac{t}{2} - \theta\right) = 0,$$

et l'on en tire, en intégrant,

$$\lambda = C - 2\sin^2\theta . t + 2\sin 2\theta \log\cos\left(\frac{t}{2} - \theta\right).$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = C - 2t$, et l'on a, pour les trajectoires orthogonales de la cycloïde mobile, l'équation

$$z = C - t + i(1 - 1_{-t}).$$

Ces trajectoires sont donc des cycloïdes égales à la proposée.

III. Trouver les trajectoires obliquangles de toutes les ellipses de mêmes foyers f, f_1.

D'après ce que nous avons vu (art. 125 et 128, II), un segment MT, pris sur la tangente au point M, est égal, à un facteur réel près, à la moyenne proportionnelle entre les deux rayons vecteurs $f_1\mathrm{M}$, $\mathrm{M}f$, de sorte que le coefficient angulaire de la tangente est de la forme

$$k\sqrt{f_1\mathrm{M}.\mathrm{M}f}.$$

Celui de la tangente à la trajectoire sera donc

$$k.1_\theta.\sqrt{f_1\mathrm{M}.\mathrm{M}f} = k_\theta\sqrt{(0\mathrm{M}-0f_1)(0f-0\mathrm{M})}\,,$$

ou enfin, à cause de $0f_1 = -0f$,

$$\frac{dz}{dt} = k_\theta\sqrt{f^2-z^2}\,.$$

En intégrant cette équation, et faisant entrer dans t le facteur réel qui le multiplierait, on a, pour l'équation des trajectoires obliquangles de l'ellipse

$$z = f\cos(t_\theta + C)\,.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $t_\theta = it$, et il vient

$$z = f\cos C.\,\mathrm{Ch}\,t - if\sin C.\,\mathrm{Sh}\,t\,,$$

équation d'une hyperbole de mêmes foyers que les ellipses.

135. Appliquons encore les théories précédentes à la recherche des trajectoires et des enveloppes des normales et des obliques d'une courbe plane.

Considérons l'équation d'une oblique

$$\zeta = z + 1_\gamma.\frac{dz}{dt}\,\tau\,.$$

Pour appliquer à cette ligne la formule (2), il faut remplacer dans celle-ci z, t, λ respectivement par ζ, τ, t, et par suite

$$z' \quad \text{par} \quad \frac{\partial\zeta}{\partial\tau} = 1_\gamma.\frac{dz}{dt}\,,$$

$$\text{et} \quad z_, \quad \text{par} \quad \frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{dz}{dt} + 1_\gamma\frac{d^2z}{dt^2}\,\tau\,,$$

et l'équation (2) deviendra, par ces substitutions, en écrivant z', z'' au lieu de $\frac{dz}{dt}, \frac{d^2z}{dt^2}$,

$$(6)\quad 0 = [(m.1_\gamma - 1_{-\gamma})z'\bar{z}' + (mz'\bar{z}'' - \bar{z}'z'')\tau]\frac{dt}{d\tau} + (m-1)z'\bar{z}',$$

ou

$$(7)\qquad 0=\sin\theta\, d\tau+\sin(\theta+\gamma)\,dt+\frac{\tau}{2i}\left(1_\theta\frac{d\bar z'}{\bar z'}-1_{-\theta}\frac{dz'}{z'}\right).$$

En posant (art. 126) $dz=1_\omega ds$, et de plus $s'=\frac{ds}{dt}$, on a

$$\frac{dz'}{z'}=d\log z'=d(i\omega+\log s')=i\,d\omega+\frac{ds'}{s'}.$$

L'équation (7) devient alors, sous forme réelle,

$$(8)\qquad 0=\sin\theta\, d\tau+\sin(\theta+\gamma)\,dt+\tau\left(-\cos\theta\, d\omega+\sin\theta\frac{ds'}{s'}\right).$$

Si l'on fait, dans ces formules, $\gamma=\frac{\pi}{2}$, on aura, sous ses diverses formes, l'équation différentielle des trajectoires obliquangles des normales.

Si l'on fait $\theta=\frac{\pi}{2}$, on aura l'équation des trajectoires orthogonales des obliques.

Si l'on suppose $\theta=0$, on aura l'équation de l'enveloppe des obliques, laquelle donne

$$\tau=-\frac{2i\sin\gamma\,.\,z'\bar z'}{z'\bar z''-\bar z' z''}=\sin\gamma\frac{dt}{d\omega},$$

de sorte que l'équation de la développée imparfaite sera

$$(9)\qquad \zeta=z+(1-1_{2\gamma})z'\,.\,\frac{z'\bar z'}{z'\bar z''-\bar z' z''},$$

ou, sous une forme plus simple,

$$(10)\qquad \zeta=z+1_\gamma\sin\gamma\frac{dz}{d\omega}.$$

En supposant $\gamma=\frac{\pi}{2}$, on a les formules analogues pour la développée ordinaire,

$$(11)\qquad \zeta=z+2z'\,.\,\frac{z'\bar z'}{z'\bar z''-\bar z' z''}=z+i\frac{dz}{d\omega},$$

d'où l'on tirerait aisément les formules connues.

136. Si l'on fait à la fois $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, l'équation (7) devient

$$0 = \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{z}'}{\bar{z}'} + \frac{dz'}{z'}\right),$$

laquelle donne, en intégrant,

$$\tau = \frac{C}{\sqrt{z'\bar{z}'}} = C\frac{dt}{ds},$$

et par suite l'équation générale des trajectoires orthogonales des normales sera

$$\zeta = z + iC\frac{dz}{ds},$$

ou encore

(12) $$\zeta = z + iC.1_\omega.$$

On voit par là que le module de $\zeta - z$ est constant, et que, par suite, tous les points d'une même trajectoire orthogonale sont équidistants de la courbe donnée, c'est-à-dire que les trajectoires sont des courbes *parallèles* entre elles et à la proposée. Cette propriété aurait pu servir à poser directement l'équation (12).

Si, au lieu de compter les distances constantes sur les normales, on les compte sur les obliques inclinées de l'angle γ sur la tangente, il suffira de remplacer, dans l'équation précédente, le coefficient de perpendicularité i par le verseur oblique 1_γ, et l'on aura, pour l'équation de la trajectoire qui coupe ces obliques à une distance constante de leur rencontre avec la courbe,

(13) $$\zeta = z + C.1_{\omega+\gamma}.$$

137. Cherchons enfin la trajectoire des obliques à la courbe, dont la tangente en chaque point est parallèle à la tangente menée à la courbe en son point de rencontre avec la même oblique. La trajectoire cherchée étant représentée par

$$\zeta = z + 1_\gamma z'\tau,$$

où τ désigne une fonction inconnue de t, il faut que pour la

même valeur de t, les tangentes à la trajectoire et à la courbe soient parallèles, ce qui conduit à la condition

$$\frac{\zeta'}{\bar{\zeta}'} = \frac{z'}{\bar{z}'},$$

ou, en mettant pour ζ' sa valeur $z'\left(1+1_\gamma\frac{d\tau}{dt}\right)+1_\gamma z'\tau$, et réduisant,

$$\sin\gamma\frac{d\tau}{\tau}+\frac{1}{2i}\left(1_\gamma\frac{dz'}{z'}-1_{-\gamma}\frac{d\bar{z}'}{\bar{z}'}\right)=0.$$

Si l'on pose $dz=1_\omega ds$, cette équation devient

$$\sin\gamma\left(\frac{d\tau}{\tau}+\frac{ds'}{s'}\right)+\cos\gamma\, d\omega=0.$$

d'où, en intégrant,

$$\tau = C\frac{dt}{ds}e^{-\omega\cot\gamma}.$$

et, par suite, l'équation de la trajectoire demandée sera

$$\zeta = z + Ce^{i\gamma-\omega\cot\gamma}\frac{dz}{ds} = z + Ce^{i(\gamma+\omega)-\omega\cot\gamma}.$$

On voit que les portions d'obliques comprises entre les deux courbes sont égales et parallèles aux rayons vecteurs d'une spirale logarithmique.

CHAPITRE VI.

DES BIRADIALES SITUÉES D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE DANS L'ESPACE.

---

§ Ier.

Addition des biradiales. Biradiales rectangles.

138. Nous avons rappelé, dans le Chapitre précédent, les règles de la composition des rotations dans un plan donné, ou des biradiales coplanaires, et nous en avons fait l'application à la solution de diverses questions de Géométrie plane.

Nous allons maintenant considérer des rotations s'effectuant autour d'un même centre fixe O, et dans des plans différents.

Une rotation imprimée à un système solide est déterminée quand on connaît : 1° le plan dans lequel se déplace le vecteur d'un point donné du système; 2° la grandeur et le sens de l'angle décrit par ce vecteur.

Nous dirons, d'après cela, que deux rotations sont ***égales***, lorsqu'elles s'effectuent dans le même plan (ou dans des plans parallèles), et que leurs angles ou ***arguments*** sont égaux et de même sens.

Le symbole complexe, qui exprime qu'une rotation se fait dans un plan donné et avec un argument donné, se nomme le ***verseur*** de cette rotation.

Une biradiale se composant de deux éléments, d'une multiplication du vecteur par un nombre (***module***, TENSOR), et d'une rotation de ce vecteur, deux biradiales sont égales quand elles ont même module et même verseur.

Si l'angle d'une biradiale est nul, la biradiale se réduit à son

module, ou au rapport des deux vecteurs qui se confondent en direction.

139. Lorsque l'angle MON d'une biradiale est droit, la biradiale est dite *rectangle.*

Une biradiale rectangle est complètement déterminée, quand on connaît son module, la position de son plan et son *sens* dans ce plan. Or ces deux derniers éléments sont connus lorsqu'on donne la position et le sens d'un vecteur perpendiculaire au plan de la biradiale, et dirigé de telle manière qu'un observateur placé suivant ce vecteur, les pieds appuyés sur le plan, verrait le rayon mobile tourner dans le sens *direct* (de droite à gauche), en passant du vecteur initial OM au vecteur final ON. De plus, on achèvera de déterminer la biradiale au moyen du vecteur, si l'on porte sur celui-ci une longueur représentant le module de la biradiale, ou le rapport de la longueur de ON à celle de OM.

Donc les mêmes données, numériques ou géométriques, servent à déterminer soit une biradiale rectangle, soit un vecteur perpendiculaire au plan de la biradiale *dans le sens positif.* On peut donc considérer la notation qui représente une biradiale rectangle comme représentant aussi un vecteur, et réciproquement.

Ce vecteur, qui peut remplacer la biradiale rectangle ou être remplacé par elle, se nomme le *vecteur* de cette biradiale rectangle.

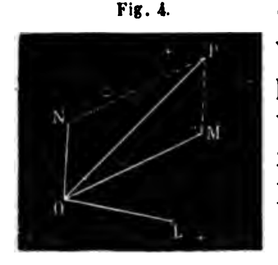
Si l'on porte sur le vecteur une longueur égale à l'unité, le *vecteur unitaire* ou *axe* ainsi obtenu représentera le verseur de la biradiale rectangle.

140. Deux biradiales rectangles conjuguées sont représentées par deux vecteurs égaux et opposés, et par suite de signe contraire. On voit d'ailleurs que, appliquées à un même vecteur mobile, elles lui font prendre deux positions égales et opposées. On est donc conduit à considérer deux biradiales rectangles conjuguées comme égales et de signe contraire, et

il en est de même des vecteurs qui leur servent d'axes, et auxquels on donnera, par analogie, le nom de *vecteurs conjugués*.

141. Soient deux biradiales collinéaires LOM, LON (*fig.* 4), et soit OP la somme géométrique de leurs vecteurs non communs OM, ON. Pour passer du vecteur OL respectivement aux vecteurs OM, ON, OP = OM + ON, il faut multiplier OL par les biradiales LOM, LON, LOP, et l'on aura alors

Fig. 4.



$$OL \times LOM + OL \times LON = OL \times LOP.$$

La biradiale LOP, par laquelle il faut multiplier un vecteur quelconque OL pour obtenir un vecteur égal à la somme des produits de OL par les deux biradiales LOM, LON, est appelée, par définition, la *somme* des biradiales LOM, LON.

Cette définition satisfait au principe de permanence, puisque, pour OL = 1, l'égalité précédente devient LOM + LON = LOP.

On voit que l'addition des biradiales, préalablement ramenées à être collinéaires, s'effectue par la simple addition des vecteurs terminaux. Cette opération jouit donc des mêmes propriétés que l'addition des vecteurs, et par suite aussi que l'addition arithmétique. Il en est de même de l'opération inverse, c'est-à-dire de la soustraction.

On peut aussi étendre ces propriétés à l'addition d'autant de biradiales collinéaires que l'on voudra, dont les vecteurs terminaux auront des directions quelconques dans l'espace.

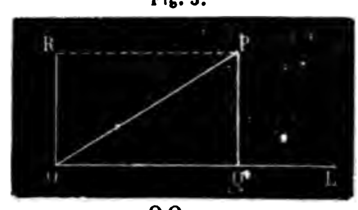
142. Réciproquement, étant donnée une biradiale LOP, on peut la *décomposer* en deux autres LOM, LON, dont les seconds vecteurs auront des directions données arbitrairement dans un plan quelconque passant par son vecteur terminal OP. Cette opération revient à la décomposition du vecteur OP suivant deux directions données.

Au lieu de prendre deux directions coplanaires avec OP, on

pourrait faire la décomposition suivant trois directions choisies à volonté dans l'espace.

143. Si l'on prend comme directions coplanaires avec OP la direction OL du rayon initial et la direction perpendiculaire OR, la biradiale LOP se trouvera décomposée en une biradiale *numérique* LOQ, d'argument nul, laquelle est exprimée par un nombre réel $= \frac{OQ}{OL}$, et en une biradiale rectangle LOR, qui peut être représentée par un vecteur (art. 139).

Fig. 5.



On voit donc que toute biradiale peut se décomposer dans la somme d'une *partie numérique*, ou *partie réelle*, ou *scalaire* ([1]), et que nous distinguerons soit par la caractéristique $\mathfrak{S}$, soit par l'indice zéro placé au bas du symbole qui désigne la biradiale; et d'une biradiale rectangle, représentable par un vecteur, et que nous appellerons la *partie imaginaire* ou le *vecteur* de la biradiale. Nous dénoterons cette dernière partie soit au moyen de la caractéristique $\mathfrak{V}$, soit au moyen de l'indice i placé au bas du symbole de la biradiale.

D'après ces conventions, nous écrirons

$$LOP = \mathfrak{S}LOP + \mathfrak{V}LOP = (LOP)_0 + (LOP)_i,$$

ou, si nous représentons la biradiale par la lettre A,

$$A = \mathfrak{S}A + \mathfrak{V}A = a_0 + a_i.$$

144. Représentons par $\mathbf{a} = \mathfrak{T}A = \frac{\mathfrak{T}OP}{\mathfrak{T}OL}$ le module, et par $\alpha = \mathfrak{A}A$ l'argument de la biradiale A; on aura

$$\mathfrak{T}OQ = \mathfrak{T}OP \cos\alpha, \qquad \mathfrak{T}OR = \mathfrak{T}OP \sin\alpha,$$

([1]) Scalar (Hamilton).

d'où l'on tire, pour les modules des biradiales composantes,

$$\mathfrak{T}\mathrm{LOQ} = \frac{\mathfrak{T}\mathrm{OQ}}{\mathfrak{T}\mathrm{OL}} = \mathrm{a}\cos\alpha, \qquad \mathfrak{T}\mathrm{LOR} = \frac{\mathfrak{T}\mathrm{OR}}{\mathfrak{T}\mathrm{OL}} = \mathrm{a}\sin\alpha.$$

Si, d'autre part, on désigne par A le verseur de la biradiale rectangle LOR, lequel est représenté par un vecteur unitaire perpendiculaire à son plan, on aura

$$\mathrm{LOR} = a_i = \mathrm{a}\sin\alpha . \mathrm{A}.$$

Donc la biradiale $A = \mathrm{a}_\alpha$ peut s'écrire sous la forme

$$A = a_0 + a_i = \mathrm{a}(\cos\alpha + \mathrm{A}\sin\alpha).$$

L'expression

$$\mathfrak{U}A = 1_\alpha = \cos\alpha + \mathrm{A}\sin\alpha$$

représente le verseur de la biradiale $A = \mathrm{a} . 1_\alpha$, c'est-à-dire le facteur que nous avons désigné jusqu'ici par 1_α. Le vecteur unitaire A est l'*axe* de la biradiale quelconque $A = \mathrm{a}_\alpha$, aussi bien que de la biradiale rectangle ou du vecteur

$$a_i = \mathrm{a}\sin\alpha . \mathrm{A}.$$

Une biradiale rectangle a sa partie réelle $a_0 = \mathrm{a}\cos\alpha$ nulle, et se réduit à sa partie imaginaire ou à son vecteur $a_i = \mathrm{aA}$.

145. Un vecteur a_i peut se décomposer suivant trois directions rectangulaires $\mathrm{OI}_1, \mathrm{OI}_2, \mathrm{OI}_3$, choisies arbitrairement (art. 72). En désignant par a_1, a_2, a_3 les trois projections algébriques de la longueur du vecteur sur ces axes, on aura, d'après ce que nous avons vu concernant l'addition des vecteurs,

$$a_i = a_1 \mathrm{I}_1 + a_2 \mathrm{I}_2 + a_3 \mathrm{I}_3,$$

$\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$ désignant des vecteurs unitaires portés sur les parties positives des trois axes rectangulaires.

Il résulte de là qu'une biradiale $A = a_0 + a_i$ peut toujours se décomposer en quatre parties hétérogènes sous la forme

$$A = a_0 + a_1 \mathrm{I}_1 + a_2 \mathrm{I}_2 + a_3 \mathrm{I}_3,$$

a_0, a_1, a_2, a_3 étant des nombres, et $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$ trois *unités imaginaires,* portées sur trois directions rectangulaires données.

On a entre les divers éléments de la biradiale les relations

$$a_0 = \mathfrak{S}A = \mathrm{a}\cos\alpha, \quad \mathfrak{T}a_t = \mathfrak{T}\mathfrak{V}A = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} = \mathrm{a}\sin\alpha,$$

$$\mathrm{a} = \mathfrak{T}A = \sqrt{a_0^2+(\mathfrak{T}a_t)^2} = \sqrt{a_0^2+a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

On voit par là qu'une biradiale peut être représentée par une expression complexe composée de quatre termes. Une telle expression s'appelle un ***quaternion.***

146. Pour passer d'une biradiale à sa conjuguée, il suffit de changer le signe de l'argument α, ce qui donne

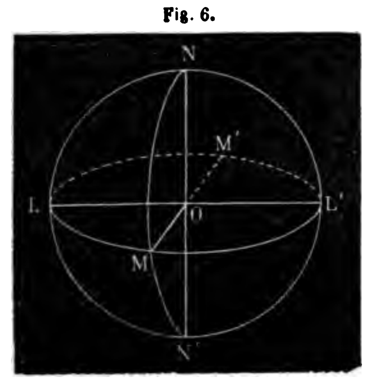
$$\bar{A} = \mathfrak{T}A.(\cos\alpha - \mathrm{A}\sin\alpha).$$

On obtiendrait la même expression en changeant le signe de l'axe A, ou celui du vecteur a_t, ou ceux des projections a_1, a_2, a_3 du vecteur, ou enfin ceux des trois unités imaginaires $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$.

147. Un vecteur et une biradiale rectangle ayant la même représentation, le produit d'un vecteur par une biradiale rectangle (coplanaire avec ce vecteur) pourra être considéré comme résultant de la multiplication de deux vecteurs, ou de deux biradiales rectangles, ou encore d'une biradiale rectangle par un vecteur.

Faisons abstraction, pour plus de simplicité, des modules des vecteurs ou des biradiales, en les supposant tous égaux à l'unité.

Fig. 6.



Soit le vecteur OL (*fig.* 6) à multiplier par une biradiale rectangle située dans le même plan, et que nous représenterons par LOM. On peut remplacer le vecteur OL par la biradiale MON, et la biradiale LOM par le vecteur ON.

Le produit du vecteur OL par la biradiale LOM étant égal au

vecteur OM ou à la biradiale NOL, cette égalité pourra s'écrire sous les diverses formes

$$\begin{aligned} OL \times LOM = MON \times LOM = MON \times ON \\ = OL \times ON = OM = NOL. \end{aligned}$$

On peut encore représenter ce produit par

$$N'OM \times MOL' = N'OL',$$

ce qui est un cas particulier de la formule (9) de l'art. 98.

148. Le formule précédente

$$OL \times ON = OM = -OM'$$

nous montre que le produit de deux vecteurs rectangulaires entre eux est égal à un troisième vecteur, perpendiculaire aux deux premiers, et dirigé en sens contraire de l'axe positif du mouvement du premier facteur vers le second.

Si donc nous considérons trois vecteurs unitaires, rectangulaires entre eux, $O\iota_1, O\iota_2, O\iota_3$, que nous désignerons plus brièvement par $\iota_1, \iota_2, \iota_3$, chacun de ces vecteurs étant l'axe positif correspondant au mouvement l'un vers l'autre des deux vecteurs restants, pris dans l'ordre cyclique direct des indices 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, ..., on aura les relations

$$(1) \qquad \iota_2\iota_3 = -\iota_1, \quad \iota_3\iota_1 = -\iota_2, \quad \iota_1\iota_2 = -\iota_3.$$

De plus, si l'on échange entre eux les facteurs OM, ON, cela revient à échanger entre eux les axes opposés OM, OM', de sorte qu'on aura

$$ON \times OL = OM' = -OM.$$

Par conséquent, nous obtiendrons les trois nouvelles relations

$$(2) \qquad \iota_3\iota_2 = +\iota_1, \quad \iota_1\iota_3 = +\iota_2, \quad \iota_2\iota_1 = +\iota_3,$$

En comparant les formules (1) et (2), on voit que la multiplication des unités imaginaires n'est pas commutative.

149. Supposons maintenant qu'un vecteur quelconque OL soit multiplié par la biradiale rectangle LOM, ce qui le change en OM, puis une seconde fois par la même biradiale ou par son égale MOL', ce qui le change en OL' = — OL. Le résultat de cette double opération sera donc de changer OL en —OL, ou de multiplier OL par — 1. Si donc on appelle *produit* de deux biradiales (art. 98) la biradiale telle que la multiplication d'un vecteur quelconque par cette biradiale puisse remplacer les multiplications successives du même vecteur par les deux premières, on devra poser

$$\mathrm{LOM} \times \mathrm{LOM} = (\mathrm{LOM})^2 = -1,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{ON}^2 = -1.$$

Donc *le carré d'une biradiale rectangle unitaire est égal à* — 1.

On a, par conséquent,

(3) $$\iota_1^2 = \iota_2^2 = \iota_3^2 = -1.$$

150. Des formules (1), (2), (3) on tire

$$(\iota_1 \times \iota_2) \times \iota_3 = -\iota_3 \times \iota_3 = -\iota_3^2 = +1.$$
$$\iota_1 \times (\iota_2 \times \iota_3) = \iota_1 \times -\iota_1 = -\iota_1^2 = +1.$$

Donc

(4) $$(\iota_1 \times \iota_2) \times \iota_3 = \iota_1 \times (\iota_2 \times \iota_3) = \iota_1\iota_2\iota_3 = +1,$$

et par suite la multiplication des facteurs $\iota_1, \iota_2, \iota_3$, pris dans l'ordre cyclique direct, est *associative*.

On aurait de même

(5) $$(\iota_3 \times \iota_2) \times \iota_1 = \iota_3 \times (\iota_2 \times \iota_1) = \iota_3\iota_2\iota_1 = -1;$$

donc la multiplication des mêmes facteurs, pris dans l'ordre cyclique inverse, est encore associative.

On a ensuite

$$(\iota_1 \times \iota_2) \times \iota_1 = -\iota_3 \times \iota_1 = +\iota_2.$$
$$\iota_1 \times (\iota_2 \times \iota_1) = \iota_1 \times \iota_3 = +\iota_2;$$

136. Si l'on fait à la fois $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$, l'équation (7) devient

$$0 = \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{z}'}{\bar{z}'} + \frac{dz'}{z'}\right),$$

laquelle donne, en intégrant,

$$\tau = \frac{C}{\sqrt{z'\bar{z}'}} = C\frac{dt}{ds},$$

et par suite l'équation générale des trajectoires orthogonales des normales sera

$$\zeta = z + iC\frac{dz}{ds},$$

ou encore

(12) $$\zeta = z + iC.1_\omega.$$

On voit par là que le module de $\zeta - z$ est constant, et que, par suite, tous les points d'une même trajectoire orthogonale sont équidistants de la courbe donnée, c'est-à-dire que les trajectoires sont des courbes *parallèles* entre elles et à la proposée. Cette propriété aurait pu servir à poser directement l'équation (12).

Si, au lieu de compter les distances constantes sur les normales, on les compte sur les obliques inclinées de l'angle γ sur la tangente, il suffira de remplacer, dans l'équation précédente, le coefficient de perpendicularité i par le verseur oblique 1_γ, et l'on aura, pour l'équation de la trajectoire qui coupe ces obliques à une distance constante de leur rencontre avec la courbe,

(13) $$\zeta = z + C.1_{\omega+\gamma}.$$

137. Cherchons enfin la trajectoire des obliques à la courbe, dont la tangente en chaque point est parallèle à la tangente menée à la courbe en son point de rencontre avec la même oblique. La trajectoire cherchée étant représentée par

$$\zeta = z + 1_\gamma z'\tau,$$

où τ désigne une fonction inconnue de t, il faut que pour la

même valeur de t, les tangentes à la trajectoire et à la courbe soient parallèles, ce qui conduit à la condition

$$\frac{\zeta'}{\bar{\zeta}'} = \frac{z'}{\bar{z}'},$$

ou, en mettant pour ζ' sa valeur $z'\left(1+1_\gamma \frac{d\tau}{dt}\right) + 1_\gamma z'\tau$, et réduisant,

$$\sin\gamma \frac{d\tau}{\tau} + \frac{1}{2i}\left(1_\gamma \frac{dz'}{z'} - 1_{-\gamma} \frac{d\bar{z}'}{\bar{z}'}\right) = 0.$$

Si l'on pose $dz = 1_\omega ds$, cette équation devient

$$\sin\gamma \left(\frac{d\tau}{\tau} + \frac{ds'}{s'}\right) + \cos\gamma \, d\omega = 0.$$

d'où, en intégrant,

$$\tau = C \frac{dt}{ds} e^{-\omega \cot\gamma},$$

et, par suite, l'équation de la trajectoire demandée sera

$$\zeta = z + C e^{i\gamma - \omega\cot\gamma} \frac{dz}{ds} = z + C e^{i(\gamma+\omega) - \omega\cot\gamma}.$$

On voit que les portions d'obliques comprises entre les deux courbes sont égales et parallèles aux rayons vecteurs d'une spirale logarithmique.

---

l'addition des vecteurs, dont elle diffère par un point essentiel, nous l'appellerons l'*addition sphérique.*

154. D'après cela, la multiplication des deux verseurs se fera par l'addition (sphérique) de leurs arguments (considérés en grandeur et en position), de sorte qu'on aura

$$1_\alpha \times 1_\beta = 1_{\alpha+\beta},$$

et, si l'on rétablit les modules quelconques,

$$\mathrm{a}_\alpha \times \mathrm{b}_\beta = (\mathrm{a}.\mathrm{b})_{\alpha+\beta}.$$

Ainsi, la multiplication de deux biradiales se fait par la multiplication de leurs modules et l'addition (sphérique) de leurs arguments.

Cette règle donne, pour le produit de deux biradiales conjuguées,

$$A \times \bar{A} = \mathrm{a}_\alpha \times \mathrm{a}_{-\alpha} = (\mathrm{a}^2)_{\alpha-\alpha} = (\mathrm{a}^2)_0 = \mathrm{a}^2 = (\mathfrak{T}A)^2,$$

ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu (art. 101). On voit que, dans ce cas, la multiplication est commutative, comme cela a lieu, en général, toutes les fois que les biradiales sont coplanaires.

155. Nous connaîtrons donc les propriétés de la multiplication des biradiales, dès que nous connaîtrons celles de l'addition sphérique des arcs de grand cercle.

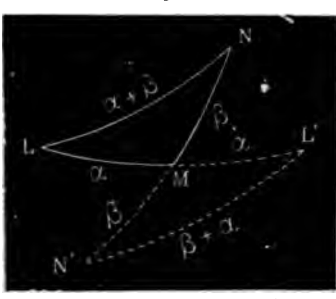
I. L'addition sphérique est évidemment une opération *uniforme.* Il en est donc de même de la multiplication des biradiales.

II. Si un seul des termes de la somme varie, le résultat varie. On en conclut (art. 21) que l'addition sphérique est une opération *complètement uniforme,* et il en est de même pour la multiplication des biradiales.

III. L'addition sphérique (si l'on excepte le cas de deux arcs coplanaires) *n'est pas commutative.*

En effet, pour obtenir la somme $\alpha + \beta$ de deux arcs, on les déplacera, s'il le faut, chacun sur son cercle, de manière que l'extrémité finale du premier α et l'extrémité initiale du second β viennent coïncider avec une des intersections M (*fig.* 68) des deux grands cercles. L'arc LN, qui joint alors l'extrémité initiale de α à l'extrémité finale de β, sera la somme cherchée $\alpha + \beta$.

Fig. 9.



Pour obtenir, au contraire, $\beta + \alpha$, on fera glisser les deux arcs sur leurs cercles respectifs, de manière que l'extrémité finale de β et l'extrémité initiale de α viennent en M, ces arcs prenant les positions N'M, ML'. La somme $\beta + \alpha$ sera alors représentée par l'arc N'L'.

Or, les arcs LN, N'L' n'étant pas, en général, dans le même plan, ne peuvent correspondre à des verseurs égaux, les arguments de ces verseurs étant les mêmes, mais leurs axes étant différents. Donc la somme LM + MN ne peut pas être considérée comme égale à la somme MN + LM. Partant, les deux produits

$$1_\alpha \times 1_\beta = 1_{\alpha+\beta}, \quad 1_\beta \times 1_\alpha = 1_{\beta+\alpha}$$

ne sont pas égaux.

Donc l'addition sphérique et la multiplication des biradiales sont des opérations *non commutatives,* ce qui les distingue de l'addition et de la multiplication ordinaires.

Remarque. — La figure OMN'L' est symétrique de la figure OMNL par rapport au rayon OM. Les deux arcs LN, N'L' sont donc égaux en grandeur, et sont également inclinés sur chacun des arcs LML', N'MN.

156. Dans le cas où les deux arcs LM, MN seraient égaux chacun à un quadrant, les arcs LN, N'L' feraient partie du même grand cercle, et ils seraient dirigés en sens opposé, et

par suite de signe contraire. Donc, si A et B sont deux biradiales rectangles, les produits $A \times B$ et $B \times A$ auront même module et des arguments égaux et de signe contraire. Ces produits sont donc deux *biradiales conjuguées*, de sorte que l'on a, A et B étant deux biradiales rectangles ou deux vecteurs,

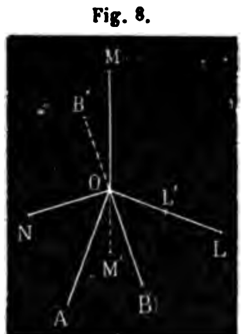
$$B \times A = \mathfrak{C}(A \times B).$$

Ainsi, *le produit de deux biradiales rectangles ou de deux vecteurs se change dans son conjugué, lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs.*

157. On peut encore présenter la démonstration comme il suit :

Le produit de deux vecteurs OA, OB est égal à celui des biradiales rectangles LOM, MON, que ces vecteurs représentent, lequelles sont situées dans des plans perpendiculaires à OA et à OB, et où l'on a pris $\frac{OM}{OL} = \frac{OA}{1}$, $\frac{ON}{OM} = \frac{OB}{1}$. Ce produit est donc représenté par la biradiale LON, située dans le plan des deux vecteurs, ayant pour module le produit des modules **a**, **b** des vecteurs, et pour argument le supplément de l'angle γ de ces vecteurs. Donc

Fig. 8.



$$OA \times OB = \mathbf{ab}(-\cos\gamma + \mathbf{c}\sin\gamma),$$

c étant l'axe unitaire pris sur la direction OM.

Cette biradiale LON peut être encore représentée par AOB', OB' étant un vecteur de longueur $\mathbf{a}^2\mathbf{b}$ porté sur le prolongement de BO.

On aura de même, en prenant $\frac{OM'}{ON} = \frac{OB}{1}$, $\frac{OL'}{OM'} = \frac{OA}{1}$,

$$OB \times OA = NOM' \times M'OL' = NOL' = (\mathbf{ab})_{\pi-\gamma}$$
$$= (\mathbf{ab})(-\cos\gamma - \mathbf{c}\sin\gamma),$$

l'axe de la biradiale NOL' étant de sens et de signe contraires à l'axe **c** de LON.

Les deux biradiales qui représentent les produits des mêmes vecteurs pris dans un ordre différent sont donc conjuguées.

158. Si l'on considère deux biradiales rectangles conjuguées MON, $\overline{\text{MON}}$, les produits obtenus en multipliant par ces biradiales une biradiale quelconque LOM seront les biradiales LON, $\overline{\text{LON}}$, lesquelles, appliquées au vecteur OL, donnent deux vecteurs égaux et de signe contraire ON, $\overline{\text{ON}}$. Donc les produits LOM $\times$ MON, LOM $\times$ $\overline{\text{MON}}$ doivent être considérés comme égaux et de signe contraire. Il en est donc de même des facteurs MON, $\overline{\text{MON}}$. Ainsi, ***deux biradiales rectangles conjuguées sont égales et de signe contraire,*** comme nous l'avions déjà vu d'une autre manière (art. 140).

159. Le produit $AB = \mathbf{a}_\alpha . \mathbf{b}_\beta$ de deux biradiales quelconques LOM, MON étant représenté par $C = \mathbf{c}_\gamma$, soit $\overline{C}$ la biradiale conjuguée de ce produit. On a

$$\overline{C} = \mathbf{c}_{-\gamma} = \mathbf{c}_{\text{NL}} = \mathbf{c}_{\text{NM}+\text{ML}} = \mathbf{c}_{-\beta-\alpha} = \mathbf{b}_{-\beta} . \mathbf{a}_{-\alpha},$$

c'est-à-dire que l'on a

$$\overline{A . B} = \overline{B} . \overline{A}, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{C}(A . B) = \mathfrak{C} B . \mathfrak{C} A .$$

Donc ***la biradiale conjuguée d'un produit de deux facteurs est égale au produit des conjugués des deux facteurs, pris dans l'ordre inverse.***

Si les biradiales sont rectangles, on a alors $\overline{A} = -A$, $\overline{B} = -B$ (art. 140). Donc

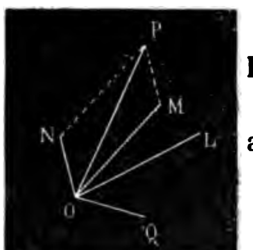
$$\overline{AB} = -AB = (-B)(-A) = +BA .$$

Donc le produit de deux biradiales rectangles ou de deux vecteurs change de signe ou se change dans son conjugué, quand on intervertit l'ordre des facteurs. C'est une extension de ce que nous avons vu (art. 148).

160. IV. ***La multiplication des biradiales jouit de la propriété distributive par rapport à l'addition.***

1° Soient d'abord trois biradiales *collinéaires* A, B, C. On pourra (art. 99) les transformer de manière qu'elles soient représentées par LOM, LON, QOL.

Fig. 9.



Si l'on construit $OP = OM + ON$, on aura alors

$$LOP = LOM + LON = A + B.$$

Cela posé, le produit

$$C.(A+B) = QOL \times LOP = QOP = QOM + QON$$
$$= (QOL \times LOM) + (QOL \times LON) = C.A + C.B.$$

Donc la multiplication des biradiales collinéaires est distributive relativement au multiplicateur.

2° De l'équation

$$C.(A+B) = C.A + C.B$$

on tire, en prenant les conjugués des deux membres et appliquant le théorème de l'art. 159,

$$\overline{C.(A+B)} = \overline{(A+B)}.\bar{C} = (\bar{A}+\bar{B}).\bar{C} = \overline{C.A} + \overline{C.B} = \bar{A}.\bar{C} + \bar{B}.\bar{C}.$$

Or $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ peuvent représenter trois biradiales quelconques. Donc la formule

$$(\bar{A}+\bar{B}).\bar{C} = \bar{A}.\bar{C} + \bar{B}.\bar{C}$$

montre que la multiplication des biradiales collinéaires est distributive relativement au multiplicande.

3° L'addition des biradiales étant commutative, on en conclura, en raisonnant comme dans l'art. 34, que la multiplication des biradiales collinéaires est complètement distributive, c'est-à-dire que l'on a, pour quatre quelconques de ces biradiales,

$$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD.$$

4° Considérons maintenant les trois biradiales rectangles A, B, C, ou les trois vecteurs OA, OB, OC qui les représentent,

et soit $OA + OB = OK$ le vecteur égal à la somme des deux premiers. Le produit $C(A + B)$ sera représenté par la biradiale COK', OK' étant une longueur convenable $= (\mathfrak{T}C)^2 . OK$, portée sur le prolongement de KO. Mais on a, en prenant sur les prolongements de $AO, BO, OA' = (\mathfrak{T}C)^2 . OA, OB' = (\mathfrak{T}C)^2 . OB$;

$$COK' = COA' + COB' = OC \times OA + OC \times OB.$$

Donc on a encore, pour les produits de vecteurs,

$$C(A + B) = C.A + C.B;$$

la multiplication est donc distributive relativement au multiplicateur.

On en conclurait, comme dans 2°, qu'elle l'est aussi relativement au multiplicande, et par suite qu'elle est complètement distributive.

5° Si l'une des biradiales A, B, C a un argument nul et se réduit à une biradiale *numérique*, elle pourra toujours être considérée comme collinéaire avec les deux autres, puisqu'on peut prendre pour plan de cette biradiale un plan quelconque passant par la direction commune de ses deux vecteurs. La distributivité est donc encore démontrée dans ce cas.

Il en est de même si deux des trois biradiales sont numériques.

6° Soient maintenant quatre biradiales quelconques A, B, C, D. Une biradiale A pouvant se décomposer (art. 143) en une biradiale numérique a_0, plus une biradiale rectangle ou un vecteur a_1, nous aurons, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}(A + B)(C + D) &= (A + B)[(c_0 + d_0) + (c_1 + d_1)] \\ &= (A + B)(c_0 + d_0) + (A + B)(c_1 + d_1) \\ &= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)](c_0 + d_0) + [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)](c_1 + d_1).\end{aligned}$$

En développant les produits, qui tous sont distributifs, on trouve un résultat identique à celui que l'on aurait obtenu en développant

$$\begin{aligned}&(a_0 + a_1)(c_0 + c_1) + (a_0 + a_1)(d_0 + d_1) + (b_0 + b_1)(c_0 + c_1) + (b_0 + b_1)(d_0 + d_1) \\ &= AC + AD + BC + BD.\end{aligned}$$

Donc la multiplication des biradiales quelconques est complètement distributive.

161. Nous avons vu (art. 145) qu'une biradiale peut se mettre sous la forme d'un quaternion ou quantité complexe à quatre termes.

Chacun des termes du quaternion peut être considéré comme une biradiale spéciale d'argument 0 ou $\frac{\pi}{2}$, et la biradiale donnée comme une somme de quatre biradiales. Donc la multiplication de deux biradiales, mises chacune sous forme de quaternions, jouira de la propriété distributive, et s'effectuera par conséquent d'après la règle de la multiplication des polynômes, fondée sur cette propriété. Cette multiplication rentre donc dans la définition que nous avons adoptée (art. 46) pour la multiplication des quantités complexes en général.

162. V. La multiplication des unités imaginaires étant associative (art. 150), on en conclura, d'après ce que nous avons vu (art. 47), que la multiplication des quaternions, et par suite celle des biradiales qu'ils représentent, est *associative*.

Mais l'importance du principe associatif, dans la théorie qui nous occupe, nous engage à en donner deux autres démonstrations directes.

163. 1[re] *Démonstration.* — 1° En faisant abstraction des modules, supposons d'abord trois biradiales unitaires LOM, MON, NOP, telles que le plan de la troisième passe par le vecteur final ON de la deuxième, lequel est aussi le vecteur final du produit $LOM \times MON = LON$ des deux premières. On a

$$(LOM \times MON) \times NOP = LON \times NOP = LOP,$$
$$LOM \times (MON \times NOP) = LOM \times MOP = LOP.$$

Donc, dans ce cas, la multiplication est associative.

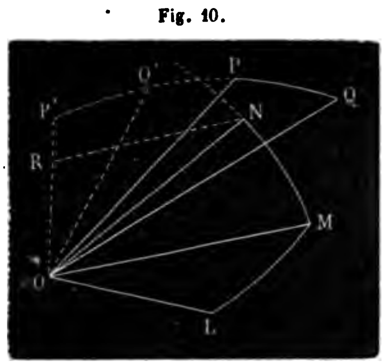
2° La propriété associative subsiste encore toutes les fois

que la seconde biradiale MON $= a_0$ est numérique, ce qui est un cas particulier de ce qui précède, le plan MON étant arbitraire. On a ainsi

$$(\mathrm{LOM} \times a_0) \times \mathrm{NOP} = \mathrm{LOM} \times (a_0 \times \mathrm{NOP}).$$

3° Soient maintenant trois biradiales quelconques LOM, MON, POQ (*fig.* 10). Si nous menons NR parallèle à OM, jusqu'à la rencontre du plan POQ en R, le vecteur ON sera décomposé en OR + RN, et par suite la biradiale MON en MOR + la biradiale numérique formée par les vecteurs parallèles OM, RN, et que nous désignerons par a_0. Or MOR ne diffère de MOP′ que par le module; de sorte que nous pouvons poser MOR $= b_0 . \mathrm{MOP'}$, b_0 étant un nombre. Donc on peut remplacer la biradiale MON par $a_0 + b_0 . \mathrm{MOP'}$.

Fig. 10.



En supposant donc la biradiale POQ transportée en P′OQ′, on a, en vertu de la propriété distributive,

$$\mathrm{LOM} \times \mathrm{MON} = \mathrm{LOM} \times a_0 + \mathrm{LOM} \times b_0 \times \mathrm{MOP'},$$

d'où

$$(\mathrm{LOM} \times \mathrm{MON}) \times \mathrm{POQ}$$
$$= (\mathrm{LOM} \times a_0) \times \mathrm{P'OQ'} + (\mathrm{LOM} \times b_0 \times \mathrm{MOP'}) \times \mathrm{P'OQ'},$$

ou, en vertu des lemmes précédents,

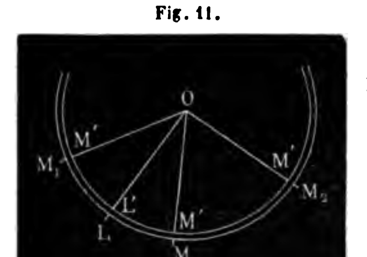
$$= \mathrm{LOM} \times (a_0 \times \mathrm{P'OQ'}) + \mathrm{LOM} \times [(b_0 \times \mathrm{MOP'}) \times \mathrm{P'OQ'}]$$
$$= \mathrm{LOM} \times [(a_0 + b_0 \times \mathrm{MOP'}) \times \mathrm{P'OQ'}]$$
$$= \mathrm{LOM} \times (\mathrm{MON} \times \mathrm{POQ}).$$

Donc la multiplication des biradiales quelconques est associative.

164. 2e *Démonstration.* — Cette démonstration, due à Möbius, est fondée sur la considération des rotations.

1° Soient un système solide Σ, mobile autour d'un point fixe O, et deux axes fixes OL, OM, partant du point O (*fig.* 11). Faisons tourner le système Σ d'une demi-révolution autour de l'axe fixe OL, ce qui amènera le vecteur-mobile OM', qui coïncidait primitivement avec OM, à prendre la position OM_1. En faisant faire au système une nouvelle demi-révolution autour de l'autre vecteur fixe OM, OM' viendra se placer en OM_2, faisant avec sa position primitive OM un angle égal à 2LOM.

Fig. 11.



Donc deux demi-révolutions, effectuées consécutivement autour de deux axes fixes OL, OM, équivalent à une seule rotation effectuée dans le plan LOM, en tournant, de OL vers OM, d'un angle double de LOM.

Si nous désignons donc par OL_π une rotation d'un angle $= \pi$ autour de l'axe OL, et par [2LOM] une rotation d'un angle 2LOM dans le plan LOM; si, de plus, nous désignons par le signe $\times$ la combinaison de deux rotations, nous aurons la relation

$$(1) \qquad OL_\pi \times OM_\pi = [2LOM].$$

2° Soient maintenant ON, OP deux autres axes, situés dans un plan différent de LOM; nous aurons de même

$$(2) \qquad ON_\pi \times OP_\pi = [2NOP].$$

Les rotations [2LOM], [2NOP] étant indépendantes des positions des biradiales LOM, NOP dans leurs plans respectifs, on ne changera rien au résultat en amenant ces biradiales à avoir pour vecteur commun l'intersection des deux plans, et les remplaçant par les biradiales respectivement égales QOR, ROS. Les égalités précédentes deviendront alors

$$OQ_\pi \times OR_\pi = [2QOR],$$
$$OR_\pi \times OS_\pi = [2ROS].$$

3° Supposons maintenant que l'on opère consécutivement les déplacements représentés par les expressions,

$$OQ_\pi, \quad OR_\pi, \quad OR_\pi, \quad OS_\pi.$$

L'effet des deux premiers sera de faire tourner le système de l'angle 2QOR dans le plan QOR; l'effet des deux derniers, indépendant de la position d'où part le système, sera de le faire tourner de l'angle 2ROS dans le plan ROS.

Mais les deux rotations consécutives OR_π, OR_π, exécutées autour du même axe, produiront des effets qui se détruiront mutuellement, de sorte que l'effet des quatre rotations se réduit à celui des deux seules rotations

$$OQ_\pi \times OS_\pi = [2QOS].$$

On aura donc, quels que soient les trois vecteurs OQ, OR, OS,

$$[2QOR] \times [2ROS] = [2QOS]. \tag{3}$$

Par conséquent, Q, R, S étant les trois sommets d'un triangle sphérique, c'est-à-dire QS étant la *somme sphérique* de deux arcs QR, RS, il reviendra au même de faire tourner un système solide dans le plan QOS de l'angle représenté par l'arc 2QS, ou de le faire tourner d'abord dans le plan QOR de l'angle représenté par 2QR, puis dans le plan ROS de l'angle représenté par 2RS.

4° Réciproquement, si deux rotations consécutives, représentées, d'après les conventions précédentes, par $[2\varphi], [2\chi]$, ont le même résultat que la rotation unique représentée par $[2\psi]$, les demi-arcs correspondants φ, χ, ψ pourront se transporter sur leurs grands cercles respectifs de manière à former les trois côtés d'un triangle sphérique, de sorte que l'on aura, le signe + indiquant l'addition sphérique,

$$\varphi + \chi = \psi;$$

car chacune des opérations considérées est *complètement* uniforme.

5° Cela posé, soient α, β, γ trois arcs de grand cercle quelconques. On aura

$$[2\alpha] \times [2\beta] = [2\delta], \quad \text{pour } \delta = \alpha + \beta,$$
$$[2\delta] \times [2\gamma] = [2\varepsilon], \quad \text{pour } \varepsilon = \delta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma,$$

d'où résulte

$$\{[2\alpha] \times [2\beta]\} \times [2\gamma] = [2\{(\alpha + \beta) + \gamma\}].$$

Mais l'effet combiné des rotations $[2\beta], [2\gamma]$ est indépendant de la position d'où part la sphère liée au système, et l'on peut toujours remplacer ces deux rotations consécutives par la rotation unique $[2\zeta]$, en prenant $\zeta = \beta + \gamma$. Donc

$$\{[2\alpha] \times [2\beta]\} \times [2\gamma] = [2\alpha] \times [2\zeta]$$
$$= [2\alpha] \times [2(\beta + \gamma)] = [2\{\alpha + (\beta + \gamma)\}].$$

Les rotations $[2\{(\alpha + \beta) + \gamma\}], [2\{\alpha + (\beta + \gamma)\}]$ sont donc équivalentes, ce qui exige que les arcs $(\alpha + \beta) + \gamma$ et $\alpha + (\beta + \gamma)$ soient sphériquement égaux, c'est-à-dire qu'ils soient de même grandeur, de même sens, et qu'ils appartiennent à un même grand cercle.

Donc l'addition sphérique est une opération associative, et, par suite, il en est de même de la multiplication des biradiales.

On pourra donc écrire

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma,$$

et, de même,

$$(\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{b}_\beta) \times \mathbf{c}_\gamma = \mathbf{a}_\alpha \times (\mathbf{b}_\beta \times \mathbf{c}_\gamma) = \mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{b}_\beta \times \mathbf{c}_\gamma.$$

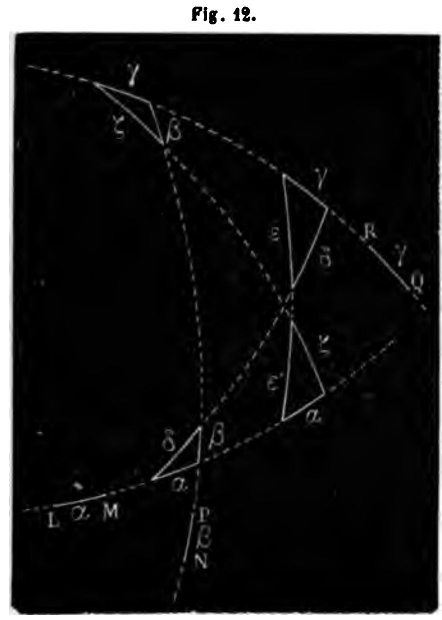
165. Au point de vue géométrique, ce théorème répond à la construction suivante :

Soient trois arcs de grand cercle quelconques

$$\mathrm{LM} = \alpha, \quad \mathrm{NP} = \beta, \quad \mathrm{QR} = \gamma.$$

Si l'on construit, par la règle de l'addition sphérique,

Fig. 12.



1° $\alpha+\beta=\delta$, $\delta+\gamma=\varepsilon$,

2° $\beta+\gamma=\zeta$, $\alpha+\zeta=\varepsilon'$,

les deux arcs

$$\varepsilon=(\alpha+\beta)+\gamma,$$
$$\varepsilon'=\alpha+(\beta+\gamma)$$

seront égaux en grandeur, et appartiendront au même grand cercle.

Hamilton a donné de cette proposition une démonstration géométrique directe, qui établit en même temps la propriété associative de la multiplication des biradiales.

166. De ce que nous venons de démontrer il s'ensuit que, si $A, B, C, \ldots$ sont des biradiales en nombre quelconque, on a, par exemple,

$$[(A.B).C]D=[A.(B.C)]D=A.[(B.C).D]=A.[B.(C.D)]$$
$$=(A.B).(C.D)=\ldots=A.B.C.D,$$

en supprimant les parenthèses, pour désigner la valeur commune de tous ces produits.

167. Développons maintenant les calculs de la multiplication des biradiales, mises sous la forme de quaternions.

Soient à multiplier l'un par l'autre les deux quaternions

$$A=a_0+a_1\iota_1+a_2\iota_2+a_3\iota_3,$$
$$B=b_0+b_1\iota_1+b_2\iota_2+b_3\iota_3,$$

et soit

$$AB=C=c_0+c_1\iota_1+c_2\iota_2+c_3\iota_3$$

leur produit.

En effectuant la multiplication d'après le principe distributif, et ayant égard aux formules des art. 148 et 149, relatives à la multiplication des unités imaginaires, on trouve, pour les valeurs des coefficients du produit C,

$$(1)\quad \begin{cases} c_0 = a_0 b_0 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3, \\ c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 + | a_3 b_2 |, \\ c_2 = a_0 b_2 + a_2 b_0 + | a_1 b_3 |, \\ c_3 = a_0 b_3 + a_3 b_0 + | a_2 b_1 |. \end{cases}$$

168. Si l'on met les deux biradiales sous la forme

$$A = a_0 + a_i, \qquad B = b_0 + b_i,$$

leur produit deviendra

$$(2)\quad AB = a_0 b_0 + a_0 b_i + b_0 a_i + a_i b_i.$$

En intervertissant l'ordre des facteurs, on aura

$$BA = a_0 b_0 + a_0 b_i + b_0 a_i + b_i a_i.$$

Les deux produits ne diffèrent donc que par leur dernier terme, qui est le produit des deux vecteurs. Or on a, par ce qui précède,

$$a_i b_i = - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3 + \{ |a_3 b_2| \, \mathrm{i}_1 + |a_1 b_3| \, \mathrm{i}_2 + |a_2 b_1| \, \mathrm{i}_3 \}.$$

Lorsqu'on échange entre elles les lettres a et b, la partie réelle

$$(3)\quad \mathfrak{S}\, a_i b_i = - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3$$

ne varie pas, tandis que la partie imaginaire

$$(4)\quad \mathfrak{V}\, a_i b_i = |a_3 b_2| \, \mathrm{i}_1 + |a_1 b_3| \, \mathrm{i}_2 + |a_2 b_1| \, \mathrm{i}_3$$

change de signe.

On a donc les deux équations

$$(5)\quad \mathfrak{S}(a_i b_i) = \mathfrak{S}(b_i a_i),$$

$$(6)\quad \mathfrak{V}(a_i b_i) = - \mathfrak{V}(b_i a_i),$$

c'est-à-dire que les deux produits de vecteurs $a_i b_i$, $b_i a_i$ sont conjugués (art. 157), en sorte que l'on a

$$(7) \qquad b_i a_i = \overline{a_i b_i}.$$

On voit, de plus, que les termes $a_0 b_i$, $b_0 a_i$ de la formule (3) étant essentiellement imaginaires, la partie réelle de AB se compose de

$$(8) \qquad \mathfrak{S}AB = a_0 b_0 + \mathfrak{S} a_i b_i,$$

expression qui ne change pas quand on intervertit l'ordre des facteurs, de sorte que l'on a

$$(9) \qquad \mathfrak{S}AB = \mathfrak{S}BA.$$

169. En faisant, dans les formules précédentes, $B = A$, on a, pour le carré d'un quaternion,

$$(10) \qquad A^2 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 + 2a_0(a_1 \iota_1 + a_2 \iota_2 + a_3 \iota_3).$$

Si l'on suppose $a_0 = 0$, on obtient l'expression du carré d'un vecteur

$$(11) \qquad a_i^2 = -a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = -(\mathfrak{T} a_i)^2.$$

Le carré d'un vecteur est donc égal à *moins* le carré de son module (art. 145).

On a, en général,

$$(12) \qquad (\mathfrak{T} A)^2 = a_0^2 + (\mathfrak{T} a_i)^2.$$

170. Le produit de deux quaternions conjugués,

$$A\bar{A} = (a_0 + a_i)(a_0 - a_i) = a_0^2 - a_i^2 = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = (\mathfrak{T} A)^2,$$

est égal au carré du module (art. 101).

En ajoutant et soustrayant deux quaternions conjugués, on a (art. 110)

$$(13) \qquad A + \bar{A} = 2a_0,$$

$$(14) \qquad A - \bar{A} = 2a_i.$$

Donc la partie réelle et la partie imaginaire sont respectivement

égales à la demi-somme et à la demi-différence du quaternion et de son conjugué.

171. D'après ce que nous avons vu, le produit AB peut s'écrire

$$AB = a_0 b_0 + \mathfrak{S}\, a_i b_i + (a_0 b_i + b_0 a_i) + \mathfrak{V}\, a_i b_i .$$

Le conjugué de ce produit est donc

$$\overline{AB} = a_0 b_0 + \mathfrak{S}\, a_i b_i - (a_0 b_i + b_0 a_i) - \mathfrak{V}\, a_i b_i .$$

Or, on a, à cause de l'équation (7),

$$b_i a_i = \mathfrak{S}\, a_i b_i - \mathfrak{V}\, a_i b_i , \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{V}\, b_i a_i = - \mathfrak{V}\, a_i b_i ;$$

donc

$$\overline{AB} = a_0 b_0 - (a_0 b_i + b_0 a_i) + \mathfrak{V}\, b_i a_i .$$

D'ailleurs

$$\bar{B}.\bar{A} = (b_0 - b_i)(a_0 - a_i) = a_0 b_0 + \mathfrak{S}\, b_i a_i - (a_0 b_i + b_0 a_i) + \mathfrak{V}\, b_i a_i .$$

On retrouve donc ainsi la formule de l'art. 159,

$$(15) \qquad \overline{A.B} = \bar{B}.\bar{A} .$$

172. Si l'on multiplie le produit $AB = C$ par son conjugué $\overline{AB} = \bar{C}$, on aura, en vertu de la propriété associative,

$$(16) \left\{ \begin{aligned} C\bar{C} &= (\mathfrak{T} C)^2 = AB.\overline{AB} = AB.\bar{B}\bar{A} = A.B\bar{B}.\bar{A} = A(\mathfrak{T} B)^2.\bar{A} \\ &= (\mathfrak{T} B)^2.A\bar{A} = (\mathfrak{T} B)^2.(\mathfrak{T} A)^2, \end{aligned} \right.$$

ou, en mettant pour les carrés des modules leurs valeurs,

$$(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 .$$

Donc le produit de deux sommes de quatre carrés peut se mettre sous la forme de la somme des carrés de quatre expressions rationnelles et entières des racines des premiers carrés, et déterminées par les formules (1) de l'art. 167.

La formule (16) exprime que le module du produit de deux quaternions est égal au produit des modules des deux facteurs (art. 154).

173. En divisant un quaternion par son module, on obtient son verseur,

$$(17) \qquad \mathfrak{U}A = \frac{A}{\mathfrak{T}A} = \frac{a_0 + a_1 \mathrm{I}_1 + a_2 \mathrm{I}_2 + a_3 \mathrm{I}_3}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

De même, en divisant le vecteur a_i par son module, on obtient le verseur du vecteur ou l'axe du quaternion,

$$(18) \qquad \mathrm{A} = \frac{a_i}{\mathfrak{T}a_i} = \frac{a_1 \mathrm{I}_1 + a_2 \mathrm{I}_2 + a_3 \mathrm{I}_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

D'après l'équation (11), on a

$$(19) \qquad \mathrm{A}^2 = -1.$$

Le carré d'un axe est donc égal à *moins* l'unité.

En posant (art. 144)

$$(20) \qquad \frac{a_0}{\mathfrak{T}A} = \cos\alpha, \qquad \frac{\mathfrak{T}a_i}{\mathfrak{T}A} = \sin\alpha,$$

le verseur (17) prendra la forme

$$\cos\alpha + \mathrm{A}\sin\alpha.$$

On pourra donc mettre un quaternion quelconque A sous la forme,

$$(21) \qquad A = \mathfrak{T}A.(\cos\alpha + \mathrm{A}\sin\alpha).$$

L'angle α est l'*argument* du quaternion ou du verseur.

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $a_0 = 0$; le quaternion est rectangle et se réduit alors à son vecteur (art. 139).

174. Un quaternion, mis sous la forme *réduite* (21), jouit de propriétés analogues à celles d'une quantité complexe dans le plan. Ainsi, si A et A' sont deux quaternions de même axe A, et par suite coplanaires, on a, en vertu de la formule (19),

$$(22) \qquad \begin{cases} AA' = \mathfrak{T}A.\mathfrak{T}A'.(\cos\alpha + \mathrm{A}\sin\alpha)(\cos\alpha' + \mathrm{A}\sin\alpha') \\ \quad\;\; = \mathfrak{T}A.\mathfrak{T}A'.\{\cos(\alpha+\alpha') + \mathrm{A}\sin(\alpha+\alpha')\}, \end{cases}$$

avec une formule analogue pour le quotient $\frac{A}{A'}$.

On en tire, par le procédé connu, quel que soit l'exposant n,

(23) $$A^n = (\mathfrak{T}A)^n (\cos n\alpha + \text{A} \sin n\alpha).$$

175. Un verseur donné quelconque

$$\cos\alpha + \text{A} \sin\alpha$$

peut être identifié avec une puissance convenable n d'un verseur de même axe $\cos\beta + \text{A}\sin\beta$, en posant $\alpha = n\beta$, d'où

$$\cos\alpha + \text{A}\sin\alpha = \cos n\beta + \text{A}\sin n\beta = (\cos\beta + \text{A}\sin\beta)^n,$$

En particulier, si l'on prend $\beta = \frac{\pi}{2}$, on aura

$$\cos\beta + \text{A}\sin\beta = \text{A},$$

d'où $n = \frac{2}{\pi}\alpha$, et

$$\cos\alpha + \text{A}\sin\alpha = \text{A}^{\frac{2}{\pi}\alpha}.$$

$\frac{2}{\pi}\alpha$ représente la grandeur de l'argument α, évaluée en parties du quadrant. Pour simplifier l'écriture, ***nous conviendrons d'évaluer en parties du quadrant les arcs qui entreront en exposants,*** et nous aurons ainsi

(24) $$\cos\alpha + \text{A}\sin\alpha = \text{A}^{\alpha}.$$

Ainsi, tout verseur peut s'exprimer par une puissance de son axe dont l'exposant est égal à l'argument évalué en parties du quadrant.

De même, si l'on donne une biradiale quelconque,

$$A = \text{a}(\cos\alpha + \text{A}\sin\alpha),$$

on pourra l'exprimer au moyen de la puissance α du vecteur $\text{a}^{\frac{1}{\alpha}}\text{A}$, de sorte que

(25) $$A = \left(\text{a}^{\frac{1}{\alpha}}A\right)^{\alpha}.$$

176. Tant qu'il s'agit de biradiales du même axe, c'est-à-dire de biradiales coplanaires, les puissances de vecteurs peuvent

se multiplier ou se diviser d'après les règles ordinaires de l'algèbre.

Mais il n'en est plus de même lorsqu'il s'agit de biradiales ou de verseurs d'axes différents, tels que

$$\cos\alpha + \text{A}\sin\alpha, \qquad \cos\beta + \text{B}\sin\beta.$$

En effet, le produit de deux vecteurs de direction différente A, B n'étant pas égal à —1 (art. 157), on n'aura plus de formule analogue à (22), qui permette de faire la multiplication par l'addition arithmétique des arguments; partant, en mettant les biradiales sous la forme (24) ou (25), le produit ne pourra plus s'obtenir par des additions d'exposants.

177. Au lieu de la forme (24), on pourrait prendre, pour représenter un verseur, la forme exponentielle

$$\cos\alpha + \text{A}\sin\alpha = e^{\alpha\text{A}},$$

que l'on pourrait employer conformément aux règles de l'algèbre ordinaire, dans le calcul des biradiales coplanaires, comme nous avons employé la forme $e^{\alpha i}$ pour les quantités complexes ordinaires.

Mais, quand on a en présence deux verseurs d'axes différents, si on les représentait par des exponentielles

$$e^{\alpha\text{A}}, \qquad e^{\beta\text{B}},$$

on ne pourrait plus appliquer la règle de l'addition des exposants. Car cette règle s'appuie sur les propriétés de la série qui définit l'exponentielle imaginaire, et sur l'identité qui en résulte pour les développements des expressions

$$e^u \times e^v \quad \text{et} \quad e^{u+v},$$

c'est-à-dire sur l'égalité identique

$$\left(\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{u^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{v^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(u+v)^n}{n!}.$$

Or cette identité est fondée sur la formule du binôme, laquelle

n'est plus vraie dans le cas où la multiplication cesse d'être commutative. Car on a alors, par exemple,

$$(u+v)^2 = u^2 + uv + vu + v^2,$$

qui ne se réduit pas à $u^2 + 2uv + v^2$, et il en est de même pour les autres puissances. On ne peut donc plus poser dans ce cas $e^u . e^v = e^{u+v}$.

§ III.

Division des biradiales.

178. Nous avons vu que le produit de deux biradiales conjuguées est égal au carré de leur module commun, de sorte que, si **a** est le module de la biradiale A, on a

$$A.\bar{A} = \bar{A}.A = \mathbf{a}^2.$$

En divisant par $\mathbf{a}^2$ les deux membres de cette égalité, il vient

$$A.\frac{\bar{A}}{\mathbf{a}^2} = \frac{\bar{A}}{\mathbf{a}^2}.A = 1.$$

Donc les deux biradiales A et $\frac{\bar{A}}{\mathbf{a}^2}$ ont pour produit l'unité, dans quelqu'ordre qu'on place les facteurs, et par suite chacune d'elle devra être considérée comme le quotient de l'unité divisée par l'autre, soit que l'on définisse le quotient comme le premier ou comme le second facteur du dividende.

On aura, d'après cela, pour la quantité ***réciproque*** de A (art. 28),

$$(1) \qquad \frac{1}{A} = A^{-1} = \frac{\bar{A}}{(\mathfrak{T}A)^2}.$$

De là on conclut facilement que, si l'on prend pour dividende, au lieu de l'unité, une quantité numérique quelconque $\mathbf{g}$, le quotient X, défini par l'une ou l'autre des égalités

$$A.X = \mathbf{g}, \qquad X.A = \mathbf{g},$$

qui peuvent s'écrire

$$\frac{A}{g}.X=1, \quad X.\frac{A}{g}=1,$$

aura, dans les deux cas, pour valeur

$$(2) \qquad X=\left(\frac{A}{g}\right)^{-1}=g.A^{-1}=\frac{g}{(\mathfrak{T}A)^2}.\mathfrak{C}A.$$

L'interprétation géométrique de ces formules est évidente.

179. Considérons maintenant le problème général de l'inversion de la multiplication. Il consiste, étant donné un produit et l'un de ses facteurs, à trouver l'autre facteur. Mais ici, la multiplication n'étant pas commutative, il n'est pas indifférent que ce soit le premier ou le second facteur qui soit inconnu. On aura donc deux problèmes distincts à résoudre, suivant que le facteur inconnu X devra satisfaire à l'une ou à l'autre des équations

$$(3) \qquad B.X=A,$$

$$(4) \qquad X.B=A.$$

Pour résoudre l'équation (3), on opèrera sur les deux membres par $B^{-1}\times$, ce qui donnera, en vertu de la propriété associative et de l'égalité $B^{-1}\times B=1$,

$$(5) \qquad X=B^{-1}.A=\frac{\mathfrak{C}B}{(\mathfrak{T}B)^2}.A.$$

Pour résoudre l'équation (4), on opèrera par $\times B^{-1}$, et l'on aura

$$X=A.B^{-1}=A.\frac{\mathfrak{C}B}{(\mathfrak{T}B)^2}.$$

On voit que, dans les deux cas, l'inversion de la multiplication est toujours possible, et se ramène à une autre multiplication, dont les facteurs sont le produit donné et le réciproque du facteur connu.

180. Nous pourrions donner le nom de *division* soit à l'un,

soit à l'autre de ces deux problèmes d'inversion de la multiplication. Cependant, pour rester d'accord avec les conventions adoptées précédemment, et conserver l'analogie dans les résultats, c'est le premier problème, celui de la résolution de l'équation (3), que nous prendrons comme définition de la division. Ainsi la division des biradiales sera définie par la relation

(6) dividende = diviseur × quotient.

D'après cela, si LON est le produit donné ou le ***dividende,*** LOM le facteur donné ou le ***diviseur,*** les deux biradiales étant supposées ramenées ***au même vecteur initial,*** le quotient sera la biradiale MON, formée par les vecteurs terminaux des deux termes de la division.

On aura donc, pour trouver le quotient, la règle exprimée par l'égalité

$$(7)\quad \begin{cases} \text{quotient} = \text{réciproque du diviseur} \times \text{dividende} \\ \qquad\quad = \dfrac{\text{conjugué du diviseur}}{(\text{module du diviseur})^2} \times \text{dividende}. \end{cases}$$

181. Si l'on représente le dividende par $A = \mathbf{a}_\alpha$, le diviseur par $\mathbf{b}_\beta$ et le quotient par $X = \mathbf{x}_\xi$, on aura, par définition,

$$\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{b}_\beta . \mathbf{x}_\xi = (\mathbf{bx})_{\beta+\xi},$$

d'où l'on conclut

$$\mathbf{a} = \mathbf{bx}, \qquad \mathbf{x} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}};$$

ensuite, + indiquant l'addition sphérique,

$$\alpha = \beta + \xi,$$

d'où, en opérant par $-\beta$ (premier terme) sur les deux membres de l'égalité, et se rappelant que l'addition sphérique est assoeiative,

$$-\beta + \alpha = -\beta + \beta + \xi = \xi.$$

Donc le module du quotient est égal au module du divi-

dende divisé par celui du diviseur, et son argument est égal à la somme de *moins* l'argument du diviseur, *plus* l'argument du dividende; c'est-à-dire que l'on a

$$(8) \qquad \frac{\mathbf{a}_\alpha}{\mathbf{b}_\beta} = \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)_{-\beta+\alpha}.$$

Ainsi, en faisant abstraction des modules, le quotient $\frac{\text{LON}}{\text{LOM}}$ s'obtient en ajoutant l'argument ML = — LM (1er terme) à LN (2e terme), ce qui donne ML + LN = MN, de sorte que le quotient est MOL × LON = MON. En effet, on a bien, conformément à la définition (6),

$$\text{LOM} \times \text{MON} = \text{LON}.$$

182. Si le dividende est égal à l'unité, et que l'on pose

$$1 = \mathbf{b}_\beta . \mathbf{x}_\xi = (\mathbf{b}\mathbf{x})_{\beta+\xi},$$

on en conclut

$$\mathbf{b}\mathbf{x} = 1, \qquad \beta + \xi = 0,$$

d'où, en se rappelant la définition des quantités réciproques (art. 28), le *module* de l'addition sphérique étant 0,

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\mathbf{b}}, \qquad \xi = -\beta + 0 = -\beta.$$

Donc

$$\frac{1}{\mathbf{b}_\beta} = \mathbf{x}_\xi = \left(\frac{1}{\mathbf{b}}\right)_{-\beta}.$$

Dans ce cas, où le produit est réel, les deux biradiales B et $\frac{1}{B}$ étant situées dans le même plan, la multiplication est commutative; de sorte que l'on a aussi (art. 28)

$$1 = \mathbf{x}_\xi \mathbf{b}_\beta, \qquad \mathbf{b}_\beta = \frac{1}{\mathbf{x}_\xi}.$$

On voit par là que l'expression (8) a la même valeur que l'expression

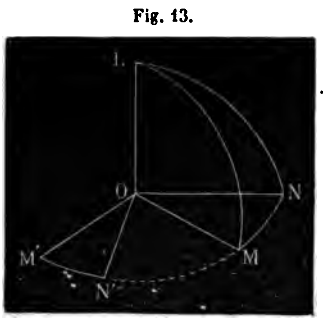
$$\frac{1}{\mathbf{b}_\beta} . \mathbf{a}_\alpha = \left(\frac{1}{\mathbf{b}} . \mathbf{a}\right)_{-\beta+\alpha},$$

ce qui résultait immédiatement de la formule (5) ou

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{B} . A.$$

183. Soit L (*fig.* 13) le pôle d'un arc de grand cercle quelconque MN. La biradiale MON sera le quotient $\frac{\mathrm{LON}}{\mathrm{LOM}}$ des deux biradiales rectangles LON, LOM, ou des deux vecteurs ou axes ON′, OM′, qui équivalent à ces biradiales. Or ces deux vecteurs sont dans le plan MON. Leur rapport en grandeur $\frac{\mathrm{ON'}}{\mathrm{OM'}}=\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OM}}$, et leur angle M′ON′ = MON. Donc ils forment une biradiale identique à MON, et par suite ***une biradiale est égale au rapport des deux vecteurs qui la forment, considérés en grandeur et en position.***

Fig. 13.



On peut donc, au lieu de la notation MON, employer pour désigner la même biradiale la notation $\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OM}}$ du rapport du vecteur final au vecteur initial, ce qui est une généralisation de la notation que nous avons employée dans la théorie des biradiales coplanaires.

184. D'après cette notation, les équations établies dans les art. 141 et 151 deviennent, en désignant par L, M, N les vecteurs OL, OM, ON,

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}+\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{L}}=\frac{\mathrm{M}+\mathrm{N}}{\mathrm{L}},$$

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}\times\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{L}}.$$

185. Un vecteur pouvant être considéré comme une biradiale rectangle, on aura (art. 179)

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}=\frac{1}{\mathrm{L}}\mathrm{M}=\frac{1}{(\mathfrak{T}\mathrm{L})^2}.\bar{\mathrm{L}}.\mathrm{M},$$

ou, à cause de $\bar{\mathrm{L}}=-\mathrm{L}$ (art. 140 et 158),

$$\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{L}}=-\frac{1}{(\mathfrak{T}\mathrm{L})^2}.\mathrm{L}.\mathrm{M}.$$

On a d'ailleurs (art. 159)

$$\overline{\text{LM}} = \bar{\text{M}}.\bar{\text{L}} = (-\text{M}).(-\text{L}) = \text{M}.\text{L}.$$

Donc

$$\mathfrak{C}\frac{\text{M}}{\text{L}} = -\frac{1}{(\mathfrak{T}\text{L})^2}\,\text{M}.\text{L}.$$

On passe ainsi d'une biradiale à sa conjuguée, en intervertissant les facteurs dans le produit L.M des vecteurs (art. 158).

186. Supposons maintenant les biradiales données sous la forme de quaternions. Soient

$$A = a_0 + a_1 \text{I}_1 + a_2 \text{I}_2 + a_3 \text{I}_3,$$
$$B = b_0 + b_1 \text{I}_1 + b_2 \text{I}_2 + b_3 \text{I}_3;$$

proposons-nous de calculer le quotient

$$\frac{A}{B} = X = x_0 + x_1 \text{I}_1 + x_2 \text{I}_2 + x_3 \text{I}_3.$$

En substituant pour X son expression dans l'égalité

$$A = BX,$$

et développant le produit (art. 167), il vient, par l'identification des deux membres,

$$b_0 x_0 - b_1 x_1 - b_2 x_2 - b_3 x_3 = a_0,$$
$$b_1 x_0 + b_0 x_1 + b_3 x_2 - b_2 x_3 = a_1,$$
$$b_2 x_0 - b_3 x_1 + b_0 x_2 + b_1 x_3 = a_2,$$
$$b_3 x_0 + b_2 x_1 - b_1 x_2 + b_0 x_3 = a_3.$$

Si l'on ajoute ces équations, après les avoir multipliées respectivement par les coefficients 1° de x_0, 2° de x_1, 3° de x_2, 4° de x_3 dans chacune d'elles, il vient, en remplaçant $b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ par $(\mathfrak{T}B)^2$,

$$(\mathfrak{T}B)^2 x_0 = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \Sigma ab,$$
$$(\mathfrak{T}B)^2 x_1 = a_1 b_0 - a_0 b_1 + a_3 b_2 - a_2 b_3 = |a_1 b_0| + |a_3 b_2|,$$
$$(\mathfrak{T}B)^2 x_2 = a_2 b_0 - a_3 b_1 - a_0 b_2 + a_1 b_3 = |a_2 b_0| + |a_1 b_3|,$$
$$(\mathfrak{T}B)^2 x_3 = a_3 b_0 + a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_0 b_3 = |a_3 b_0| + |a_2 b_1|.$$

On aurait encore pu obtenir ces formules en multipliant par A le conjugué de B (art. 179).

On voit que la valeur de X est déterminée et finie toutes les fois que le module $\mathfrak{T}B$ du diviseur n'est pas nul, et par suite toutes les fois que les valeurs réelles des composantes b_0, b_1, b_2, b_3 du diviseur ne sont pas toutes nulles. Ainsi la division est une opération *uniforme* toutes les fois que le diviseur ne s'annule pas. Il ne pourrait en être autrement que si l'on admettait, pour les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3, des valeurs complexes de la forme $p+q\sqrt{-1}$.

187. En faisant $a_0=0$, $b_0=0$, $a_i=\mathrm{A}$, $b_i=\mathrm{B}$ dans ces formules, on aura l'expression de la biradiale ou du quaternion $X=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, formé par les vecteurs

$$\mathrm{A}=a_1\mathrm{I}_1+a_2\mathrm{I}_2+a_3\mathrm{I}_3,\qquad \mathrm{B}=b_1\mathrm{I}_1+b_2\mathrm{I}_2+b_3\mathrm{I}_3,$$

savoir, $(\mathfrak{T}\mathrm{B})^2$ étant égal à $b_1^2+b_2^2+b_3^2$,

$$(\mathfrak{T}\mathrm{B})^2X=(\mathfrak{T}\mathrm{B})^2.\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)$$
$$+|a_3b_2|\mathrm{I}_1+|a_1b_3|\mathrm{I}_2+|a_2b_1|\mathrm{I}_3.$$

Pour déterminer les divers éléments de la biradiale X, nous aurons les équations

$$(\mathfrak{T}\mathrm{B})^4(\mathfrak{T}X)^2=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2+|a_3b_2|^2+|a_1b_3|^2+|a_2b_1|^2$$
$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)=(\mathfrak{T}\mathrm{A})^2(\mathfrak{T}\mathrm{B})^2,$$

d'où (art. 181 et 145)

$$\mathfrak{T}X=\mathfrak{T}\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathfrak{T}\mathrm{A}}{\mathfrak{T}\mathrm{B}},$$

$$\cos\xi=\frac{\mathfrak{S}X}{\mathfrak{T}X}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{(\mathfrak{T}\mathrm{B})^2\mathfrak{T}X}=\frac{\Sigma ab}{\mathfrak{T}\mathrm{A}.\mathfrak{T}\mathrm{B}},$$

$$\sin\xi=\frac{\mathfrak{T}\mathfrak{V}X}{\mathfrak{T}X}=\frac{\sqrt{|a_3b_2|^2+|a_1b_3|^2+|a_2b_1|^2}}{(\mathfrak{T}\mathrm{B})^2\mathfrak{T}X}=\frac{\sqrt{(\mathfrak{T}\mathrm{A})^2(\mathfrak{T}\mathrm{B})^2-(\Sigma ab)^2}}{\mathfrak{T}\mathrm{A}.\mathfrak{T}\mathrm{B}}.$$

On en conclut que la biradiale est rectangle, si l'on a

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

Elle sera *numérique*, les deux vecteurs coïncidant ou étant parallèles, si l'on a

$$a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3.$$

§ IV.

Transformations diverses, relatives aux produits et aux quotients de biradiales et de vecteurs.

188. Indiquons maintenant certaines transformations importantes des égalités entre des produits de biradiales.

Si l'on a une équation de la forme

$$AB = CD,$$

on pourra faire disparaître un facteur de l'un des membres, en le remplaçant dans l'autre par son conjugué. Si l'on opère, en effet, sur les deux membres par $\bar{A} \times$, il vient, à cause de $\bar{A}A = (\mathfrak{T}A)^2$,

$$(\mathfrak{T}A)^2 B = \bar{A}CD, \quad \text{ou} \quad B = \frac{1}{(\mathfrak{T}A)^2} \bar{A}CD,$$

le facteur A ayant disparu du premier membre.

Si l'on opère, au contraire, par $\times \bar{B}$, il vient

$$A(\mathfrak{T}B)^2 = CD\bar{B}, \quad \text{ou} \quad A = \frac{1}{(\mathfrak{T}B)^2} CD\bar{B}.$$

On s'y prendrait de même pour faire disparaître les facteurs du second membre.

Ainsi, *dans une égalité de deux produits de biradiales, on peut effacer le premier (ou le dernier) facteur d'un membre, en introduisant son conjugué (divisé par le carré du module) comme premier (ou dernier) facteur dans l'autre membre, ou,* ce qui revient au même (art. 179), *en écrivant son réciproque dans l'autre membre,*

au même rang que le facteur occupait dans le membre où il se trouvait d'abord.

189. Si l'on suppose, par exemple, que A, B, C, D soient des biradiales unitaires, représentant les côtés d'un polygone sphérique fermé PQRSP, la somme sphérique des côtés du polygone, parcourus dans un sens constant, étant nulle, le produit des biradiales, qui ramène le rayon initial à son point de départ, sera égal à l'unité. On aura donc, dans ce cas,

$$ABCD = 1.$$

En transformant cette égalité comme on l'a indiqué dans l'article précédent, et remarquant que les modules $\mathfrak{T}A, \mathfrak{T}B, \ldots$ sont tous égaux à l'unité, on en tirera les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} BCD &= \bar{A}, & ABC &= \bar{D}, \\ CD &= \bar{B}\bar{A}, & AB &= \bar{D}\bar{C}, \\ D &= \bar{C}\bar{B}\bar{A}, & A &= \bar{D}\bar{C}\bar{B}, \\ 1 &= \bar{D}\bar{C}\bar{B}\bar{A}, & BC &= \bar{D}\bar{A}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

190. Soit à trouver une biradiale X telle que l'on ait

$$A = \frac{B}{X}, \quad \text{ou} \quad XA = B,$$

le facteur inconnu étant ici le *premier* facteur, et non le *second*, comme dans la division telle que nous l'avons définie (art. 180). En opérant sur les deux membres de l'équation par $\times \bar{A}$, nous avons trouvé (art. 179)

$$X = \frac{B\bar{A}}{(\mathfrak{T}A)^2}.$$

De même, l'équation

$$AXB = C$$

donnerait

$$X = \frac{\bar{A}C\bar{B}}{(\mathfrak{T}A)^2 (\mathfrak{T}B)^2}.$$

191. Si l'on applique à la multiplication et à son inverse, la

division, les résultats généraux établis dans le Chapitre Ier (art. 23, 24, 25, 29), nous obtiendrons les formules de transformation suivantes :

$$\frac{B}{C}.A = \frac{BA}{C} = \frac{A}{\left(\frac{C}{B}\right)},$$

$$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{C} = \frac{A}{BC},$$

que l'on aurait pu obtenir en remplaçant l'opération de la division par C par l'opération $\frac{1}{C}\times$, et remarquant que $\frac{C}{B}$ est le réciproque de $\frac{B}{C}$.

Ces formules donnent encore

$$\frac{B}{A}.\frac{C}{B} = \frac{1}{A}.B.\frac{1}{B}.C = \frac{1}{A}.C = \frac{C}{A},$$

ce qui n'est autre chose que la formule de l'art. 151.

Mais on n'a pas généralement $\frac{A}{B}.B = A$, la multiplication n'étant pas commutative.

192. Soient A, B deux vecteurs unitaires, ou deux verseurs rectangles, et soit $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = Q$ la biradiale formée par ces vecteurs. Deux vecteurs conjugués étant égaux et de signe contraire (art. 140), on a $\bar{\mathrm{A}} = -\mathrm{A}$, $\bar{\mathrm{B}} = -\mathrm{B}$. Cela posé, de l'équation

$$(\mathrm{A}) \qquad \mathrm{A} = \mathrm{B}Q$$

on tire, en opérant par $\bar{\mathrm{B}}\times$, les égalités

$$\bar{\mathrm{B}}\mathrm{A} = Q = -\mathrm{BA} = \mathrm{B}\bar{\mathrm{A}},$$

puis, en opérant par $\times\bar{Q}$ sur la même égalité (A), et ensuite par $\bar{\mathrm{A}}\times$,

$$\mathrm{A}\bar{Q} = \mathrm{B}, \qquad \text{d'où} \qquad \bar{Q} = \bar{\mathrm{A}}\mathrm{B} = -\mathrm{AB},$$

d'où l'on voit que les produits BA et AB sont égaux à deux biradiales conjuguées $-Q, -\bar{Q}$ (art. 185). On a encore

$$Q\text{A} = \text{B}, \quad \text{A} = \bar{Q}\text{B}.$$

En appliquant à toutes ces égalités de produits la définition de la division (art. 178), on a les nouvelles égalités

$$\frac{Q}{\text{B}} = -\text{A}, \quad \frac{\text{B}}{\text{A}} = \bar{Q} = \mathfrak{C}\frac{\text{A}}{\text{B}}, \quad \frac{\text{B}}{Q} = \text{A},$$

$$\frac{\text{A}}{\bar{Q}} = \text{B}, \quad \frac{\bar{Q}}{\text{A}} = -\text{B}.$$

193. Éclaircissons ce qui précède par quelques applications numériques.

Soient les deux vecteurs

$$\text{A} = 2\text{I}_1 + 4\text{I}_2 - \text{I}_3, \quad \text{B} = 2\text{I}_1 + \text{I}_2 + 2\text{I}_3.$$

On a d'abord

$$(\mathfrak{T}\text{A})^2 = 21, \quad (\mathfrak{T}\text{B})^2 = 9, \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{T}(\text{AB}) = 3\sqrt{21}, \quad \mathfrak{T}\frac{\text{A}}{\text{B}} = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Pour calculer le produit BA, on multipliera les deux polynômes par les règles ordinaires de l'algèbre, en ayant soin de ne pas transposer les facteurs dans la multiplication des unités imaginaires, et observant les règles établies dans les art. 148 et 149. On pourra disposer le calcul comme il suit, chaque ligne horizontale contenant les produits par un même terme du multiplicande,

BA = − 4	I_1 − 2	I_2 − 8	I_3 = − 6 + 9 I_1 − 6 I_2 − 6 I_3.
− 4 + 1		+ 2	
+ 2 + 8	− 4		

Donc (art. 185) la biradiale formée par ces deux vecteurs sera

$$C = \frac{\text{A}}{\text{B}} = -\frac{\text{BA}}{(\mathfrak{T}\text{B})^2} = \frac{1}{3}(2 - 3\text{I}_1 + 2\text{I}_2 + 2\text{I}_3).$$

On a ensuite

$$\mathfrak{T}C = \sqrt{\frac{7}{3}}, \quad c_0 = \frac{2}{3}, \quad \mathfrak{T}c_i = \frac{\sqrt{12}}{3},$$

d'où, pour déterminer l'argument γ,

$$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{21}}, \qquad \sin\gamma = \sqrt{\frac{17}{21}}.$$

Soit maintenant une autre biradiale

$$D = 2 + \text{I}_1 - \text{I}_3;$$

cherchons une biradiale X, telle que l'on ait

$$D = \frac{\text{B}}{X} = \frac{1}{X}\text{B} = \frac{\bar{X}}{(\mathfrak{T}X)^2}\text{B}, \quad \text{ou} \quad XD = \text{B}.$$

On a (art. 190)

$$X = \frac{\text{B}\bar{D}}{(\mathfrak{T}D)^2} = \frac{1}{6}(2\text{I}_1 + \text{I}_2 + 2\text{I}_3)(2 - \text{I}_1 + \text{I}_3)$$
$$= \frac{1}{2}(\text{I}_1 + 2\text{I}_2 + \text{I}_3).$$

On voit que X est une biradiale rectangle ou un vecteur, de sorte que X et B sont les deux vecteurs qui comprennent la biradiale D.

On a ensuite, comme on le vérifie en effectuant les calculs,

$$\frac{\text{B}}{X}\cdot\frac{\text{A}}{\text{B}} = DC = (2 + \text{I}_1 - \text{I}_3)\cdot\frac{1}{3}(2 - 3\text{I}_1 + 2\text{I}_2 + 2\text{I}_3) = 3 - 2\text{I}_1 + \text{I}_2$$
$$= \frac{\text{A}}{X} = \frac{\bar{X}}{(\mathfrak{T}X)^2}\text{A} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\text{I}_1 + 2\text{I}_2 + \text{I}_3)(2\text{I}_1 + 4\text{I}_2 - \text{I}_3) = E.$$

Si l'on pose maintenant

$$\frac{E}{D} = F,$$

on aura

$$E = DF,$$
$$\bar{D}E = (\mathfrak{T}D)^2F = 6F = (2 - \text{I}_1 + \text{I}_3)(3 - 2\text{I}_1 + \text{I}_2)$$
$$= 4 - 6\text{I}_1 + 4\text{I}_2 + 4\text{I}_3,$$

d'où

$$\frac{E}{D} = \frac{1}{3}(2 - 3\text{I}_1 + 2\text{I}_2 + 2\text{I}_3) = \frac{1}{D}.DC = C.$$

Soit enfin

$$\frac{E}{C} = G.$$

On a, à cause de $(\mathfrak{T}\,C)^2 = \frac{21}{9}$,

$$\frac{21}{9}\,G = \bar{C}E = \frac{1}{3}(2 + 3\mathrm{I}_1 - 2\mathrm{I}_2 - 2\mathrm{I}_3)(3 - 2\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2)$$

$$= \frac{1}{3}(14 + 3\mathrm{I}_1 - 8\mathrm{I}_2 - 5\mathrm{I}_3),$$

d'où

$$G = \frac{E}{C} = \frac{DC}{C} = \frac{1}{C}\,DC = \frac{1}{7}(14 + 3\mathrm{I}_1 - 8\mathrm{I}_2 - 5\mathrm{I}_3),$$

valeur qui diffère de D, à cause de la non-commutativité de la multiplication.

194. Nous allons maintenant établir quelques transformations fondamentales, relatives aux produits de vecteurs.

A, B, C ... étant des vecteurs quelconques, on a (art. 159)

$$\overline{\mathrm{AB}} = \bar{\mathrm{B}}.\bar{\mathrm{A}} = (-\mathrm{B}).(-\mathrm{A}) = (-1)^2\,\mathrm{BA},$$

d'où l'on conclut d'abord

(1) $$\mathfrak{S}\,\mathrm{BA} = \mathfrak{S}\,\mathrm{AB}, \qquad \mathfrak{V}\,\mathrm{BA} = -\,\mathfrak{V}\,\mathrm{AB}.$$

Ensuite

$$\overline{\mathrm{ABC}} = \bar{\mathrm{C}}.\overline{\mathrm{AB}} = \bar{\mathrm{C}}\bar{\mathrm{B}}\bar{\mathrm{A}} = (-1)^3\,\mathrm{CBA};$$

et de même, si les vecteurs A, B, ..., G, H sont au nombre de n,

(2) $$\mathfrak{C}\,\mathrm{AB}\ldots\mathrm{GH} = (-1)^n\,\mathrm{HG}\ldots\mathrm{BA}.$$

Des égalités précédentes et des formules (13) et (14) de l'art. 170 on tire

(3) $$\begin{cases} 2\mathfrak{S}\,\mathrm{AB} = \mathrm{AB} + \mathrm{BA}, \\ 2\mathfrak{S}\,\mathrm{ABC} = \mathrm{ABC} - \mathrm{CBA}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2\mathfrak{S}\,\mathrm{AB}\ldots\mathrm{GH} = \mathrm{AB}\ldots\mathrm{GH} + (-1)^n\,\mathrm{HG}\ldots\mathrm{BA}; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} 2\mathfrak{V}AB = AB - BA, \\ 2\mathfrak{V}ABC = ABC + CBA, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2\mathfrak{V}AB\dots GH = AB\dots GH - (-1)^n HG\dots AB. \end{cases}$$

195. En décomposant BC en $\mathfrak{S}BC + \mathfrak{V}BC$, on a

$$ABC = A.\mathfrak{S}BC + A.\mathfrak{V}BC.$$

Or le produit $A.\mathfrak{S}BC$ d'un vecteur par un nombre étant un vecteur, c'est l'autre terme $\mathfrak{V}AB.C$ qui peut seul fournir la partie réelle du produit ABC. On a donc

$$(5)\quad \mathfrak{S}ABC = \mathfrak{S}(A.\mathfrak{V}BC) = \mathfrak{S}(\mathfrak{V}BC.A).$$

De même

$$\mathfrak{S}ACB = \mathfrak{S}(A.\mathfrak{V}CB),$$

et comme [éq. (1)] $\mathfrak{V}CB = -\mathfrak{V}BC$, on en conclut

$$(6)\quad \mathfrak{S}ABC = -\mathfrak{S}ACB.$$

On trouverait pareillement

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}ABC = +\mathfrak{S}BCA = +\mathfrak{S}CAB \\ = -\mathfrak{S}ACB = -\mathfrak{S}BAC = -\mathfrak{S}CBA. \end{cases}$$

On voit que la partie réelle du produit de trois vecteurs A, B, C ne change pas de valeur absolue lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs, mais qu'elle change de signe suivant une loi analogue à celle qui régit les signes des termes d'un déterminant.

196. On a ensuite [éq. (4)]

$$2\mathfrak{V}(A.\mathfrak{V}BC) = A.\mathfrak{V}BC - \mathfrak{V}BC.A.$$

En ajoutant à cette égalité l'identité

$$0 = A.\mathfrak{S}BC - \mathfrak{S}BC.A,$$

il vient

$$(8)\quad 2\mathfrak{V}(A.\mathfrak{V}BC) = ABC - BCA.$$

Si l'on a maintenant égard à l'identité

$$\text{ABC} - \text{BCA} = (\text{AB} + \text{BA})\text{C} - \text{B}(\text{AC} + \text{CA}),$$

ainsi qu'à la première des formules (3), l'égalité (8) deviendra

(9) $$\mathfrak{V}(\text{A}.\mathfrak{V}\text{BC}) = \text{C}.\mathfrak{S}\text{AB} - \text{B}.\mathfrak{S}\text{AC}.$$

En ajoutant cette égalité à l'identité

$$\mathfrak{V}(\text{A}.\mathfrak{S}\text{BC}) = \text{A}.\mathfrak{S}\text{BC},$$

on a l'égalité importante

(10) $$\mathfrak{V}\text{ABC} = \text{A}.\mathfrak{S}\text{BC} - \text{B}.\mathfrak{S}\text{AC} + \text{C}.\mathfrak{S}\text{AB}.$$

Échangeons maintenant entre elles les lettres B et C, en tenant compte de la formule (1), il viendra

$$\mathfrak{V}\text{ACB} = \text{A}.\mathfrak{S}\text{BC} + \text{B}.\mathfrak{S}\text{AC} - \text{C}.\mathfrak{S}\text{AB},$$

d'où l'on tire

(11) $$2\text{A}.\mathfrak{S}\text{BC} = \mathfrak{V}\text{ABC} + \mathfrak{V}\text{ACB}.$$

La seconde équation (4), dont le second membre n'est pas altéré par l'échange des lettres A et C, donne

(12) $$\mathfrak{V}\text{ABC} = \mathfrak{V}\text{CBA}.$$

197. De la formule (9) on tire, en vertu des formules (1),

$$\mathfrak{V}(\text{B}.\mathfrak{V}\text{CA}) = \text{A}.\mathfrak{S}\text{BC} - \text{C}.\mathfrak{S}\text{AB},$$
$$\mathfrak{V}(\text{C}.\mathfrak{V}\text{AB}) = \text{B}.\mathfrak{S}\text{AC} - \text{A}.\mathfrak{S}\text{BC}.$$

En ajoutant ces égalités à l'égalité (9), on en tire

$$\mathfrak{V}(\text{A}.\mathfrak{V}\text{BC}) + \mathfrak{V}(\text{B}.\mathfrak{V}\text{CA}) + \mathfrak{V}(\text{C}.\mathfrak{V}\text{AB}) = 0.$$

Les égalités (5), (7) et (1) donnent d'ailleurs

$$\mathfrak{S}(\text{A}.\mathfrak{V}\text{BC}) + \mathfrak{S}(\text{B}.\mathfrak{V}\text{CA}) + \mathfrak{S}(\text{C}.\mathfrak{V}\text{AB}) = 3\mathfrak{S}\text{ABC}.$$

En ajoutant cette dernière égalité à la précédente, il vient

(13) $$\text{A}.\mathfrak{V}\text{BC} + \text{B}.\mathfrak{V}\text{CA} + \text{C}.\mathfrak{V}\text{AB} = 3\mathfrak{S}\text{ABC}.$$

198. L'égalité (9) donne, en remplaçant A par $\mathfrak{V}_{AB}$ et $\mathfrak{V}_{BC}$ par $\mathfrak{V}_{CD}$,

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{AB}.\mathfrak{V}_{CD}) = D.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}_{AB}.C) - C.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}_{AB}.D),$$

et par suite [éq. (5)],

(13)' $$\mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{AB}.\mathfrak{V}_{CD}) = D.\mathfrak{S}_{ABC} - C.\mathfrak{S}_{ABD}.$$

De même

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{CD}.\mathfrak{V}_{BA}) = A.\mathfrak{S}_{CDB} - B.\mathfrak{S}_{CDA},$$

et comme $\mathfrak{V}_{BA} = -\mathfrak{V}_{AB}$, d'où

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{AB}.\mathfrak{V}_{CD}) = -\mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{BA}.\mathfrak{V}_{CD}) = +\mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{CD}.\mathfrak{V}_{BA}),$$

il en résulte

(14) $$D.\mathfrak{S}_{ABC} - A.\mathfrak{S}_{CDB} + B.\mathfrak{S}.{}_{CDA} - C.\mathfrak{S}_{ABD} = 0.$$

En remplaçant D par X, et ayant égard aux égalités (7), on a cette formule, d'une grande utilité,

(15) $$X.\mathfrak{S}_{ABC} = A.\mathfrak{S}_{BCX} + B.\mathfrak{S}_{CAX} + C.\mathfrak{S}_{ABX}.$$

199. Les trois vecteurs $\mathfrak{V}_{BC}$, $\mathfrak{V}_{CA}$, $\mathfrak{V}_{AB}$ n'étant pas généralement coplanaires, on peut décomposer suivant leurs trois directions un vecteur quelconque X, de sorte que l'on peut poser, α,β,γ étant des quantités numériques,

$$X = \alpha.\mathfrak{V}_{BC} + \beta.\mathfrak{V}_{CA} + \gamma.\mathfrak{V}_{AB}.$$

On a alors (5), en opérant par $\mathfrak{S}.A\times$, c'est-à-dire multipliant par A premier facteur, et égalant ensuite les parties réelles des deux membres,

$$\mathfrak{S}_{AX} = \alpha.\mathfrak{S}_{ABC},$$

à cause de $\mathfrak{S}(A.\mathfrak{V}_{CA}) = \mathfrak{S}_{ACA} = -\mathfrak{S}_{CA^2} = 0$, A^2 étant un nombre réel, et de même $\mathfrak{S}(A.\mathfrak{V}_{AB}) = 0$. Pareillement,

$$\mathfrak{S}_{BX} = \beta.\mathfrak{S}_{ABC},$$
$$\mathfrak{S}_{CX} = \gamma.\mathfrak{S}_{ABC}.$$

On tire de là les valeurs de α, β, γ, ce qui donne

(16) $$\text{X}.\mathfrak{S}\text{ABC} = \mathfrak{S}\text{XA}.\mathfrak{V}\text{BC} + \mathfrak{S}\text{XB}.\mathfrak{V}\text{CA} + \mathfrak{S}\text{XC}.\mathfrak{V}\text{AB}.$$

200. Si l'on suppose les trois vecteurs A, B, C exprimés au moyen de leurs composantes rectangulaires, sous la forme

$$a_1 \text{I}_1 + a_2 \text{I}_2 + a_3 \text{I}_3 = \Sigma a\text{I}, \text{ etc.},$$

on aura (art. 187)

$$\text{ABC} = \Sigma a\text{I}.\Sigma b\text{I}.\Sigma c\text{I} = -|a_1 b_2 c_3| + A_1 \text{I}_1 + A_2 \text{I}_2 + A_3 \text{I}_3,$$

en posant

$$A_1 = -c_1 \Sigma ab + |a_2 b_1| c_2 - |a_1 b_2| c_3, \text{ etc.}$$

On conclut de là

(17) $$\mathfrak{S}\text{ABC} = -|a_1 b_2 c_3|,$$

ce qui est l'expression du volume du parallélépipède qui a pour arêtes les trois vecteurs A, B, C.

Si les trois vecteurs sont coplanaires, ce volume est nul, et réciproquement. Donc

(18) $$\mathfrak{S}\text{ABC} = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs A, B, C soient situés dans un même plan, ou du moins soient parallèles à un même plan.

Par conséquent, si A, B, C sont coplanaires, les seconds membres des égalités (15) et (16) seront nuls, quel que soit X.

Comme on a, de plus, $\mathfrak{S}\text{AB} = -\Sigma ab$, on peut aisément mettre la partie imaginaire de ABC sous la forme

$$\mathfrak{S}\text{AB}.(c_1 \text{I}_1 + c_2 \text{I}_2 + c_3 \text{I}_3) + \mathfrak{S}\text{BC}.(a_1 \text{I}_1 + a_2 \text{I}_2 + a_3 \text{I}_3) \\ - \mathfrak{S}\text{CA}(b_1 \text{I}_1 + b_2 \text{I}_2 + b_3 \text{I}_3),$$

ce qui donne la formule (10).

En vertu de la formule (17), l'identité (14) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{vmatrix} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0,$$

égalité qu'on aurait pu établir directement, en remarquant que la première ligne horizontale du déterminant est égale à la somme des trois autres, multipliées respectivement par I_1, I_2, I_3.

Si l'on considère un produit de quatre vecteurs A, B, C, D, on a évidemment

$$\mathfrak{S}_{ABCD} = \mathfrak{S}(A.\mathfrak{V}_{BCD}),$$

ou, en remplaçant $\mathfrak{V}_{BCD}$ par sa valeur donnée par la formule (10) (art. 196),

$$(19) \qquad \mathfrak{S}_{ABCD} = \mathfrak{S}_{AB}.\mathfrak{S}_{CD} - \mathfrak{S}_{AC}.\mathfrak{S}_{BD} + \mathfrak{S}_{AD}.\mathfrak{S}_{BC}.$$

En outre, en permutant circulairement les lettres,

$$\mathfrak{S}_{BCDA} = \mathfrak{S}_{BC}.\mathfrak{S}_{DA} - \mathfrak{S}_{BD}.\mathfrak{S}_{CA} + \mathfrak{S}_{BA}.\mathfrak{S}_{CD},$$

ce qui donne

$$(20) \qquad \mathfrak{S}_{ABCD} = \mathfrak{S}_{BCDA}.$$

La partie réelle du produit de quatre vecteurs n'est donc pas altérée par une permutation circulaire des facteurs.

En joignant à cette relation l'égalité

$$(21) \qquad \mathfrak{S}_{ABCD} = \mathfrak{S}_{DCBA},$$

qui résulte des formules (3) (art. 194), on a toutes les relations simples relatives au produit de quatre vecteurs.

On a maintenant

$$\mathfrak{S}_{ABCD} = \mathfrak{S}(AB.CD) = \mathfrak{S}_{AB}.\mathfrak{S}_{CD} + \mathfrak{S}(\mathfrak{V}_{AB}.\mathfrak{V}_{CD}).$$

Comparant cette relation à la relation (19), on en tire la nouvelle relation

$$(22) \qquad \mathfrak{S}(\mathfrak{V}_{AB}.\mathfrak{V}_{CD}) = \mathfrak{S}_{AD}.\mathfrak{S}_{CB} - \mathfrak{S}_{AC}.\mathfrak{S}_{BD}.$$

201. Considérons l'expression

$$X = A^{-1}BA,$$

A et B étant des vecteurs. On a d'abord (art. 168)

$$\mathfrak{S}_X = \mathfrak{S}_{A^{-1}BA} = \mathfrak{S}_{BAA^{-1}} = \mathfrak{S}_B = 0.$$

Donc x est un vecteur [1] de même module que B. On a ensuite

$$\mathfrak{S}\mathrm{AXB} = \mathfrak{S}\mathrm{AA}^{-1}\mathrm{BAB} = \mathfrak{S}\mathrm{BAB} = \mathfrak{S}\mathrm{B}^2\mathrm{A} = \mathrm{B}^2\mathfrak{S}\mathrm{A} = 0.$$

Donc (art. 200) le vecteur x est situé dans le plan AOB,

On a aussi

$$\mathfrak{S}\mathrm{AX} = \mathfrak{S}\mathrm{AA}^{-1}\mathrm{BA} = \mathfrak{S}\mathrm{BA},$$

de sorte que (art. 173)

$$-\mathfrak{T}\mathrm{X}.\mathfrak{T}\mathrm{A}.\cos \mathrm{AOX} = -\mathfrak{T}\mathrm{A}.\mathfrak{T}\mathrm{B}.\cos \mathrm{BOA},$$

et, comme $\mathfrak{T}\mathrm{X} = \mathfrak{T}\mathrm{B}$, $\cos \mathrm{AOX} = \cos \mathrm{BOA}$. De même

$$\mathfrak{V}\mathrm{AX} = \mathfrak{V}\mathrm{BA}, \quad \text{d'où} \quad \sin \mathrm{AOX} = \sin \mathrm{BOA}.$$

Donc l'angle BOA = AOX, et par suite le vecteur OA est bissecteur de l'angle BOX, et la biradiale BOX a un argument double de celui de la biradiale BOA.

On peut encore le voir ainsi : on a

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}.\mathrm{BA} = \mathrm{A}^{-1} \times \mathfrak{C}\mathrm{AB},$$

d'où, en opérant par $\mathrm{A}\times$;

$$\mathrm{AX} = \mathfrak{C}\mathrm{AB},$$

puis, en divisant par $-(\mathfrak{T}\mathrm{A})^2$,

$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}} = \mathfrak{C}\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}.$$

Enfin on a

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{BA} = \mathrm{AA}^{-1}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{BA} = \mathrm{ABA}.(\mathrm{A}^{-1})^2 = \mathrm{ABA}^{-1}.$$

Donc x ne change pas, lorsqu'on remplace A par sa valeur réciproque A^{-1}.

---

[1] Cette conclusion serait encore vraie si A représentait un quaternion quelconque.

CHAPITRE VII.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS EN QUATERNIONS.

§ Ier.

Exemples particuliers de résolution d'équations du premier et du second degré.

202. Étant donnée une équation algébrique rationnelle quelconque entre un quaternion inconnu X et des quaternions connus $A, B, \ldots,$

(1) $$F(X, A, B, \ldots) = 0,$$

on pourra substituer aux quaternions leurs valeurs développées,

$$X = x_0 + x_1 \mathrm{i}_1 + x_2 \mathrm{i}_2 + x_3 \mathrm{i}_3,$$
$$A = a_0 + a_1 \mathrm{i}_1 + a_2 \mathrm{i}_2 + a_3 \mathrm{i}_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et, en suivant les règles de calcul précédemment établies, on parviendra généralement à réduire le premier membre de l'équation à la forme d'un quaternion; ce qui donne

(2) $$f_0 + f_1 \mathrm{i}_1 + f_2 \mathrm{i}_2 + f_3 \mathrm{i}_3 = 0,$$

f_0, f_1, f_2, f_3 étant des fonctions des quantités réelles $x_0, x_1, \ldots, a_0, \ldots$. Pour que l'équation soit satisfaite, il faudra que chacune des quantités f s'annule séparément, ce qui fournira quatre équations, au moyen desquelles on déterminera les quatre composantes x_0, x_1, x_2, x_3 de l'inconnue.

Si l'on trouve pour ces composantes un ou plusieurs systèmes de valeurs réelles, la quantité cherchée sera un quater-

nion ordinaire. Si les composantes sont des quantités complexes ordinaires de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, la valeur de X sera ce que Hamilton appelle un *biquaternion*.

En tenant compte de tous les systèmes de valeurs, tant réelles que complexes, des composantes de l'inconnue, le nombre des solutions n'est plus égal, comme dans la théorie des quantités complexes ordinaires, au degré de l'équation; il est généralement plus grand, comme nous en avons déjà vu un exemple (art. 53).

203. Donnons quelques exemples de résolution d'équations entre quaternions.

I. Soit l'équation du premier degré

$$\iota_1 X \iota_2 - \iota_3 X(1 + \iota_1) + X\iota_3 = 1 + \iota_2 + \iota_3.$$

En substituant à X sa valeur développée, effectuant les multiplications et séparant les termes de même espèce, on obtiendra les quatre équations

$$x_2 - x_3 = 1, \quad -2x_2 - 1 = 0, \quad x_0 + x_1 = 1, \quad -x_0 + x_1 = 1,$$

d'où l'on tire

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -\tfrac{1}{2}, \quad x_3 = -\tfrac{3}{2},$$

et par suite la valeur de l'inconnue est

$$X = \iota_1 - \tfrac{1}{2}\iota_2 - \tfrac{3}{2}\iota_3.$$

204. II. Soit encore l'équation du second degré

$$X^2 - 10\iota_1 X - 40\iota_2 = 0.$$

En posant $X = x_0 + x_1\iota_1 + x_2\iota_2 + x_3\iota_3$, et égalant séparément à zéro la partie réelle et les coefficients de $\iota_1, \iota_2, \iota_3$, on a les équations

$$\begin{aligned} 0 &= x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 10x_1, \\ 0 &= x_0(x_1 - 5), \\ 0 &= x_0 x_2 - 5x_3 - 20, \\ 0 &= x_0 x_3 + 5x_2. \end{aligned}$$

On en tire d'abord la solution

$$x_0 = 0, \quad \text{d'où} \quad x_2 = 0, \quad x_3 = -4, \quad x_1^2 - 10x_1 + 16 = 0,$$
$$x_1 = 8 \text{ ou } 2,$$

ce qui donne les deux racines

$$X = 8\mathrm{I}_1 - 4\mathrm{I}_3, \qquad X = 2\mathrm{I}_1 - 4\mathrm{I}_3.$$

On a encore la solution $x_1 = 5$, qui conduit aux équations

$$x_0^2 + 25 = x_2^2 + x_3^2,$$
$$(x_0^2 + 25)x_2 = 20x_0,$$
$$(x_0^2 + 25)x_3 = -100,$$

d'où l'on tire, i désignant l'unité imaginaire ordinaire, considérée comme irréductible avec $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$,

$$x_0^2 + 25 = \pm 20, \qquad x_0 = \pm i\sqrt{5} \text{ ou } \pm 3i\sqrt{5},$$
$$x_2 = +x_0 \text{ ou } -x_0, \qquad x_3 = -5 \text{ ou } +5,$$

ce qui donne enfin les quatre solutions

$$X = \pm i\sqrt{5}(1 + \mathrm{I}_2) + 5\mathrm{I}_1 - 5\mathrm{I}_3,$$
$$X = \pm i.3\sqrt{5}(\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2) + 5\mathrm{I}_1 + 5\mathrm{I}_3.$$

On voit ici un exemple de la multiplicité des solutions que l'on obtient par la combinaison des unités imaginaires de divers ordres (art. 53).

205. Il peut arriver, dans certains cas, que l'équation (2) (art. 202) manque de quelques-uns de ses termes, ou que quelques-unes des équations $f_0 = 0, f_1 = 0, \ldots$ rentrent les unes dans les autres. Alors l'équation proposée ne fournira plus les quatre conditions nécessaires pour déterminer les quatre composantes de l'inconnue, et celle-ci sera, au moins en partie, indéterminée.

Exemples. I. Soit l'équation

$$\mathfrak{T}X = \mathrm{a};$$

le module de X étant seul donné, le verseur $\mathfrak{U}X$ est entièrement

indéterminé, de sorte que la valeur de X peut se mettre sous la forme

$$X = \mathrm{a}.\mathrm{A}^{\alpha},$$

l'axe A et l'argument α pouvant être pris à volonté. On voit d'ailleurs qu'entre x_0, x_1, x_2, x_3 on n'a qu'une seule équation

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \mathrm{a}^2.$$

206. II. De même, l'équation

$$\mathfrak{S} X = \mathrm{a}, \quad \text{ou} \quad x_0 = \mathrm{a}$$

laisse indéterminés le vecteur $\mathfrak{V} X = x_i$, ou les trois composantes x_1, x_2, x_3, de sorte que $X = \mathrm{a} + r_i$, r_i étant un vecteur arbitraire.

207. III. L'équation

(A) $$\mathfrak{V}(\mathrm{A} x_i) = \mathrm{B},$$

A et B étant des vecteurs donnés, ne fournit que trois conditions, la partie réelle du produit $\mathrm{A} x_i$ restant indéterminée. Le premier membre peut s'écrire

$$\mathfrak{V}(\mathrm{A} X - \mathrm{A} x_0) = \mathfrak{V} \mathrm{A} X - \mathrm{A} x_0,$$

d'où

$$\mathfrak{V} \mathrm{A} X = \mathrm{B} + \mathrm{A} x_0,$$

x_0 étant arbitraire. La partie réelle y_0 de $\mathrm{A} X$ étant également arbitraire, on aura donc

$$\mathrm{A} X = \mathrm{B} + \mathrm{A} x_0 + y_0,$$

d'où, en opérant par $\mathrm{A}^{-1} \times$,

$$X = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} + x_0 + \mathrm{A}^{-1} y_0.$$

Si l'on développe le premier membre de l'équation donnée, on trouve les trois équations séparées

(B) $$|a_3 x_2| = b_1, \quad |a_1 x_3| = b_2, \quad |a_2 x_1| = b_3,$$

qui ne peuvent subsister ensemble que si l'on a la condition

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0,$$

qui exprime, comme le faisait déjà l'équation (A), que les vecteurs A et B sont rectangulaires entre eux. Cette condition étant supposée satisfaite, les équations (B) se réduisent à deux, ce qui explique la présence des deux arbitraires x_0, y_0.

208. IV. Prenons enfin l'équation

$$\mathfrak{V}\mathrm{A}X = \mathrm{B},$$

A et B étant encore deux vecteurs. En opérant par $\mathfrak{S}.\mathrm{A}^{-1}\times$, on a

$$\mathfrak{S}(\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{V}\mathrm{A}X) = \mathfrak{S}.\mathrm{A}^{-1}(\mathrm{A}X - \mathfrak{S}\mathrm{A}X) = x_0 = \mathfrak{S}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B},$$

de sorte que l'équation proposée devient

$$\mathfrak{V}.\mathrm{A}(\mathfrak{S}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} + x_i) = \mathrm{B},$$

ou

$$\mathfrak{V}\mathrm{A}x_i = \mathrm{B} - \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} = \mathrm{A}(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} - \mathfrak{S}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}) = \mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}.$$

On a maintenant $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} = \frac{1}{\mathrm{A}^2}\mathrm{AB}$, d'où

$$\mathfrak{V}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B} = \frac{1}{\mathrm{A}^2}\left\{|a_3 b_2|\iota_1 + |a_1 b_3|\iota_2 + |a_2 b_1|\iota_3\right\},$$

et par suite, en posant $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \Sigma ab$, et remarquant que $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = -\mathrm{A}^2$,

$$\mathfrak{V}\mathrm{A}x_i = +\mathrm{B} + \mathrm{A}^{-1}\Sigma ab,$$

équation analogue à celle de l'exemple précédent, mais où la condition de perpendicularité est identiquement remplie. La valeur de X sera de même forme; seulement ici la partie réelle x_0 est déterminée.

209. Donnons encore quelques exemples de procédés spéciaux qui s'appliquent à des équations d'un fréquent usage.

I. Considérons une équation du premier degré de la forme

$$(1) \qquad AX + XA = 2C.$$

A, C, X désignant des quaternions.

En développant les produits, cette équation devient

$$(a_0 + a_i)(x_0 + x_i) + (x_0 + x_i)(a_0 + a_i) = 2C,$$

ou

$$2a_0x_0 + 2(a_0x_i + x_0a_i) + a_ix_i + x_ia_i = 2C.$$

Or [art. 194, (3)]

$$a_ix_i + x_ia_i = 2\mathfrak{S}\,a_ix_i;$$

donc l'équation proposée se réduit à

$$a_0x_0 + a_0x_i + x_0a_i + \mathfrak{S}\,a_ix_i = C = c_0 + c_i,$$

d'où, en égalant séparément les parties réelles et les vecteurs,

$$a_0x_0 + \mathfrak{S}\,a_ix_i = c_0, \qquad a_0x_i + x_0a_i = c_i.$$

La seconde de ces équations donne

(2) $$x_i = \frac{c_i - x_0a_i}{a_0},$$

d'où, en substituant dans la première et développant le produit a_ix_i,

$$a_0x_0 + \mathfrak{S}\left(\frac{a_ic_i + (\mathfrak{T}\,a_i)^2x_0}{a_0}\right) = c_0,$$

ou

$$a_0^2x_0 + \mathfrak{S}\,a_ic_i + (\mathfrak{T}\,a_i)^2x_0 = a_0c_0,$$

et par suite

(3) $$x_0 = \frac{a_0c_0 - \mathfrak{S}\,a_ic_i}{a_0^2 + (\mathfrak{T}\,a_i)^2} = \frac{a_0c_0 - \mathfrak{S}\,a_ic_i}{(\mathfrak{T}\,a)^2}.$$

En substituant cette valeur dans (2), on aura x_i.

Soient, par exemple,

$$A = 1 + 2\iota_1 - \iota_3, \qquad C = 3 + \iota_1 - 2\iota_2 - \iota_3.$$

On aura

$$a_0c_0 = 3, \quad (\mathfrak{T}A)^2 = 1 + 4 + 1 = 6,$$
$$a_ic_i = (2\iota_1 - \iota_3)(\iota_1 - 2\iota_2 - \iota_3), \quad \text{d'où} \quad \mathfrak{S}\,a_ic_i = -3,$$

et par suite

$$x_0 = \frac{3 - (-3)}{6} = 1.$$

Il vient maintenant

$$x_i = \frac{(i_1 - 2i_2 - i_3) - 1.(2i_1 - i_3)}{1} = -i_1 - 2i_2,$$

d'où enfin

$$X = 1 - i_1 - 2i_2.$$

210. II. Si l'on donne l'équation plus générale

$$AX + XB = C,$$

opérons successivement sur cette équation par $A \times$, et par $\times \bar{B}$; on en tirera

$$A^2X + AXB = AC,$$
$$AX\bar{B} + X(\mathfrak{T}B)^2 = C\bar{B}.$$

Ajoutant ces deux équations, et remarquant que $B + \bar{B} = 2b_0$, il vient

$$[A^2 + 2b_0A + (\mathfrak{T}B)^2]X = AC + C\bar{B},$$

d'où finalement

$$X = \frac{AC + C\bar{B}}{A^2 + 2b_0A + (\mathfrak{T}B)^2}.$$

211. III. Si l'on applique ce procédé à l'équation

(1) $$AX = XB,$$

il vient

$$A^2X = AXB, \quad AX\bar{B} = X(\mathfrak{T}B)^2,$$

d'où

$$[A^2 + (\mathfrak{T}B)^2 - 2Ab_0]X = 0,$$

équation qui ne peut admettre pour X une valeur différente de zéro, à moins que l'on n'ait

$$A^2 + (\mathfrak{T}B)^2 - 2Ab_0 = 0,$$

ou

$$(A - b_0)^2 = b_0^2 - (\mathfrak{T}B)^2 = -(\mathfrak{T}b_i)^2.$$

d'où, en désignant par A le vecteur unitaire, axe du quaternion A, ou le verseur de a_i, on a

$$A = b_0 + \text{A}.\mathfrak{T}b_i.$$

On verrait de la même manière que, B étant le verseur de b_i, on doit avoir aussi

$$B = a_0 + \text{B}.\mathfrak{T}a_i.$$

Mais, en vertu de l'équation, il faut que l'on ait

$$\mathfrak{T}A = \mathfrak{T}B, \quad \text{ou} \quad a_0^2 + (\mathfrak{T}a_i)^2 = b_0^2 + (\mathfrak{T}b_i)^2.$$

De plus, des valeurs ci-dessus de A et de B il résulte $a_0 = b_0$, d'où, en vertu de la dernière équation, $\mathfrak{T}a_i = \mathfrak{T}b_i$. Donc

$$\frac{a_0}{\mathfrak{T}a_i} = \frac{b_0}{\mathfrak{T}b_i} = h_0,$$

en appelant h_0 la valeur commune des deux rapports. Par suite,

$$A = (h_0 + \text{A})\mathfrak{T}b_i, \qquad B = (h_0 + \text{B})\mathfrak{T}a_i,$$

d'où

$$\frac{1}{\mathfrak{T}a_i}.AX = (h_0 + \text{A})(x_0 + x_i) = (x_0 + x_i)(h_0 + \text{B}),$$

$$x_0(\text{A} - \text{B}) = x_i\text{B} - \text{A}x_i,$$

ce qui donne

$$\mathfrak{S}(\text{B} - \text{A})x_i = 0;$$

par conséquent, x_i est perpendiculaire à $\text{B} - \text{A}$, et l'on a

$$x_i = \mathfrak{V}.\text{C}(\text{A} - \text{B}),$$

C étant un vecteur indéterminé.

Nous avons maintenant, à cause de $\text{A}^2 = \text{B}^2 = -1$, et en vertu de la formule (10) de l'art. 196,

$$\begin{aligned} x_0(\text{A} - \text{B}) &= x_i\text{B} - \text{A}x_i = [\mathfrak{V}.\text{C}(\text{A} - \text{B})].\text{B} - \text{A}.[\mathfrak{V}.\text{C}(\text{A} - \text{B})] \\ &= \text{C}(\text{A} - \text{B})\text{B} - \text{AC}(\text{A} - \text{B}) + (\text{A} - \text{B})[\mathfrak{S}.\text{C}(\text{A} - \text{B})] \\ &= (\text{CA} + \text{AC})\text{B} - \text{CB}^2 - \text{ACA} + (\text{A} - \text{B})[\mathfrak{S}.\text{C}(\text{A} - \text{B})] \\ &= 2\text{B}.\mathfrak{S}\text{CA} - \text{C} + \text{C} - 2\text{A}.\mathfrak{S}\text{CA} + (\text{A} - \text{B})[\mathfrak{S}.\text{C}(\text{A} - \text{B})] \\ &= -(\text{A} - \text{B})[\mathfrak{S}.\text{C}(\text{A} + \text{B})]. \end{aligned}$$

Donc

$$x_0 = -\mathfrak{S}.\text{c}(\text{A} + \text{B}),$$

et par suite

$$X = -\mathfrak{S}.\text{c}(\text{A} + \text{B}) + \mathfrak{V}.\text{c}(\text{A} - \text{B})$$
$$= -\mathfrak{S}(\text{AC} + \text{CB}) - \mathfrak{V}(\text{AC} + \text{CB}) = -(\text{AC} + \text{CB}).$$

On peut changer le signe de c, et écrire enfin

$$X = \text{AC} + \text{CB},$$

c étant un vecteur de longueur et de direction arbitraires, et A, B étant les verseurs de a_i et de b_i,

$$\text{A} = \mathfrak{U}a_i, \qquad \text{B} = \mathfrak{U}b_i.$$

On peut vérifier cette solution, en remarquant que, A et B ayant même module et même partie réelle, il suffit de faire voir que AX et XB ont même valeur; et, en effet, cette valeur commune est $-\text{C} + \text{ACB}$.

D'ailleurs, on peut très facilement obtenir cette solution, en représentant, comme on l'a fait, par exemple, dans l'art. 156, les verseurs des quaternions par des arcs de grand cercle.

212. IV. Considérons l'équation du second degré

$$X^2 = 2XA + B,$$

ou, ce qui revient au même, comme on le voit en remplaçant les divers termes par leurs conjugués, l'équation

(1) $$X^2 = 2AX + B.$$

Posons

$$X = Y + A,$$

d'où, en substituant,

$$Y^2 + YA + AY + A^2 = 2AY + 2A^2 + B,$$

ou, en remarquant [art. 194, (4)] que

$$Ay_i - y_iA = (a_0 + a_i)y_i - y_i(a_0 + a_i) = 2\mathfrak{V}a_iy_i,$$

et posant, pour plus de simplicité,

$$A^2 + B = 2C,$$
$$(y_0 + y_i)^2 - 2\mathfrak{V} a_i y_i = 2c_0 + 2c_i,$$

équation qui se partage dans les deux suivantes,

(2) $$y_0^2 + y_i^2 = 2c_0,$$
(3) $$\mathfrak{V}.(y_0 - a_i) y_i = c_i.$$

En opérant sur l'équation (3) par $\mathfrak{S}.a_i \times$, il vient

$$\mathfrak{S}(a_i y_0 y_i) - \mathfrak{S}(a_i.\mathfrak{V} a_i y_i) = \mathfrak{S} a_i c_i,$$

ou, à cause de $\mathfrak{S}(a_i.\mathfrak{V} a_i y_i) = \mathfrak{S} a_i a_i y_i = 0$, et de $\mathfrak{S} a_i y_i = - \mathfrak{S}(y_0 - a_i) y_i$,

$$\mathfrak{S}.(y_0 - a_i) y_i = -\frac{1}{y_0} \mathfrak{S} a_i c_i.$$

Par conséquent,

(4) $$(y_0 - a_i) y_i = -\frac{1}{y_0} \mathfrak{S} a_i c_i + c_i.$$

Si l'on fait maintenant, pour abréger,

$$y_0 - a_i = Q, \quad \text{d'où} \quad y_0 = q_0, \quad -a_i = q_i,$$

l'équation (4) pourra s'écrire

$$q_0 Q y_i = \mathfrak{S} q_i c_i + q_0 c_i = Q c_i - (q_i c_i - \mathfrak{S} q_i c_i) = Q c_i - \mathfrak{V} q_i c_i,$$

En multipliant par $\overline{Q}$, conjugué de Q, et posant $\mathfrak{T} Q = \mathbf{q}$, il vient

$$q_0 \mathbf{q}^2 y_i = \mathbf{q}^2 c_i - \overline{Q}.\mathfrak{V} q_i c_i,$$

d'où, en élevant les deux membres au carré,

$$q_0^2 \mathbf{q}^4 y_i^2 = \mathbf{q}^4 c_i^2 - \mathbf{q}^2 (c_i \overline{Q}.\mathfrak{V} q_i c_i + \overline{Q}.\mathfrak{V} q_i c_i.c_i) + (\overline{Q}.\mathfrak{V} q_i c_i)^2.$$

Or on a [art. 194, (3)]

$$c_i \overline{Q}.\mathfrak{V} q_i c_i + \overline{Q}.\mathfrak{V} q_i c_i.c_i$$
$$= 2q_0.\mathfrak{S}(c_i.\mathfrak{V} q_i c_i) - c_i q_i.\mathfrak{V} q_i c_i - q_i.\mathfrak{V} q_i c_i.c_i.$$

D'ailleurs [art. 196, (5) et (7)],

$$\mathfrak{S}(c_i.\mathfrak{V}q_ic_i)=\mathfrak{S}(c_i.q_ic_i)=\mathfrak{S}c_i^2q_i=0,$$

$$\mathfrak{S}(c_iq_i.\mathfrak{V}q_ic_i)=\mathfrak{S}(q_i.\mathfrak{V}q_ic_i.c_i)=\mathfrak{S}[(\mathfrak{S}c_iq_i+\mathfrak{V}c_iq_i)\mathfrak{V}q_ic_i]$$
$$=-(\mathfrak{V}q_ic_i)^2.$$

On a ensuite [art. 196, (11)],

$$\mathfrak{V}(c_iq_i.\mathfrak{V}q_ic_i)+\mathfrak{V}(q_i.\mathfrak{V}q_ic_i.c_i)=2c_i.\mathfrak{S}(q_i.\mathfrak{V}q_ic_i)=0.$$

Donc

$$c_i\bar{Q}.\mathfrak{V}q_ic_i+\bar{Q}.\mathfrak{V}q_ic_i.c_i=-2(\mathfrak{V}q_ic_i)^2.$$

Enfin, le dernier terme $(\bar{Q}.\mathfrak{V}q_ic_i)^2$, que nous représenterons, pour abréger, par $(\bar{Q}\mathrm{R})^2$, est égal à

$$(q_0-q_i)\mathrm{R}(q_0-q_i)\mathrm{R}=q_0^2\mathrm{R}^2-q_0(\mathrm{R}q_i+q_i\mathrm{R})\mathrm{R}+q_i\mathrm{R}q_i\mathrm{R}.$$

On a d'abord

$$\mathrm{R}q_i+q_i\mathrm{R}=2\mathfrak{S}q_i\mathrm{R}=2\mathfrak{S}(q_i\mathfrak{V}q_ic_i)=0.$$

Puis,

$$q_i\mathrm{R}q_i\mathrm{R}=(\mathfrak{S}q_i\mathrm{R}q_i+\mathfrak{V}q_i\mathrm{R}q_i)\mathrm{R}=\mathfrak{V}q_i\mathrm{R}q_i.\mathrm{R},$$

et [art. 196, (10)], à cause de $\mathfrak{S}\mathrm{R}q_i=0$,

$$\mathfrak{V}q_i\mathrm{R}q_i=q_i.\mathfrak{S}\mathrm{R}q_i-\mathrm{R}.\mathfrak{S}q_iq_i+q_i.\mathfrak{S}q_i\mathrm{R}=-q_i^2\mathrm{R}.$$

Donc

$$q_i\mathrm{R}q_i\mathrm{R}=-q_i^2\mathrm{R}^2=-q_i^2(\mathfrak{V}q_ic_i)^2,$$

et par suite

$$(\bar{Q}\mathrm{R})^2=(q_0^2-q_i^2)\mathrm{R}^2=\mathrm{q}^2(\mathfrak{V}q_ic_i)^2.$$

D'après toutes ces réductions, on a

$$q_0^2\mathrm{q}^4y_i^2=\mathrm{q}^4c_i^2-2\mathrm{q}^2(\mathfrak{V}q_ic_i)^2+\mathrm{q}^2(\mathfrak{V}q_ic_i)^2.$$

ou

$$q_0^2y_i^2=c_i^2-\frac{1}{\mathrm{q}^2}(\mathfrak{V}q_ic_i)^2.$$

Mettant cette valeur de y_i^2 dans l'équation (2), et remplaçant q_0, q_i, q^2 par leurs valeurs, il vient

(5) $$[y_0^2(y_0^2-2c_0)+c_i^2](y_0^2-a_i^2)-(\mathfrak{V}a_ic_i)^2=0,$$

ou encore, en remarquant que $a_i^2 c_i^2 = a_i c_i \,.\, c_i a_i = a_i c_i \,.\, \overline{a_i c_i} = (\mathfrak{T} a_i c_i)^2 = (\mathfrak{S} a_i c_i)^2 - (\mathfrak{V} a_i c_i)^2$,

$$(6)\qquad y_0^2 [y_0^4 - (a_i^2 + 2c_0) y_0^2 + 2a_i^2 c_0 + c_i^2] - (\mathfrak{S} a_i c_i)^2 = 0.$$

Cette équation est du troisième degré par rapport à y_0^2; elle donnera donc pour y_0 six valeurs, dont deux au moins seront réelles, et d'où l'on déduira ensuite, au moyen de (4), les valeurs correspondantes de y_i, de sorte que l'équation (1) admettra en général six racines. Nous avons déjà rencontré cette circonstance dans l'exemple particulier traité dans l'article 204. Hamilton a fait voir qu'une équation du second degré en quaternions admet généralement seize racines. Dans le cas actuel, dix de ces racines sont infinies.

213. Si l'on applique les calculs que nous venons de faire à l'exemple de l'art. 204, on aura

$$A = 5\iota_1, \qquad 2C = -25 + 40\iota_2,$$

d'où $\mathfrak{S} a_i c_i = \mathfrak{S}(-100\iota_3) = 0$. L'équation en y_0 devient alors

$$y_0^2 [(y_0^2 + 25)^2 - 400] = 0,$$

d'où les solutions

$$y_0 = 0, \quad y_0 = \pm i\sqrt{5}, \quad y_0 = \pm 3i\sqrt{5}.$$

La première solution $y_0 = 0$ rend illusoire l'équation (4). Mais l'équation (3) devient

$$\mathfrak{V} \iota_1 y_i = -4\iota_2, \quad \text{d'où} \quad \iota_1 y_i = -k_0 - 4\iota_2,$$

k_0 étant une quantité réelle, et par suite

$$y_i = k_0 \iota_1 - 4\iota_3.$$

Portant cette valeur dans l'équation (2), on en tire $k_0 = \pm 3$, d'où

$$y_i = \pm 3\iota_1 - 4\iota_3, \quad X = 5\iota_1 \pm 3\iota_1 - 4\iota_3,$$

ce qui donne les deux racines en quaternions à coefficients réels ou quaternions proprement dits.

Les autres racines s'obtiendront au moyen des équations

$$y_0 y_i = \frac{y_0 c_i + \mathfrak{S} a_i c_i}{y_0 + a_i} = \frac{(y_0 + a_i) c_i - \mathfrak{V} a_i c_i}{y_0 + a_i} = c_i - \frac{y_0 - a_i}{y_0^2 - a_i^2} \mathfrak{V} a_i c_i .$$

$$X = y_0 + y_i + A .$$

214. V. L'équation

$$X^2 = AX + XB$$

se ramène à une équation du premier degré, en opérant consécutivement par $X^{-1}\times$ et par $\times X^{-1}$, ce qui donne

$$1 = X^{-1}A + BX^{-1},$$

équation de même forme que celle de l'exemple III, lorsqu'on prend X^{-1} pour inconnue.

§ II.

Méthode générale d'Hamilton pour la résolution des équations du premier degré en quaternions.

215. La forme la plus générale d'une équation du premier degré par rapport au quaternion X est

$$\sum AXB + \sum C.\mathfrak{S} A'XB' + \sum D.\mathfrak{V} A'XB'.E = F.$$

Si l'on remplace $\mathfrak{V} A'XB'$ par $A'XB' - \mathfrak{S} A'XB'$, le troisième terme du premier membre rentrera dans les deux premiers. Donc l'équation peut se réduire à la forme

$$(1) \qquad \sum AXB + \sum C.\mathfrak{S} A'XB' = F,$$

A, B, C, A', B', F étant des quaternions qnelconques.

On a maintenant [art. 195, (7)]

$$\mathfrak{S} AXB = \mathfrak{S} XBA = x_0 . \mathfrak{S} BA + \mathfrak{S}(x_i . \mathfrak{V} BA),$$

ce qui fait connaître la forme de la partie réelle du premier membre.

Pour avoir la partie imaginaire, développons le produit

$$(a_0+a_i)(x_0+x_i)(b_0+b_i)$$
$$= x_0 A B + a_0 b_0 x_i + a_0 x_i b_i + b_0 a_i x_i + a_i x_i b_i,$$

et nous trouverons [art. 196, (10)]

$$\mathfrak{V} AXB$$
$$= x_0 . \mathfrak{V} AB + \mathfrak{V} . (a_0 b_0 - a_0 b_i + a_i b_0 - a_i b_i) x_i + \mathfrak{V} . a_i (b_i x_i + x_i b_i)$$
$$= x_0 . \mathfrak{V} AB + \mathfrak{V} A \bar{B} x_i + 2 a_i . \mathfrak{S} b_i x_i .$$

D'après cela, l'équation (1) se partage dans les deux suivantes

$$x_0\left(\sum \mathfrak{S} AB + \sum c_0 . \mathfrak{S} A'B'\right) + \sum \mathfrak{S}(\mathfrak{V} BA . x_i)$$
$$+ \sum c_0 . \mathfrak{S}(\mathfrak{V} B'A' . x_i) = f_0,$$
$$x_0 \sum \mathfrak{V} AB + \sum \mathfrak{V} A \bar{B} x_i + 2 \sum a_i . \mathfrak{S} b_i x_i$$
$$+ \sum c_i [x_0 . \mathfrak{S} A'B' + \mathfrak{S}(\mathfrak{V} B'A' . x_i)] = f_i,$$

ou, en posant, pour abréger,

$$g_0 = \sum \mathfrak{S} AB + \sum c_0 . \mathfrak{S} A'B',$$
$$g_i = \sum \mathfrak{V} AB + \sum c_i . \mathfrak{S} A'B',$$
$$h_i = \sum \mathfrak{V} BA + \sum c_0 . \mathfrak{V} B'A',$$

les deux équations

(2) $f_0 = g_0 x_0 + \mathfrak{S} h_i x_i,$

(3) $f_i = g_i x_0 + \sum \mathfrak{V} A \bar{B} x_i + 2 \sum a_i . \mathfrak{S} b_i x_i + \sum c_i . \mathfrak{S}(\mathfrak{V} B'A' . x_i).$

Si l'on élimine x_0 entre ces deux équations, on obtiendra l'équation

$$g_0 f_i - g_i f_0 = g_0 \sum \mathfrak{V} A \bar{B} x_i - g_i . \mathfrak{S} h_i x_i$$
$$+ g_0 \left[2 \sum a_i . \mathfrak{S} b_i x_i + \sum c_i . \mathfrak{S}(\mathfrak{V} B'A' . x_i)\right],$$

laquelle, à cause de $\sum \mathfrak{V} A \bar{B} x_i = \mathfrak{V} \sum A \bar{B} x_i$, rentre dans la forme générale

$$(4) \qquad \sum \mathrm{B} . \mathfrak{S} \mathrm{A} \mathrm{X} + \mathfrak{V} Q \mathrm{X} = \mathrm{C},$$

A, B, C, X étant des vecteurs, et Q un quaternion quelconque.

La résolution de cette équation fera connaître la partie

imaginaire x ou x_i de l'inconnue X; en substituant cette valeur dans l'équation (2), on en tirera la partie réelle x_0.

216. Le premier membre de l'équation (4) est une fonction linéaire du vecteur x, que nous représenterons par le symbole $\square$x, de sorte que l'équation (4) pourra s'écrire sous la forme

$$(5) \qquad \square \mathrm{x} = \mathrm{c}.$$

On voit facilement que cette fonction $\square$ jouit des propriétés suivantes :

1° Elle est distributive relativement à l'addition, c'est-à-dire que l'on a, x, y, ... étant des vecteurs quelconques,

$$\square(\mathrm{x}+\mathrm{y}\ldots) = \square\mathrm{x} + \square\mathrm{y} + \ldots.$$

2° On tire de là, par le procédé connu, a étant un nombre réel quelconque,

$$\square a\mathrm{x} = a\square\mathrm{x}.$$

3° Il résulte encore, de la première propriété, que l'on a, en prenant la différentielle,

$$d\square\mathrm{x} = \square d\mathrm{x}.$$

Si l'on désigne par $\square^{-1}$ la fonction inverse de $\square$, définie par l'égalité

$$\square^{-1}(\square\mathrm{u}) = \mathrm{u},$$

la valeur de x sera donnée par l'équation

$$(6) \qquad \mathrm{x} = \square^{-1}\mathrm{c}.$$

Le problème est donc ramené à la détermination de cette fonction inverse $\square^{-1}$.

217. Il est clair que tout vecteur peut être exprimé au moyen de la somme de trois vecteurs non coplanaires quelconques, multipliés par des coefficients réels. Si donc on pose

$$\square(\square\mathrm{x}) = \square^2\mathrm{x}, \qquad \square(\square^2\mathrm{x}) = \square^3\mathrm{x},$$

les vecteurs $\square$x, $\square^2$x ne seront pas, en général, coplanaires avec x. On pourra donc exprimer $\square^3$x par une fonction linéaire à coefficients réels de x, $\square$x, $\square^2$x.

La même chose aurait encore lieu dans le cas où $\square^2 x$ serait coplanaire avec x et $\square x$. D'abord, si l'on avait $\square x = \lambda x$, on en conclurait $\square^2 x = \lambda^2 x$, ce qui est un cas particulier d'un trinôme linéaire en x, $\square x$, $\square^2 x$. Si $\square^2 x$ est coplanaire avec x et $\square x$, on pourra poser

$$\square^2 x = \lambda x + \mu \square x,$$

d'où

$$\square^3 x = \lambda \square x + \mu \square^2 x = \lambda x + (\lambda + \mu^2) \square x,$$

ce qui rentre encore dans le cas général.

Si donc on pose généralement

$$(7) \qquad - \square^3 x = \lambda x + \mu \square x + \nu \square^2 x,$$

λ, μ, ν seront des quantités réelles, indépendantes de x, et on pourra les déterminer par des procédés analogues à ceux des art. 198 et 199, en remplaçant successivement x par trois vecteurs connus quelconques, x', x'', x''', et résolvant les trois équations résultantes.

Si maintenant on remplace x par $\square^{-1} x$, l'équation (2) devient alors, en transposant,

$$(8) \qquad - \lambda \square^{-1} x = \mu x + \nu \square x + \square^2 x,$$

et la fonction inconnue $\square^{-1}$ se trouve exprimée au moyen d'opérations directes.

Dans le cas où l'on aurait $\lambda = 0$, μ restant fini, on remplacerait x par $\square^{-2} x$, ce qui donnerait

$$- \mu \square^{-1} x = \nu x + \square x.$$

Enfin, dans le cas de $\lambda = \mu = 0$, on remplacerait x par $\square^{-3} x$, d'où

$$- \nu \square^{-1} x = x.$$

218. Pour donner un exemple de la détermination des coefficients λ, μ, ν, prenons la fonction

$$\square x = - a_1^2 \mathrm{i}_1 . \mathfrak{S}\, \mathrm{i}_1 x - a_2^2 \mathrm{i}_2 . \mathfrak{S}\, \mathrm{i}_2 x - a_3^2 \mathrm{i}_3 . \mathfrak{S}\, \mathrm{i}_3 x,$$

que l'on rencontre dans la théorie des surfaces du second ordre à centre. On peut écrire cette expression sous la forme

$$\square\mathrm{x} = -\sum\nolimits_r a_r^2 \mathrm{I}_r . \mathfrak{S}\,\mathrm{I}_r \mathrm{x}, \quad (r = 1, 2, 3).$$

Remplaçons successivement x par $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$. On aura

$$\square\mathrm{I}_s = -\sum\nolimits_r a_r^2 \mathrm{I}_r . \mathfrak{S}\,\mathrm{I}_r \mathrm{I}_s = a_s^2 \mathrm{I}_s,$$

d'où

$$\square^2\mathrm{I}_s = \left[-\sum\nolimits_r a_r^2 \mathrm{I}_r . \mathfrak{S}\,\mathrm{I}_r \square\mathrm{x}\right]_{\mathrm{x}=\mathrm{I}_s} = -\sum\nolimits_r a_r^2 \mathrm{I}_r . \mathfrak{S}\,\mathrm{I}_r a^2 \mathrm{I}_s = a_s^4 \mathrm{I}_s.$$

et de même

$$\square^3\mathrm{I}_s = a_s^6 \mathrm{I}_s.$$

En faisant, dans l'équation (2), $\mathrm{x} = \mathrm{I}_s$, il vient

$$-a_s^6 = \lambda + \mu a_s^2 + \nu a_s^4.$$

Donc a_1^2, a_2^2, a_3^2 sont les racines de l'équation cubique

$$z^3 + \nu z^2 + \mu z + \lambda = 0,$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$\lambda = -a_1^2 a_2^2 a_3^2, \qquad \mu = \Sigma a_r^2 a_s^2, \qquad \nu = -\Sigma a_r^2.$$

Donc

$$\square^3\mathrm{x} = a_1^2 a_2^2 a_3^2 \mathrm{x} - (\Sigma a_r^2 a_s^2) . \square\mathrm{x} + (\Sigma a_r^2) . \square^2\mathrm{x} \text{ (1)},$$

et partant la fonction inverse $\square^{-1}$ sera donnée par la formule

$$a_1^2 a_2^2 a_3^2 . \square^{-1}\mathrm{x} = (\Sigma a_r^2 a_s^2) . \mathrm{x} - (\Sigma a_r^2) . \square\mathrm{x} + \square^2\mathrm{x}.$$

219. Cela posé, considérons une fonction linéaire d'un vecteur x, de la forme

$$(9) \qquad \square\mathrm{x} = \sum \mathrm{B} . \mathfrak{S}\,\mathrm{A}\mathrm{x} + \mathfrak{V} Q \mathrm{x}.$$

Opérons par $\mathfrak{S}\,\mathrm{Y} \times$, Y étant un autre vecteur quelconque. Il viendra

$$\mathfrak{S}(\mathrm{Y} . \square\mathrm{x}) = \sum \mathfrak{S}(\mathrm{Y}\mathrm{B} . \mathfrak{S}\,\mathrm{A}\mathrm{x}) + \mathfrak{S}(\mathrm{Y} . \mathfrak{V} Q \mathrm{x}).$$

---

(1) Si l'on remarque que l'opération $\square$ est commutative avec la multiplication par un facteur réel α, puisque $\square(\alpha\mathrm{x}) = \alpha . \square\mathrm{x}$, on voit que cette équation peut s'écrire sous la forme

$$(\square - a_1^2)(\square - a_2^2)(\square - a_3^2)\mathrm{x} = 0.$$

Or

$$\mathfrak{S}(\text{YB}.\mathfrak{S}\text{AX}) = \mathfrak{S}\text{YB}.\mathfrak{S}\text{AX} = \mathfrak{S}\text{XA}.\mathfrak{S}\text{BY} = \mathfrak{S}(\text{XA}.\mathfrak{S}\text{BY}),$$
$$\mathfrak{S}(\text{Y}.\mathfrak{V}Q\text{X}) = \mathfrak{S}[\text{Y}.\mathfrak{V}(q_0+q_i)\text{X}] = q_0\mathfrak{S}\text{YX} + \mathfrak{S}\text{Y}q_i\text{X}$$
$$= q_0\mathfrak{S}\text{XY} - \mathfrak{S}\text{X}q_i\text{Y} = \mathfrak{S}(\text{X}.\mathfrak{V}\bar{Q}\text{Y}).$$

Si donc on désigne par

(10) $$\square'\text{Y} = \sum \text{A}.\mathfrak{S}\text{BY} + \mathfrak{V}\bar{Q}\text{Y}$$

une nouvelle fonction linéaire, différant de la fonction $\square$ par l'échange mutuel des lettres A et B et par le changement de Q dans son conjugué $\bar{Q}$, on aura, quels que soient les vecteurs X, Y,

(11) $$\mathfrak{S}(\text{Y}.\square\text{X}) = \mathfrak{S}(\text{X}.\square'\text{Y}).$$

Les fonctions $\square$ et $\square'$, qui jouissent de la propriété exprimée par cette équation, sont dites *conjuguées* entre elles. C'est sur cette propriété qu'est fondée la méthode que nous exposons.

220. Soient L, M deux vecteurs tels que l'on ait

(12) $$\square\text{X} = \mathfrak{V}\text{LM}.$$

En opérant par $\mathfrak{S}.\text{L}\times$ et par $\mathfrak{S}.\text{M}\times$, on aura

$$\mathfrak{S}(\text{L}.\square\text{X}) = 0, \quad \mathfrak{S}(\text{M}.\square\text{X}) = 0.$$

Mais, si l'on introduit la fonction conjuguée $\square'$, ces équations deviendront

$$\mathfrak{S}(\text{X}.\square'\text{L}) = 0, \quad \mathfrak{S}(\text{X}.\square'\text{M}) = 0,$$

ce qui fait voir que le vecteur X est perpendiculaire à chacun des vecteurs $\square'\text{L}$, $\square'\text{M}$. Donc X est parallèle à l'axe du quaternion $\square'\text{L}.\square'\text{M}$, d'où l'on tire, m étant une quantité réelle, encore indéterminée, mais indépendante, comme nous le verrons, des vecteurs L, M, X,

(13) $$m\text{X} = \mathfrak{V}(\square'\text{L}.\square'\text{M}).$$

Or, d'après l'égalité (12), on a

$$\mathrm{x} = \square^{-1}\mathfrak{V}\mathrm{LM},$$

d'où nous tirons

(14) $$m.\square^{-1}\mathfrak{V}\mathrm{LM} = \mathfrak{V}(\square'\mathrm{L}.\square'\mathrm{M}),$$

et le problème de l'inversion de la fonction $\square$ est ainsi résolu.

221. Il reste à déterminer la constante m et à exprimer le vecteur $\mathfrak{V}\,(\square'\mathrm{L}.\square'\mathrm{M})$ en fonction de $\mathfrak{V}\mathrm{LM}$.

Opérons sur l'équation (13) par $\mathfrak{S}\,\square'\mathrm{N}\times$, N étant un vecteur quelconque, non coplanaire avec L et M. Il viendra, en vertu de (11),

$$\begin{aligned} m\mathfrak{S}(\square'\mathrm{N}.\square^{-1}\mathfrak{V}\mathrm{LM}) &= m.\mathfrak{S}(\mathrm{N}.\square\,\square^{-1}\mathfrak{V}\mathrm{LM}) \\ &= m.\mathfrak{S}(\mathrm{N}.\mathfrak{V}\mathrm{LM}) = m.\mathfrak{S}\mathrm{LMN} = \mathfrak{S}(m.\mathfrak{V}\mathrm{LM}.\mathrm{N}) \\ &= \mathfrak{S}[\square\,\mathfrak{V}(\square'\mathrm{L}.\square'\mathrm{M}).\mathrm{N}] = \mathfrak{S}[\mathfrak{V}(\square'\mathrm{L}.\square'\mathrm{M}).\square'\mathrm{N}] \\ &= \mathfrak{S}(\square'\mathrm{L}.\square'\mathrm{M}.\square'\mathrm{N}), \end{aligned}$$

d'où l'on tire

(15) $$m = \frac{\mathfrak{S}\,(\square'\mathrm{L}.\square'\mathrm{M}.\square'\mathrm{N})}{\mathfrak{S}.\mathrm{LMN}}.$$

Cette quantité est indépendante des valeurs particulières des vecteurs L, M, N. En effet, soient

$$\mathrm{L}' = \alpha\mathrm{L} + \beta\mathrm{M} + \gamma\mathrm{N}, \quad \mathrm{M}' = \alpha'\mathrm{L} + \beta'\mathrm{M} + \gamma'\mathrm{N}, \quad \mathrm{N}' = \alpha''\mathrm{L} + \beta''\mathrm{M} + \gamma''\mathrm{N}$$

trois vecteurs, qui peuvent être quelconques, L, M, N n'étant pas coplanaires. On aura

$$\square'\mathrm{L}' = \alpha\square'\mathrm{L} + \beta\square'\mathrm{M} + \gamma\square'\mathrm{L}, \text{ etc....},$$

d'où, en remarquant que [art. 195, (7)] la quantité de $\mathfrak{S}\mathrm{U}_1\mathrm{U}_2\mathrm{U}_3$ change de signe par la permutation des indices, en suivant la même règle que les termes d'un déterminant,

$$\mathfrak{S}(\square'\mathrm{L}'.\square'\mathrm{M}'.\square'\mathrm{N}') = |\alpha\beta'\gamma''|.\mathfrak{S}(\square'\mathrm{L}.\square'\mathrm{M}.\square'\mathrm{N}),$$
$$\mathfrak{S}\mathrm{L}'\mathrm{M}'\mathrm{N}' = |\alpha\beta'\gamma''|.\mathfrak{S}\mathrm{LMN},$$

quantités dont le rapport ne dépend pas de $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots,$

ni, par suite, du choix des vecteurs L', M', N'. Chacune de ces quantités est, en effet, un invariant, et le multiplicateur numérique est le même pour les deux, quand on passe d'un système de trois vecteurs à un autre.

222. Changeons maintenant $\square$ en $\square + g$, g étant un nombre réel quelconque, ce qui revient à augmenter de g la partie réelle q_0 du quaternion Q. Il est clair que $\square'$ deviendra $\square' + g$, et l'on aura, au lieu de l'équation (14),

$$\begin{aligned} m_g.(\square + g)^{-1}\mathfrak{V}\text{LM} &= \mathfrak{V}[(\square' + g)\text{L}.(\square' + g)\text{M}] \\ &= \mathfrak{V}(\square'\text{L}.\square'\text{M}) + g\mathfrak{V}(\text{L}.\square'\text{M} + \square'\text{L}.\text{M}) + g^2.\mathfrak{V}\text{LM} \\ &= (m\square^{-1} + g\nabla + g^2)\mathfrak{V}\text{LM}, \end{aligned}$$

en posant

$$\nabla\text{LM} = \text{L}.\square'\text{M} + \square'\text{L}.\text{M}.$$

Dans l'équation précédente,

$$m_g = \frac{\mathfrak{S}[(\square' + g)\text{L}.(\square' + g)\text{M}.(\square' + g)\text{N}]}{\mathfrak{S}\text{LMN}} = m + m_1 g + m_2 g^2 + g^3$$

est ce que devient m quand $\square$ est changé en $\square + g$, m_1 et m_2 étant deux nouveaux coefficients réels, indépendants, comme m, de L, M, N, et donnés par les formules

$$(16)\quad \begin{cases} m_1 = \dfrac{\mathfrak{S}(\text{L}.\square'\text{M}.\square'\text{N} + \text{M}.\square'\text{N}.\square'\text{L} + \text{N}.\square'\text{L}.\square'\text{M})}{\mathfrak{S}\text{LMN}}, \\ m_2 = \dfrac{\mathfrak{S}(\text{MN}.\square'\text{L} + \text{NL}.\square'\text{M} + \text{LM}.\square'\text{N})}{\mathfrak{S}\text{LMN}}. \end{cases}$$

En substituant pour m_g sa valeur dans l'équation

$$m_g(\square + g)^{-1}.\mathfrak{V}\text{LM} = (m\square^{-1} + g\nabla + g^2).\mathfrak{V}\text{LM},$$

opérant sur les deux membres par $\square + g$, et égalant de part et d'autre les coefficients des mêmes puissances de g, on a deux identités, plus les deux équations suivantes

$$(17)\qquad m_1 = \square\nabla + m\square^{-1}, \quad m_2 = \square + \nabla,$$

dont la seconde détermine ∇, et montre que nous avions bien

le droit de traiter $\mathfrak{V}(\mathrm{L}.\square'\mathrm{M} + \square'\mathrm{L}.\mathrm{M})$ comme une fonction vectorielle et linéaire de $\mathfrak{V}\mathrm{LM}$.

On aurait pu arriver au même résultat comme il suit :

$$\mathfrak{S}(\mathrm{L}.\nabla\mathfrak{V}\mathrm{LM}) = \mathfrak{S}(\mathrm{L}.\square'\mathrm{L}.\mathrm{M}) = -\mathfrak{S}(\mathrm{LM}.\square'\mathrm{L})$$
$$= -\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{LM}.\square'\mathrm{L}) = -\mathfrak{S}(\mathrm{L}.\square\mathfrak{V}\mathrm{LM}) \text{ [éq. (11)]},$$
$$\mathfrak{S}(\mathrm{M}.\nabla\mathfrak{V}\mathrm{LM}) = \mathfrak{S}(\mathrm{ML}.\square'\mathrm{M}) = -\mathfrak{S}(\mathrm{M}.\square\mathfrak{V}\mathrm{LM}),$$
$$\mathfrak{S}(\mathrm{N}.\nabla\mathfrak{V}\mathrm{LM}) = \mathfrak{S}(\mathrm{NL}.\square'\mathrm{M} + \mathrm{N}.\square'\mathrm{L}.\mathrm{M}) = m_2.\mathfrak{S}\mathrm{LMN} - \mathfrak{S}(\mathrm{LM}.\square'\mathrm{N})$$
$$= \mathfrak{S}[\mathrm{N}(m_2\mathfrak{V}\mathrm{LM} - \square\mathfrak{V}\mathrm{LM})],$$

et, de plus, ces trois équations sont satisfaites par $\nabla = m_2 - \square$.

223. En éliminant ∇ entre les équations (17), il vient

$$m_1 = \square(m_2 - \square) + m\square^{-1},$$

c'est-à-dire

$$(18) \qquad m\square^{-1} = m_1 - m_2\square + \square^2,$$

ce qui donne la solution complète des équations vectorielles et linéaires.

Nous allons éclaircir la méthode précédente, en développant le calcul de quelques exemples.

224. I. Soit proposée l'équation

$$\square\mathrm{X} = \mathfrak{V}\mathrm{AXB} = \mathrm{C}.$$

Nous aurons alors [art. 196, (12)]

$$\square'\mathrm{X} = \mathfrak{V}\mathrm{BXA} = \square\mathrm{X}.$$

Donc

$$m = \frac{\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{ALB}.\mathfrak{V}\mathrm{AMB}.\mathfrak{V}\mathrm{ANB})}{\mathfrak{S}\mathrm{LMN}},$$

Or, L, M, N sont trois vecteurs non coplanaires quelconques. On peut les supposer égaux à A, B, C, si ceux-ci ne sont pas coplanaires. On a alors

$$m = \frac{\mathfrak{S}(\mathrm{A}^2\mathrm{B}.\mathrm{AB}^2.\mathfrak{V}\mathrm{ACB})}{\mathfrak{S}\mathrm{ABC}} = \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}(\mathrm{BA}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB})}{\mathfrak{S}\mathrm{ABC}}.$$

Mais on a [art. 196, (10)]

$$\mathrm{BA}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB} = \mathrm{BA}(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} - \mathrm{C}.\mathfrak{S}\mathrm{AB})$$
$$= \mathrm{A}^2.\mathfrak{S}\mathrm{BC}.\mathrm{B} + \mathrm{BAB}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} - \mathrm{BAC}.\mathfrak{S}\mathrm{AB}.$$

Or $\mathfrak{S}\mathrm{BAB} = \mathfrak{S}\mathrm{ABB} = 0$. Donc la partie réelle de $\mathfrak{S}(\mathrm{BA}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB})$ se réduit à $-\mathfrak{S}\mathrm{BAC}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} = \mathfrak{S}\mathrm{ABC}.\mathfrak{S}\mathrm{AB}$. Par conséquent,

$$m = \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AB}.$$

On a ensuite

$$m_1.\mathfrak{S}\mathrm{ABC} = \mathfrak{S}(\mathrm{A}.\mathrm{AB}^2.\mathfrak{V}\mathrm{ACB} + \mathrm{A}^2\mathrm{B}.\mathrm{B}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB} + \mathrm{A}^2\mathrm{B}.\mathrm{AB}^2.\mathrm{C})$$
$$= \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{BAC} = -\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{ABC},$$

d'où

$$m_1 = -\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.$$

Enfin,

$$m_2.\mathfrak{S}\mathrm{ABC} = \mathfrak{S}(\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB} + \mathrm{A}.\mathrm{AB}^2.\mathrm{C} + \mathrm{A}^2\mathrm{B}.\mathrm{BC})$$
$$= -\mathfrak{S}\mathrm{ABC}.\mathfrak{S}\mathrm{AB},$$

d'où

$$m_2 = -\mathfrak{S}\mathrm{AB}.$$

On a donc

$$\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\Box^{-1}\mathrm{C} = \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathrm{X}$$
$$= -\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\mathrm{C} + \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB} + \mathfrak{V}(\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB}.\mathrm{B}).$$

En développant, on trouve [art. 196, (10)]

$$\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB}.\mathrm{B} = \mathfrak{S}\mathrm{BC}.\mathrm{A}^2\mathrm{B} + \mathfrak{S}\mathrm{AC}.\mathrm{AB}^2 - \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathrm{ACB},$$

d'où

$$\mathfrak{V}(\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB}.\mathrm{B}) + \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{ACB} = \mathrm{A}^2\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \mathrm{AB}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AC},$$

ce qui donne

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{A}^2\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \mathrm{AB}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AC} - \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\mathrm{C}}{\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{B}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} - \mathrm{C}}{\mathfrak{S}\mathrm{AB}}.$$

Il est facile de vérifier que cette valeur satisfait à l'équation proposée. On a, en effet [art. 196, (10)],

$$\mathfrak{V}\mathrm{AXB} = \mathfrak{V}\,\frac{\mathrm{A}.\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{BC}.\mathrm{B} + \mathrm{A}.\mathrm{B}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{BC}.\mathrm{B}. - \mathrm{ACB}}{\mathfrak{S}\mathrm{AB}}$$
$$= \frac{\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} - \mathfrak{V}\mathrm{ACB}}{\mathfrak{S}\mathrm{AB}} = \mathrm{C}.$$

225. On aurait pu obtenir plus simplement la solution par une méthode directe. On trouve, en opérant sur l'équation

$$\mathfrak{V}\mathrm{A X B} = \mathrm{C}$$

par $\mathfrak{S}\,.\,\mathrm{A}\times$, puis par $\mathfrak{S}\,.\,\mathrm{B}\times$,

$$\mathfrak{S}(\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{AXB}) = \mathfrak{S}(\mathrm{A}.\mathrm{AXB}) = \mathrm{A}^2.\mathfrak{S}\mathrm{XB} = \mathfrak{S}\mathrm{AC},$$

et de même,

$$\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AX} = \mathfrak{S}\mathrm{BC}.$$

Par suite,

$$\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{XB} = \mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{AC}, \qquad \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AX} = \mathrm{B}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{BC},$$

d'où, en ajoutant, et ayant égard à l'équation (10) de l'art. 196, qui donne $\mathfrak{V}\mathrm{AXB} = \mathrm{A}\,.\,\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \mathrm{B}\,.\,\mathfrak{S}\mathrm{AX} - \mathrm{X}\,.\,\mathfrak{S}\mathrm{AB} = \mathrm{C}$,

$$\mathrm{X}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} = \mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{B}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} - \mathrm{C},$$

ce qui s'accorde avec le résultat précédent.

226. Si $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont coplanaires, la méthode ne cesse pas d'être applicable; mais le résultat peut être obtenu beaucoup plus simplement.

On a, en effet, dans le cas de vecteurs coplanaires [art. 200, (18)],

$$0 = \mathfrak{S}\mathrm{ABC} = \mathfrak{S}(\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{AXB}) = \mathfrak{S}[\mathrm{AB}(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{XB} + \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AX} - \mathrm{X}.\mathfrak{S}\mathrm{AB})]$$
$$= \mathfrak{S}\mathrm{ABA}.\mathfrak{S}\mathrm{XB} + \mathfrak{S}\mathrm{AB}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AX} - \mathfrak{S}\mathrm{ABX}.\mathfrak{S}\mathrm{AB},$$

d'où résulte $\mathfrak{S}\mathrm{ABX} = 0$; X est donc caplanaire avec $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$. Dès lors, l'équation proposée peut s'écrire

$$\mathrm{AXB} = \mathrm{C},$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{C}\mathrm{B}^{-1}.$$

ou, en vertu de la formule (10), art. 196,

$$\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{C}\mathrm{B}^{-1} + \mathrm{B}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{C} - \mathrm{C}.\mathfrak{S}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^{-1}.$$

On peut vérifier que cette formule équivaut à ce que devient

la valeur générale trouvée plus haut, lorsqu'on y introduit les conditions de coplanarité. Il faut prouver que l'on a, dans ce cas,

$$(\mathfrak{S}AB)^{-1}(A^{-1}.\mathfrak{S}AC + B^{-1}.\mathfrak{S}BC - C) = A^{-1}CB^{-1}.$$

On en tire, en effet, en représentant le premier membre par X,

$$AXB = (\mathfrak{S}AB)^{-1}(B.\mathfrak{S}AC + A.\mathfrak{S}BC - ACB);$$

or, à cause de $\mathfrak{S}ACB = 0$, on a

$$ACB = \mathfrak{V}ACB = A.\mathfrak{S}CB + B.\mathfrak{S}AC - C.\mathfrak{S}AB.$$

Donc la valeur de AXB se réduit à C, et par suite

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

227. II. Soit l'équation

$$\square X = \mathfrak{V}ABX = C,$$

et supposons d'abord A, B, C non-coplanaires. On pourra alors prendre ces vecteurs pour L, M, N. On aura [art. 219, (10)]

$$\square' X = \mathfrak{V}(\overline{AB}.X) = \mathfrak{V}BAX.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} m.\mathfrak{S}ABC &= \mathfrak{S}(BA^2.BAB.\mathfrak{V}BAC) = A^2B^2.\mathfrak{S}(AB.\mathfrak{V}BAC) \\ &= A^2B^2.\mathfrak{S}.AB(B.\mathfrak{S}AC + C.\mathfrak{S}AB - A.\mathfrak{S}BC) \\ &= A^2B^2.\mathfrak{S}ABC.\mathfrak{S}AB, \end{aligned}$$

d'où

$$m = A^2B^2.\mathfrak{S}AB;$$

$$\begin{aligned} m_1.\mathfrak{S}ABC &= \mathfrak{S}(A.BAB.\mathfrak{V}BAC + BA^2.B.\mathfrak{V}BAC + BA^2.BAB.C) \\ &= \mathfrak{S}[(ABAB + A^2B^2)\mathfrak{V}BAC + A^2B^2ABC] \\ &= \mathfrak{S}.AB(AB + BA)\mathfrak{V}BAC + A^2B^2.\mathfrak{S}ABC \\ &= 2\mathfrak{S}AB.\mathfrak{S}[AB(BAC - \mathfrak{S}BAC)] + A^2B^2.\mathfrak{S}ABC \\ &= [2(\mathfrak{S}AB)^2 + A^2B^2]\mathfrak{S}ABC, \end{aligned}$$

d'où

$$m_1 = 2(\mathfrak{S}AB)^2 + A^2B^2;$$

$$\begin{aligned} m_2.\mathfrak{S}ABC &= \mathfrak{S}(AB.\mathfrak{V}BAC + A.BAB.C + BA^2.BC) \\ &= \mathfrak{S}.AB(BAC - \mathfrak{S}BAC) + \mathfrak{S}[AB(AB + BA)C] \\ &= 3\mathfrak{S}AB.\mathfrak{S}ABC, \end{aligned}$$

d'où

$$m_2 = 3\mathfrak{S}\text{AB}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} m\text{X} &= \text{A}^2\text{B}^2.\mathfrak{S}\text{AB}.\square^{-1}\text{C} \\ &= [2(\mathfrak{S}\text{AB})^2 + \text{A}^2\text{B}^2]\text{C} - 3\mathfrak{S}\text{AB}.\mathfrak{V}\text{ABC} + \mathfrak{V}(\text{AB}.\mathfrak{V}\text{ABC}). \end{aligned}$$

On a maintenant

$$\mathfrak{S}\text{AB}.\mathfrak{V}\text{ABC} = \mathfrak{S}\text{AB}.(\text{A}.\mathfrak{S}\text{BC} - \text{B}.\mathfrak{S}\text{AC} + \text{C}.\mathfrak{S}\text{AB}),$$

et, à cause de $\mathfrak{V}\text{ABA} = \text{A}.\mathfrak{S}\text{BA} - \text{B}.\mathfrak{S}\text{A}^2 + \text{A}.\mathfrak{S}\text{AB} = 2\text{A}.\mathfrak{S}\text{AB} - \text{A}^2\text{B}$,

$$\mathfrak{V}(\text{AB}.\mathfrak{V}\text{ABC}) = (2\text{A}.\mathfrak{S}\text{AB} - \text{A}^2\text{B})\mathfrak{S}\text{BC} - \text{AB}^2.\mathfrak{S}\text{AC} + \mathfrak{S}\text{AB}.\mathfrak{V}\text{ABC}.$$

Donc, en faisant, pour abréger, $\mathfrak{S}\text{BC} = \alpha$, $\mathfrak{S}\text{AC} = \beta$, $\mathfrak{S}\text{AB} = \gamma$,

$$\begin{aligned} m\text{X} &= (2\gamma^2 + \text{A}^2\text{B}^2)\text{C} - 2\gamma(\alpha\text{A} - \beta\text{B} + \gamma\text{C}) + (2\alpha\gamma - \beta\text{B}^2)\text{A} - \alpha\text{A}^2\text{B} \\ &= -\beta\text{B}^2\text{A} + (2\beta\gamma - \alpha\text{A}^2)\text{B} + \text{A}^2\text{B}^2\text{C}, \end{aligned}$$

ou

(1) $$\text{A}^2\text{B}^2.\mathfrak{S}\text{AB}.\text{X} = -\mathfrak{S}\text{AC}.\text{B}^2\text{A} + (2\mathfrak{S}\text{AC}.\mathfrak{S}\text{AB} - \text{A}^2\mathfrak{S}\text{BC})\text{B} + \text{A}^2\text{B}^2\text{C}.$$

228. On peut résoudre la même équation, sans employer la méthode générale, en procédant comme il suit. On a

$$\text{C} = \mathfrak{V}\text{ABX} = \text{X}.\mathfrak{S}\text{AB} + \mathfrak{V}(\mathfrak{V}\text{AB}.\text{X}).$$

En opérant par $\mathfrak{S}.(\mathfrak{V}\text{AB})\times$, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\mathfrak{V}\text{AB}.\text{C}) &= \mathfrak{S}\text{ABC} \\ &= \mathfrak{S}\text{AB}.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\text{AB}.\text{X}) + \mathfrak{S}[\mathfrak{V}\text{AB}.\mathfrak{V}(\mathfrak{V}\text{AB}.\text{X})] \\ &= \mathfrak{S}\text{AB}.\mathfrak{S}\text{ABX} + \mathfrak{S}[(\mathfrak{V}\text{AB})^2\text{X}] = \mathfrak{S}\text{AB}.\mathfrak{S}\text{ABX}. \end{aligned}$$

En ajoutant cette équation à l'équation donnée, multipliée par $\mathfrak{S}\text{AB}$, il vient

$$\text{C}.\mathfrak{S}\text{AB} + \mathfrak{S}\text{ABC} = \mathfrak{S}\text{AB}.\text{ABX},$$

d'où l'on tire

(2) $$\mathfrak{S}\text{AB}.\text{X} = \text{B}^{-1}\text{A}^{-1}(\text{C}.\mathfrak{S}\text{AB} + \mathfrak{S}\text{ABC}),$$

solution qui se présente sous une forme plus simple que la précédente (1).

Pour montrer que ces deux solutions s'accordent, multiplions l'équation (2) par $\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2$, ce qui donne

$$\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathrm{X} = \mathrm{BAC}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} + \mathrm{BA}.\mathfrak{S}\mathrm{ABC}.$$

Le second membre est un vecteur, sa partie réelle

$$\mathfrak{S}\mathrm{BAC}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} + \mathfrak{S}\mathrm{BA}.\mathfrak{S}\mathrm{ABC}$$

étant nulle [art. 195, (7)]. On peut donc écrire l'équation sous la forme

$$\mathrm{A}^2\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathrm{X} = \mathfrak{V}\mathrm{BAC}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} - \mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}\mathrm{ABC},$$

ou, en y ajoutant la quantité nulle

$$-\mathrm{C}.\mathfrak{S}(\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}) + \mathrm{A}.\mathfrak{S}(\mathrm{B}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathrm{C}) + \mathrm{B}.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathrm{AC}) + \mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}\mathrm{ABC}$$

[art. 198, (15)],

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathrm{X}\\ &= \mathfrak{V}(\mathrm{BAC}.\mathfrak{S}\mathrm{AB}) - \mathrm{C}.\mathfrak{S}(\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}) + \mathrm{A}.\mathfrak{S}(\mathrm{B}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathrm{C}) + \mathrm{B}.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathrm{AC}).\end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}\mathrm{BAC} &= \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} - \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \mathrm{C}.\mathfrak{S}\mathrm{BA},\\ \mathfrak{S}(\mathrm{B}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathrm{C}) &= -\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathrm{BC}) = -\mathfrak{S}(\mathrm{AB}.\mathrm{BC} - \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathrm{BC})\\ &= -\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}\mathrm{BC},\\ \mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathrm{AC}) &= -\mathfrak{S}(\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathrm{C}) = -\mathrm{A}^2.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}\mathrm{AC},\\ \mathfrak{S}(\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}) &= -\mathfrak{S}(\mathrm{BA}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}) = -\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2 + (\mathfrak{S}\mathrm{AB})^2,\end{aligned}$$

Donc, en substituant ces valeurs et réduisant, on a

$$\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathrm{X} = -\mathrm{AB}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AC} + \mathrm{B}(2\mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}\mathrm{AC} - \mathrm{A}^2.\mathfrak{S}\mathrm{BC}) + \mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\mathrm{C},$$

ce qui est bien la valeur trouvée plus haut.

229. Si les vecteurs A, B, C sont coplanaires, on a alors

$$\begin{aligned}0 = \mathfrak{S}\mathrm{ABC} &= \mathfrak{S}(\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{ABX})\\ &= \mathfrak{S}(\mathrm{ABA}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} - \mathrm{AB}^2.\mathfrak{S}\mathrm{AX} + \mathrm{ABX}.\mathfrak{S}\mathrm{AB})\\ &= \mathfrak{S}\mathrm{ABX}.\mathfrak{S}\mathrm{AB},.\end{aligned}$$

d'où l'on conclut que x est coplanaire avec A, B, C. On a donc

$$ABX = C, \quad \text{d'où} \quad X = B^{-1}A^{-1}C,$$

ou encore

$$X = B^{-1}.\mathfrak{S}A^{-1}C - A^{-1}.\mathfrak{S}B^{-1}C + C.\mathfrak{S}B^{-1}A^{-1}.$$

230. III. Soit proposé de résoudre l'équation

$$(3) \qquad \mathfrak{V}EX = C,$$

E et C étant des vecteurs. Nous allons commencer par déduire la solution de cette équation de celle de l'équation $\mathfrak{V}ABX = C$, ce qui nous donnera l'occasion d'examiner certains cas dans lesquels les quantités m s'évanouissent, et de montrer l'usage des fonctions évanouissantes dans la théorie des quaternions. Nous trouverons ensuite des solutions beaucoup plus simples.

Si, dans l'équation (1) de l'art. 227, nous posons

$$AB = e_0 + E,$$

e_0 étant un nombre réel, on obtiendra la solution de l'équation (3) en faisant tendre e_0 vers zéro.

On a, dans ce cas,

$$\begin{aligned} A^2B^2 &= AB.\overline{AB} = (e_0 + E)(e_0 - E) = e_0^2 - E^2, \\ AB^2.\mathfrak{S}AC + A^2B.\mathfrak{S}BC &= AB.B.\mathfrak{S}AC + BA.A.\mathfrak{S}BC \\ &= (e_0 + E)B.\mathfrak{S}AC + (e_0 - E)A.\mathfrak{S}BC \\ &= e_0(B.\mathfrak{S}AC + A.\mathfrak{S}BC) + E(B.\mathfrak{S}AC - A.\mathfrak{S}BC). \end{aligned}$$

Or on a [art. 196, (9)]

$$B.\mathfrak{S}AC - A.\mathfrak{S}BC = \mathfrak{V}(C.\mathfrak{V}AB) = \mathfrak{V}CE.$$

L'expression précédente se réduit donc à

$$e_0(B.\mathfrak{S}AC + A.\mathfrak{S}BC) + E.\mathfrak{V}CE.$$

Par suite, la solution de l'équation sera donnée par la formule

$$\begin{aligned} (e_0^2 - E^2)e_0X \\ &= (e_0^2 - E^2)C + 2e_0.\mathfrak{S}AC.B - e_0(B.\mathfrak{S}AC + A.\mathfrak{S}BC) - E.\mathfrak{V}CE \\ &= (e_0^2 - E^2)C + e_0.\mathfrak{V}(C.\mathfrak{V}AB) - E.\mathfrak{V}CE, \end{aligned}$$

Or $\mathfrak{S}(\text{E}.\mathfrak{V}\text{CE}) = \mathfrak{S}\text{ECE} = 0$; donc $\text{E}.\mathfrak{V}\text{CE}$ est un vecteur égal à $-\mathfrak{V}\text{CE}.\text{E} = (\mathfrak{S}\text{CE} - \text{CE})\,\text{E} = \text{E}.\mathfrak{S}\text{CE} - \text{CE}^2$. D'après cela, l'équation précédente devient

$$(c_0^2 - \text{E}^2)e_0\text{X} = e_0^2\text{C} + e_0.\mathfrak{V}\text{CE} - \text{E}.\mathfrak{S}\text{CE},$$

d'où, en divisant par e_0, et faisant ensuite $e_0 = 0$,

$$-\text{E}^2\text{X} = \mathfrak{V}\text{CE} - \text{E}.\lim_{e_0=0}\frac{\mathfrak{S}\text{CE}}{e_0}.$$

Mais, par la forme même de l'équation proposée, on voit que l'on doit avoir

$$\mathfrak{S}\text{CE} = \mathfrak{S}(\text{E}.\mathfrak{V}\text{EX}) = \mathfrak{S}\text{E}^2\text{X} = 0;$$

donc la limite de $\frac{\mathfrak{S}\text{CE}}{e_0}$ est indéterminée, et l'on peut la remplacer par une quantité réelle arbitraire h_0. Donc la solution cherchée est

$$\text{X} = -\mathfrak{V}\text{CE}^{-1} + h_0\text{E}^{-1},$$

ou encore, à cause de $\mathfrak{S}\text{CE} = 0$,

$$\text{X} = \text{E}^{-1}(h_0 + \text{C}).$$

En effet, cette équation donne bien $\text{EX} = h_0 + \text{C}$, d'où $\mathfrak{V}\text{EX} = \text{C}$.

231. De là un mode de solution très simple. On a, quel que soit h_0, $\mathfrak{V}\text{E}h_0\text{E}^{-1} = 0$, d'où il s'ensuit que

$$\mathfrak{V}.\text{E}(\text{X} - h_0\text{E}^{-1}) = \mathfrak{V}\text{EX} = \text{C}$$

est un vecteur constant, quel que soit h_0. Donc

$$\text{E}(\text{X} - h_0\text{E}^{-1}) = \text{EX} - h_0 = c_0 + \text{C},$$

d'où l'on tire la solution précédente, en écrivant h_0 au lieu de $h_0 + c_0$.

232. Appliquons maintenant à la même équation la méthode générale. Prenons pour L, M, N les vecteurs E, C et EC, ce

dernier produit devant être un vecteur si l'on veut que X en soit un (art. 230). On a alors

$$\square'\mathrm{X} = \mathfrak{V}\mathrm{XE},$$

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{EC}.\mathrm{EC}) = \mathfrak{S}(\mathrm{EC}.\mathrm{EC}) = -\mathfrak{S}(\mathrm{EC}.\overline{\mathrm{EC}}) = -\mathfrak{S}(\mathrm{EC}.\mathrm{CE}) = -\mathrm{E}^2\mathrm{C}^2;$$

$$-\mathrm{E}^2\mathrm{C}^2.m = \mathfrak{S}[\mathfrak{V}(\mathrm{E}^2).\mathfrak{V}\mathrm{CE}.\mathfrak{V}\mathrm{E}^2\mathrm{C}] = 0,$$

d'où $m = 0$;

$$-\mathrm{E}^2\mathrm{C}^2.m_1 = \mathfrak{S}[\mathrm{E}.\mathfrak{V}\mathrm{CE}.\mathfrak{V}\mathrm{ECE} + \mathfrak{V}(\mathrm{E}^2).\mathrm{C}.\mathfrak{V}\mathrm{ECE} + \mathfrak{V}(\mathrm{E}^2).\mathfrak{V}\mathrm{CE}.\mathrm{E}]$$
$$= \mathfrak{S}[\mathrm{E}.\mathfrak{V}\mathrm{CE}.\mathfrak{V}(\mathrm{E}.\mathfrak{V}\mathrm{CE})] = \mathfrak{S}(\mathrm{E}.\mathrm{CE}.\mathrm{E}.\mathrm{CE}) = \mathrm{E}^4\mathrm{C}^2,$$

d'où $m_1 = -\mathrm{E}^2$;

$$-\mathrm{E}^2\mathrm{C}^2.m_2 = \mathfrak{S}[\mathrm{EC}.\mathfrak{V}\mathrm{ECE} + \mathrm{E}.\mathfrak{V}\mathrm{CE}.\mathrm{EC} + \mathfrak{V}(\mathrm{E}^2).\mathrm{CEC}]$$
$$= \mathfrak{S}(\mathrm{EC}.\mathrm{E}.\mathrm{CE}) = 0,$$

d'où $m_2 = 0$.

L'équation cubique en $\square$ devient donc

$$-\mathrm{E}^2\square + \square^3 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\square^{-1} = \frac{1}{\mathrm{E}^2}\square + \square^{-2}0,$$

$$\mathrm{X} = \square^{-1}\mathrm{C} = \frac{1}{\mathrm{E}^2}\mathfrak{V}\mathrm{EC} + \square^{-2}0.$$

Or l'équation $\square^2\mathrm{Z} = 0$ peut s'écrire sous la forme

$$0 = \mathfrak{V}(\mathrm{E}.\mathfrak{V}\mathrm{EZ}) = \mathfrak{V}[\mathrm{E}(\mathrm{EZ} - \mathfrak{S}\mathrm{EZ})] = \mathrm{E}^2\mathrm{Z} - \mathrm{E}.\mathfrak{S}\mathrm{EZ}.$$

Donc, si Z n'est pas nul, il faut qu'il soit parallèle à E, et de la forme $h_0\mathrm{E}$, d'où

$$\mathrm{Z} = \square^{-2}0 = h_0\mathrm{E},$$

et partant

$$\mathrm{X} = \frac{1}{\mathrm{E}^2}.\mathfrak{V}\mathrm{EC} + h_0\mathrm{E}.$$

233. IV. Prenons enfin l'équation

$$\square\mathrm{X} = \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \mathrm{A}'.\mathfrak{S}\mathrm{B}'\mathrm{X} + \mathrm{A}''.\mathfrak{S}\mathrm{B}''\mathrm{X} = \mathrm{C},$$

à laquelle peut se ramener le cas le plus général d'une équation linéaire (¹). On a

$$\square' \mathrm{x} = \mathrm{b}.\mathfrak{S}\mathrm{a x} + \mathrm{b}'.\mathfrak{S}\mathrm{a}'\mathrm{x} + \mathrm{b}''.\mathfrak{S}\mathrm{a}''\mathrm{x}.$$

En prenant pour $\mathrm{l}, \mathrm{m}, \mathrm{n}$ les vecteurs $\mathrm{a}, \mathrm{a}', \mathrm{a}''$, qui ne sont pas généralement coplanaires, on a

$$\mathfrak{S}(\square'\mathrm{a}.\square'\mathrm{a}'.\square'\mathrm{a}'') = \mathfrak{S}.(\mathrm{b}.\mathfrak{S}\mathrm{aa} + \mathrm{b}'.\mathfrak{S}\mathrm{a}'\mathrm{a} + \mathrm{b}''.\mathfrak{S}\mathrm{a}''\mathrm{a}) \times \ldots \times \ldots$$

$$= \mathfrak{S}\mathrm{bb}'\mathrm{b}''. \begin{vmatrix} \mathfrak{S}\mathrm{aa} & \mathfrak{S}\mathrm{a}'\mathrm{a} & \mathfrak{S}\mathrm{a}''\mathrm{a} \\ \mathfrak{S}\mathrm{aa}' & \mathfrak{S}\mathrm{a}'\mathrm{a}' & \mathfrak{S}\mathrm{a}''\mathrm{a}' \\ \mathfrak{S}\mathrm{aa}'' & \mathfrak{S}\mathrm{a}'\mathrm{a}'' & \mathfrak{S}\mathrm{a}''\mathrm{a}'' \end{vmatrix}.$$

Or on a

$$\mathfrak{S}\mathrm{a}'\mathrm{a}'.\mathfrak{S}\mathrm{a}''\mathrm{a}'' - \mathfrak{S}\mathrm{a}''\mathrm{a}'.\mathfrak{S}\mathrm{a}'\mathrm{a}'' = \mathfrak{S}(\mathrm{a}''\mathrm{a}'.\mathrm{a}'\mathrm{a}'') - \mathfrak{S}\mathrm{a}''\mathrm{a}'.\mathfrak{S}\mathrm{a}'\mathrm{a}''$$
$$= \mathfrak{S}[\mathrm{a}''\mathrm{a}'.(\mathrm{a}'\mathrm{a}'' - \mathfrak{S}\mathrm{a}'\mathrm{a}'')] = \mathfrak{S}(\mathrm{a}''\mathrm{a}'.\mathfrak{V}\mathrm{a}'\mathrm{a}'') = -\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{a}'\mathrm{a}''.\mathfrak{V}\mathrm{a}'\mathrm{a}''),$$
$$\mathfrak{S}\mathrm{a}''\mathrm{a}'.\mathfrak{S}\mathrm{aa}'' - \mathfrak{S}\mathrm{aa}'.\mathfrak{S}\mathrm{a}''\mathrm{a}'' = \mathfrak{S}\mathrm{aa}''.\mathfrak{S}\mathrm{a}''\mathrm{a}' - \mathfrak{S}(\mathrm{aa}''.\mathrm{a}''\mathrm{a}')$$
$$= \mathfrak{S}[\mathrm{aa}''(\mathfrak{S}\mathrm{a}''\mathrm{a}' - \mathrm{a}''\mathrm{a}')] = \mathfrak{S}(\mathrm{aa}''.\mathfrak{V}\mathrm{a}'\mathrm{a}'') = -\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{a}''\mathrm{a}.\mathfrak{V}\mathrm{a}'\mathrm{a}''),$$
$$\mathfrak{S}\mathrm{aa}'.\mathfrak{S}\mathrm{a}'\mathrm{a}'' - \mathfrak{S}\mathrm{a}'\mathrm{a}'.\mathfrak{S}\mathrm{aa}'' = \mathfrak{S}\mathrm{aa}'.\mathfrak{S}\mathrm{a}'\mathrm{a}'' - \mathfrak{S}(\mathrm{aa}'.\mathrm{a}'\mathrm{a}'')$$
$$= -\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{aa}'.\mathfrak{V}\mathrm{a}'\mathrm{a}'').$$

(¹) En effet, soient $\mathrm{b}, \mathrm{b}', \mathrm{b}''$ trois vecteurs non coplanaires quelconques, et déterminons trois autres vecteurs $\mathrm{c}', \mathrm{c}', \mathrm{c}''$ par les conditions

$$\mathrm{c}\,.\mathfrak{S}\mathrm{bb}'\mathrm{b}'' = \mathfrak{V}\mathrm{b}'\mathrm{b}'',$$
$$\mathrm{c}'.\mathfrak{S}\mathrm{bb}'\mathrm{b}'' = \mathfrak{V}\mathrm{b}''\mathrm{b},$$
$$\mathrm{c}''.\mathfrak{S}\mathrm{bb}'\mathrm{b}'' = \mathfrak{V}\mathrm{bb}'.$$

Si x est un vecteur quelconque, on aura identiquement [art. 199, (16)]

$$\mathrm{x}.\mathfrak{S}\mathrm{bb}'\mathrm{b}'' = \mathfrak{V}\mathrm{b}'\mathrm{b}''.\mathfrak{S}\mathrm{bx} + \mathfrak{V}\mathrm{b}''\mathrm{b}.\mathfrak{S}\mathrm{b}'\mathrm{x} + \mathfrak{V}\mathrm{bb}'.\mathfrak{S}\mathrm{b}''\mathrm{x},$$

ou, en ayant égard aux relations précédentes,

$$\mathrm{x} = \mathrm{c}.\mathfrak{S}\mathrm{bx} + \mathrm{c}'.\mathfrak{S}\mathrm{b}'\mathrm{x} + \mathrm{c}''.\mathfrak{S}\mathrm{b}''\mathrm{x}.$$

Si l'on pose maintenant, quelle que soit la fonction linéaire et homogène $\square$,

$$\square\mathrm{c} = \mathrm{a}, \qquad \square\mathrm{c}' = \mathrm{a}', \qquad \square\mathrm{c}'' = \mathrm{a}'',$$

il viendra

$$\square\mathrm{x} = \mathrm{a}.\mathfrak{S}\mathrm{bx} + \mathrm{a}'.\mathfrak{S}\mathrm{b}'\mathrm{x} + \mathrm{a}''.\mathfrak{S}\mathrm{b}''\mathrm{x},$$

d'où l'on voit que le premier membre de toute équation $\square\mathrm{x} = \mathrm{c}$ est réductible à la forme trinôme que nous considérons, et qui peut être regardée comme la forme type.

Donc le déterminant a pour valeur

$$-\mathfrak{S}\mathrm{AA}.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{A'A''}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''})-\mathfrak{S}\mathrm{AA'}.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{A''A}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''})-\mathfrak{S}\mathrm{AA''}.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{AA'}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''})$$
$$=-\mathfrak{S}.\mathrm{A}[\mathrm{A}.\mathfrak{S}(\mathrm{A'A''}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''})+\mathrm{A'}.\mathfrak{S}(\mathrm{A''A}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''})+\mathrm{A''}\mathfrak{S}(\mathrm{AA'}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''})].$$

Or, d'après la formule (15) de l'art. 198, la quantité entre crochets est égale à $\mathfrak{V}\mathrm{A'A''}.\mathfrak{S}\mathrm{AA'A''}$. Donc la valeur du déterminant est

$$-\mathfrak{S}[\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''}.\mathfrak{S}\mathrm{AA'A''}]=-(\mathfrak{S}\mathrm{AA'A''})^2,$$

et par conséquent

$$m=-\mathfrak{S}\mathrm{AA'A''}.\mathfrak{S}\mathrm{BB'B''}.$$

On a ensuite

$$\mathfrak{S}(\mathrm{A}.\square'\mathrm{A'}.\square'\mathrm{A''})$$
$$=\mathfrak{S}[\mathrm{A}.(\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AA'}+\mathrm{B'}.\mathfrak{S}\mathrm{A'A'}+\mathrm{B''}.\mathfrak{S}\mathrm{A''A'}).(\mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AA''}+\mathrm{B'}.\mathfrak{S}\mathrm{A'A''}+\mathrm{B''}.\mathfrak{S}\mathrm{A''A''})]$$
$$=\mathfrak{S}[\mathrm{B'B''}.\mathrm{A}.(\mathfrak{S}\mathrm{A'A'}.\mathfrak{S}\mathrm{A''A''}-\mathfrak{S}\mathrm{A''A'}.\mathfrak{S}\mathrm{A'A''})]+\ldots$$
$$=-\mathfrak{S}[\mathrm{B'B''A}.\mathfrak{S}(\mathrm{A'A''}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''})+\mathrm{B''BA}.\mathfrak{S}(\mathrm{A''A}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''})+\mathrm{BB'A}.\mathfrak{S}(\mathrm{AA'}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''})].$$

On aura de même

$$\mathfrak{S}(\square'\mathrm{A}.\mathrm{A'}.\square'\mathrm{A''})=-\mathfrak{S}[\mathrm{B'B''A'}.\mathfrak{S}(\mathrm{A''A}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''})+\ldots],$$
$$\mathfrak{S}(\square'\mathrm{A}.\square'\mathrm{A'}.\mathrm{A''})=-\mathfrak{S}[\mathrm{B'B''A''}.\mathfrak{S}(\mathrm{AA'}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''})+\ldots],$$

d'où l'on tire, en faisant la somme et ayant égard à la formule (15) de l'art. 198, le numérateur de m_1

$$=-\mathfrak{S}.\mathrm{B'B''}[\mathrm{A}.\mathfrak{S}(\mathrm{A'A''}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''})+\mathrm{A'}.\mathfrak{S}(\mathrm{A''A}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''})+\mathrm{A''}.\mathfrak{S}(\mathrm{AA'}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''})]+\ldots$$
$$=-\mathfrak{S}[\mathrm{B'B''}.\mathfrak{V}\mathrm{A'A''}.\mathfrak{S}\mathrm{AA'A''}+\mathrm{B''B}.\mathfrak{V}\mathrm{A''A}.\mathfrak{S}\mathrm{A'A''A}+\mathrm{BB'}.\mathfrak{V}\mathrm{AA'}.\mathfrak{S}\mathrm{A''AA'}]$$
$$=-\mathfrak{S}\mathrm{AA'A''}.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{A'A''}.\mathfrak{V}\mathrm{B'B''}+\mathfrak{V}\mathrm{A''A}.\mathfrak{V}\mathrm{B''B}+\mathfrak{V}\mathrm{AA'}.\mathfrak{V}\mathrm{BB'}).$$

Donc

$$m_1=-\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{A'A''}.\mathfrak{V}\mathrm{B'B''}+\mathfrak{V}\mathrm{A''A}.\mathfrak{V}\mathrm{B''B}+\mathfrak{V}\mathrm{AA'}.\mathfrak{V}\mathrm{BB'}).$$

Enfin

$$\mathfrak{S}(\square'\mathrm{A}.\mathrm{A'A''})=\mathfrak{S}[\mathfrak{S}\mathrm{AA}.\mathrm{BA'A''}+\mathfrak{S}\mathrm{AA'}.\mathrm{B'A'A''}+\mathfrak{S}\mathrm{AA''}.\mathrm{B''A'A''}].$$

Formant de même les deux autres termes du numérateur de m_2, et ajoutant, on trouve, en vertu de la formule (16) de

l'art. 199,

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{S}\left[B(A'A''.\mathfrak{S}AA + A''A.\mathfrak{S}AA' + AA'.\mathfrak{S}AA'') + \ldots\right] \\
&= \mathfrak{S}\left[B(\mathfrak{V}A'A''.\mathfrak{S}AA + \mathfrak{V}A''A.\mathfrak{S}AA' + \mathfrak{V}AA'.\mathfrak{S}AA'') + \ldots\right] \\
&= \mathfrak{S}(BA.\mathfrak{S}AA'A'' + B'A'.\mathfrak{S}A'A''A + B''A''.\mathfrak{S}A''AA'),
\end{aligned}$$

d'où

$$m_2 = \mathfrak{S}(AB + A'B' + A''B'').$$

Par conséquent, on a, pour la solution cherchée,

$$\begin{aligned}
-\mathfrak{S}AA'A''.\mathfrak{S}BB'B''.X = &-\mathfrak{S}(\mathfrak{V}A'A''.\mathfrak{V}B'B'' + \mathfrak{V}A''A.\mathfrak{V}B''B + \mathfrak{V}AA'.\mathfrak{V}BB').C \\
&- \mathfrak{S}(AB + A'B' + A''B'').\Box C + \Box^2 C.
\end{aligned}$$

234. On peut arriver plus simplement à ce résultat. Si l'on opère, en effet, sur l'équation successivement par $\mathfrak{S}A'A'' \times$, $\mathfrak{S}A''A \times$, $\mathfrak{S}AA' \times$, il vient

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}A'A''A.\mathfrak{S}B\,X &= \mathfrak{S}A'A''C, \\
\mathfrak{S}A''AA'.\mathfrak{S}B'X &= \mathfrak{S}A''AC, \\
\mathfrak{S}AA'A''.\mathfrak{S}B''X &= \mathfrak{S}AA'C.
\end{aligned}$$

De ces équations on tire [art. 199, (16)], en les multipliant respectivement par $\mathfrak{V}B'B''$, $\mathfrak{V}B''B$, $\mathfrak{V}BB'$, et faisant la somme,

$$\mathfrak{S}AA'A''.\mathfrak{S}BB'B''.X = \mathfrak{V}B'B''.\mathfrak{S}A'A''C + \mathfrak{V}B''B.\mathfrak{S}A''AC + \mathfrak{V}BB'.\mathfrak{S}AA'C.$$

On peut vérifier comme il suit l'identité de cette valeur avec celle que donne la méthode générale. On a, en effet [art. 198, (15)],

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{V}B'B''.\mathfrak{S}A'A''C \\
&\quad = A'.\mathfrak{S}(A''C.\mathfrak{V}B'B'') + A''.\mathfrak{S}(CA'.\mathfrak{V}B'B'') + C.\mathfrak{S}(A'A''.\mathfrak{V}B'B'') \\
&\quad = A'.\mathfrak{S}[A''.\mathfrak{V}(C.\mathfrak{V}B'B'')] + \ldots \\
&\quad = A'.(\mathfrak{S}A''B''.\mathfrak{S}CB' - \mathfrak{S}A''B'.\mathfrak{S}CB'') \\
&\qquad\quad + A''.(\mathfrak{S}C'B''.\mathfrak{S}A'B' - \mathfrak{S}CB'.\mathfrak{S}A'B'') + C.\mathfrak{S}(A'A''.\mathfrak{V}B'B'').
\end{aligned}$$

Traitant les deux autres termes de la même manière, on trouve

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{S}AA'A''.\mathfrak{S}BB'B''.X \\
&\quad = A(\mathfrak{S}A'B'.\mathfrak{S}CB - \mathfrak{S}A'B.\mathfrak{S}CB' + \mathfrak{S}A''B''.\mathfrak{S}CB - \mathfrak{S}A''B.\mathfrak{S}CB'') \\
&\qquad + A'(\ldots) + A''(\ldots) \\
&\qquad + C[\mathfrak{S}(A'A''.\mathfrak{V}B'B'') + \mathfrak{S}(A''A.\mathfrak{V}B''B) + \mathfrak{S}(AA'.\mathfrak{V}BB')]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathrm{A}[\mathfrak{S}\mathrm{BC}.(\mathfrak{S}\mathrm{AB} + \mathfrak{S}\mathrm{A'B'} + \mathfrak{S}\mathrm{A''B''}) - \mathfrak{S}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} - \mathfrak{S}\mathrm{A'B}.\mathfrak{S}\mathrm{B'C} - \mathfrak{S}\mathrm{A''B}.\mathfrak{S}\mathrm{B''C}] \\
&\quad + \mathrm{A'}[\ldots] + \mathrm{A''}[\ldots] + \mathrm{C}[\mathfrak{S}(\mathrm{A'A''}.\mathfrak{V}\mathrm{B'B''}) + \ldots] \\
&= (\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \mathrm{A'}.\mathfrak{S}\mathrm{B'C} + \mathrm{A''}.\mathfrak{S}\mathrm{B''C})\,(\mathfrak{S}\mathrm{AB} + \mathfrak{S}\mathrm{A'B'} + \mathfrak{S}\mathrm{A''B''}) \\
&\quad - \mathrm{A}.\mathfrak{S}[\mathrm{B}(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \mathrm{A'}.\mathfrak{S}\mathrm{B'C} + \mathrm{A''}.\mathfrak{S}\mathrm{B''C})] \\
&\quad - \mathrm{A'}.\mathfrak{S}[\mathrm{B'}(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \ldots)] - \mathrm{A''}.\mathfrak{S}[\mathrm{B''}(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BC} + \ldots)] \\
&\quad + \mathrm{C}[\mathfrak{S}(\mathrm{A'A''}.\mathfrak{V}\mathrm{B'B''}) + \ldots] \\
&= \square\mathrm{C}.\textstyle\sum \mathrm{AB} - \square^2\mathrm{C} + \mathrm{C}.\textstyle\sum \mathfrak{S}(\mathrm{AA'}.\mathfrak{V}\mathrm{BB'}),
\end{aligned}$$

valeur qui coïncide avec celle de l'art. précédent, à cause de $\mathfrak{S}(\mathrm{AA'}.\mathfrak{V}\mathrm{BB'}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{AA'}.\mathfrak{V}\mathrm{BB'})$, etc.

235. On voit par ce qui précède que, dans les divers cas particuliers, on peut le plus souvent trouver des procédés directs plus courts que l'emploi de la méthode générale. Mais outre son application à la résolution des équations, la méthode d'Hamilton est surtout importante parce qu'elle nous apprend à exprimer les inverses de certaines fonctions de $\square$, telles que $(\square - g)^{-1}$, à l'aide d'opérations directes, propriété qui est de la plus grande utilité dans les applications, et aussi parce qu'elle conduit à l'équation fondamentale du troisième degré

$$\square^3 - m_2\square^2 + m_1\square - m = 0,$$

qui résulte immédiatement de l'équation de l'art. 223, et qui joue un rôle considérable dans le problème de la détermination des axes des surfaces du second degré et dans ceux qui lui sont analogues

236. D'après ce que nous avons vu (art. 223), on peut déterminer trois coefficients réels m, m_1, m_2, tels que l'équation

$$(1) \qquad (\square^3 - m_2\square^2 + m_1\square - m)\mathrm{X} = 0,$$

que nous représenterons, pour abréger, par

$$(2) \qquad \varphi(\square)\mathrm{X} = 0,$$

soit satisfaite identiquement par un vecteur quelconque X.

Si l'on désigne par g_1, g_2, g_3 les racines de l'équation cubique

(3) $$\varphi(g) = g^3 - m_2 g^2 + m_1 g - m = 0,$$

l'équation (1) pourra s'écrire symboliquement sous la forme

(4) $$(\square - g_1)(\square - g_2)(\square - g_3)\mathrm{x} = 0.$$

Cela posé, cherchons la condition pour qu'un vecteur x soit parallèle au vecteur $\square\mathrm{x}$, c'est-à-dire pour que l'opération $\square$, appliquée à x, n'en change pas la direction. On devra avoir, g désignant un nombre réel,

(5) $$\square\mathrm{x} = g\mathrm{x}\ (^1),$$

d'où

$$\square^2\mathrm{x} = g\square\mathrm{x} = g^2\mathrm{x}, \qquad \square^3\mathrm{x} = g^2\square\mathrm{x} = g^3\mathrm{x},$$

et, en substituant dans l'équation (1), à laquelle tout vecteur doit satisfaire,

$$(g^3 - m_2 g^2 + m_1 g - m)\mathrm{x} = 0,$$

ce qui exige que le coefficient g soit l'une des racines de l'équation (3). Il faudra donc prendre pour x un vecteur satisfaisant à l'une des équations que l'on obtient en remplaçant, dans (5), g par l'une des valeurs g_1, g_2, g_3, savoir, un des vecteurs x_1, x_2, x_3, tels que

(6) $$(\square - g_1)\mathrm{x}_1 = 0, \qquad (\square - g_2)\mathrm{x}_2 = 0, \qquad (\square - g_3)\mathrm{x}_3 = 0.$$

237. Supposons les trois racines g_1, g_2, g_3 réelles et inégales. Si x_1, x_2, x_3 sont trois vecteurs non coplanaires quelconques, on peut décomposer le vecteur quelconque x suivant leurs directions, et l'on a, α_1, α_2, α_3 étant trois quantités réelles,

(7) $$\mathrm{x} = \alpha_1\mathrm{x}_1 + \alpha_2\mathrm{x}_2 + \alpha_3\mathrm{x}_3.$$

---

(1) Cette équation peut encore s'écrire sous la forme d'une équation du second degré

$$\mathfrak{V}(\mathrm{x}.\square\mathrm{x}) = 0.$$

Opérons par $\square - g_1$ sur les deux membres de cette égalité; il viendra

$$(\square - g_1)\mathrm{x} = \alpha_1(\square - g_1)\mathrm{x}_1 + \alpha_2(\square - g_1)\mathrm{x}_2 + \alpha_3(\square - g_1)\mathrm{x}_3.$$

Si maintenant x_1, x_2, x_3 sont les trois directions qui satisfont respectivement aux équations (6), $(\square - g_1)\mathrm{x}_1$ s'annulera; ensuite, x_2 étant parallèle à $\square\mathrm{x}_2$ et par suite à $(\square - g_1)\mathrm{x}_2$, et x_3 étant de même parallèle à $(\square - g_1)\mathrm{x}_3$, on voit que $(\square - g_1)\mathrm{x}$ se réduira à la forme

$$(\square - g_1)\mathrm{x} = \alpha_2'\mathrm{x}_2 + \alpha_3'\mathrm{x}_3,$$

α_2' et α_3' étant de nouvelles constantes réelles. Donc l'opération $\square - g_1$ fait perdre à un vecteur quelconque x sa composante parallèle à x_1, et par conséquent $(\square - g_1)\mathrm{x}$ est parallèle au plan de x_2 et de x_3.

En opérant actuellement par $\square - g_2$, on voit de même que le vecteur x, par l'effet des deux opérations successives, a perdu ses composantes parallèles à x_1 et à x_2, et qu'il est devenu ainsi parallèle à x_3. Donc x_3 est parallèle, ou, ce qui revient ici au même, égal au vecteur $(\square - g_1)(\square - g_2)\mathrm{x}$, ce que l'on peut représenter symboliquement par l'équation

$$\mathrm{x}_3 = \frac{\varphi(\square)}{\square - g_3}\mathrm{x},$$

x étant un vecteur quelconque.

On peut aisément vérifier ce résultat. En effet, si l'on opère par $\square - g_3$, on a, en vertu de l'identité (3),

$$(\square - g_3)\mathrm{x}_3 = (\square - g_1)(\square - g_2)(\square - g_3)\mathrm{x} = \varphi(\square)\mathrm{x} = 0.$$

En déterminant de même les deux autres directions, on aura

$$(8)\qquad \mathrm{x}_1 = \frac{\varphi(\square)}{\square - g_1}\mathrm{x}, \quad \mathrm{x}_2 = \frac{\varphi(\square)}{\square - g_2}\mathrm{x}, \quad \mathrm{x}_3 = \frac{\varphi(\square)}{\square - g_3}\mathrm{x},$$

x étant un vecteur arbitraire.

238. Si les racines g_2, g_3 étaient égales entre elles, la troi-

sième équation (6) se confondrait avec la seconde, et l'on n'aurait plus que deux directions x_1, x_2 satisfaisant à la condition (5). Pour représenter un vecteur quelconque x par l'équation (7), on prendrait pour x_3 un vecteur arbitraire, non coplanaire à x_1 et x_2. On aurait alors pour x_1 et x_2 les mêmes valeurs

$$x_1 = \frac{\varphi(\square)}{\square - g_1} x = (\square - g_2)^2 x,$$

$$x_2 = \frac{\varphi(\square)}{\square - g_2} x = (\square - g_1)(\square - g_2) x,$$

qui vérifieraient les deux premières équations (6). Mais, en opérant sur (7) par $(\square - g_1)(\square - g_2)$, il viendrait

$$(\square - g_1)(\square - g_2) x = \alpha_3 (\square - g_1)(\square - g_2) x_3,$$

et le second membre satisfait à l'équation

$$(\square - g_2) x = 0,$$

quel que soit x_3 différent de x.

Si les trois racines sont égales, alors tout vecteur satisfait à la relation $(\square - g_1) x = 0$. Car, en prenant $x_1 = (\square - g_1)^2 x$, l'équation $(\square - g_1) x_1 = 0$ est satisfaite, et x_1 peut représenter un vecteur quelconque.

239. Considérons maintenant le cas où la fonction $\square$ est *conjuguée à elle-même*, c'est-à-dire égale à sa conjuguée $\square'$, de telle sorte que l'on ait (art. 219), quels que soient les vecteurs x et Y,

$$(9) \qquad \mathfrak{S}(Y.\square x) = \mathfrak{S}(x.\square Y).$$

Des équations (6) on tire

$$g_2 g_3 . \mathfrak{S} x_2 x_3 = \mathfrak{S}(\square x_2 . \square x_3),$$

ou, en vertu de la condition (9), en remplaçant soit Y par $\square x_3$ et x par x_2, soit Y par $\square x_2$ et x par x_3,

$$g_2 g_3 . \mathfrak{S} x_2 x_3 = \mathfrak{S}(x_2 . \square^2 x_3) = \mathfrak{S}(x_3 . \square^2 x_2).$$

On a d'ailleurs

$$\square^2 x_2 = \square (g_2 x_2) = g_2 \square x_2 = g_2^2 x_2,$$

et de même $\square^2 x_3 = g_3^2 x_3$. Donc

$$g_2 g_3 . \mathfrak{S} x_2 x_3 = g_3^2 . \mathfrak{S} x_2 x_3 = g_2^2 . \mathfrak{S} x_2 x_3,$$

égalités qui, pour g_2 et g_3 différents entre eux, ne peuvent subsister que si l'on a

$$\mathfrak{S} x_2 x_3 = 0,$$

c'est-à-dire si les deux directions x_2, x_3 sont perpendiculaires entre elles. Donc, si l'équation (3) a ses trois racines inégales, les trois vecteurs déterminés par les formules (8) forment un système orthogonal, lorsque la fonction $\square$ est conjuguée à elle-même.

Si l'équation (3) a deux racines égales, $g_1 = g_2$, x_3 sera perpendiculaire à tous les vecteurs, en nombre infini, qui satisferont à l'équation $(\square - g_1) x = 0$.

240. Ce que nous venons de dire suppose la réalité des trois racines g_1, g_2, g_3. Mais nous allons montrer que ces racines ne peuvent être complexes, lorsque la fonction $\square$ est conjuguée à elle-même. Soit, en effet, s'il est possible, $g_2 + h_2 i$ une de ces racines, i étant l'unité imaginaire de l'algèbre ordinaire, et soit $x_2 + y_2 i$ la valeur correspondante de x, donnée par la seconde équation (8). On devra avoir

$$\square (x_2 + y_2 i) = (g_2 + h_2 i)(x_2 + y_2 i).$$

Opérant successivement par $\mathfrak{S} y_2 \times$, et par $\mathfrak{S} x_2 \times$, et soustrayant les résultats, il vient, eu égard à la propriété (9) de fonction $\square$,

$$0 = h_2 (x_2^2 + y_2^2),$$

et comme x_2 et y_2 sont deux vecteurs réels, cette équation ne peut subsister que si h_2 est nul, ou si la racine g_2 est réelle.

241. Si l'on suppose que les vecteurs orthogonaux x_1, x_2, x_3

soient tous unitaires, et qu'on prenne leurs directions pour celles des trois unités imaginaires $\iota_1, \iota_2, \iota_3$, alors l'identité

$$x.\mathfrak{S}x_1x_2x_3 = x_1\mathfrak{S}x_2x_3x + x_2\mathfrak{S}x_3x_1x + x_3\mathfrak{S}x_1x_2x$$

deviendra

$$(10) \qquad x = -\iota_1.\mathfrak{S}\iota_1x - \iota_2.\mathfrak{S}\iota_2x - \iota_3.\mathfrak{S}\iota_3x,$$

d'où

$$(11) \qquad \square x = -g_1\iota_1.\mathfrak{S}\iota_1x - g_2\iota_2.\mathfrak{S}\iota_2x - g_3\iota_3.\mathfrak{S}\iota_3x,$$

forme sous laquelle on peut mettre toute fonction conjuguée à elle-même, pourvu que l'on prenne pour $\iota_1, \iota_2, \iota_3$ les racines de l'équation

$$\mathfrak{V}(x.\square x) = 0.$$

242. On peut tirer de cette forme une transformation très importante d'une fonction conjuguée à elle-même.

La formule (11) renferme seulement trois constantes réelles g_1, g_2, g_3. Voyons si l'on ne peut pas la réduire à la forme

$$\square x = lx + m.\mathfrak{V}[(\iota_1 + n\iota_3)x(\iota_1 - n\iota_3)],$$

renfermant également trois constantes réelles l, m, n.

En mettant pour x sa valeur (10), développant et égalant de part et d'autre les coefficients de $\iota_1, \iota_2, \iota_3$, dans les deux expressions de $\square x$, il vient

$$-g_1 = -l + m(2 - 1 + n^2),$$
$$-g_2 = -l - m(1 - n^2),$$
$$-g_3 = -l - m(2n^2 + 1 - n^2),$$

d'où

$$n^2 = \frac{g_2 - g_3}{g_1 - g_2},$$

d'où une valeur réelle pour n, si g_2 est la racine de grandeur moyenne parmi les trois racines g_1, g_2, g_3. On a ensuite

$$m = -\frac{g_1 - g_2}{2}, \qquad l = \frac{g_1 + g_2}{2}.$$

CHAPITRE VIII.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS DE QUATERNIONS.

---

§ Ier.

Différentiation des fonctions explicites.

243. Si $f(X)$ est une fonction analytique d'une variable complexe ordinaire $X = x_0 + x_1 i$, nous savons que, lorsqu'on fait croître X de la quantité infiniment petite $dX = dx_0 + i dx_1$, $f(X)$ croît d'une quantité qui, aux infiniment petits près du second ordre, est de la forme $dX . f'(X)$, $f'(X)$ désignant une quantité indépendante du rapport $dx_0 : dx_1$ des composantes de dX, et le calcul de cette quantité se fait par les mêmes règles que dans le cas d'une variable réelle. Le multiplicateur $f'(X)$ de dX est la *dérivée* de la fonction $f(X)$.

Si $f(X)$ est une fonction non monogène X, c'est-à-dire une quantité variable, dépendant de X d'une manière quelconque, mais dont l'accroissement infiniment petit, *réduit à sa partie principale,* ne peut pas se mettre sous la forme $dX . f'(X)$, $f'(X)$ étant indépendant de $dx_0 : dx_1$, cette fonction n'a pas de dérivée.

244. Si maintenant, au lieu d'une quantité complexe ordinaire, X désigne un quaternion, la fonction $f(X)$ pouvant dépendre de paramètres qui seraient eux-mêmes des quaternions, alors la *partie principale* de la fonction $f(X)$, correspondante à l'accroissement infiniment petit

$$dX = dx_0 + \iota_1 dx_1 + \iota_2 dx_2 + \iota_3 dx_3$$

de la variable X, ne pourra, en général, se mettre sous la

forme $dX.f'(X)$, à cause de la non-commutativité de la multiplication.

245. C'est ce qu'on peut voir sur un exemple très simple. Soit la fonction

$$f(X) = X^2.$$

Nous aurons

$$f(X + dX) = (X + dX)^2 = X^2 + X.dX + dX.X + dX^2,$$

d'où, en négligeant l'infiniment petit du second ordre dX^2,

$$df(X) = XdX + dX.X.$$

Si l'on voulait mettre cette expression sous la forme $dX.f'(X)$, il faudrait déterminer une quantité W telle que l'on eût

$$X.dX = dX.W,$$

ce qui donnerait

$$W = dX^{-1}.X.dX.$$

Si l'on suppose, par exemple, que X et dX soient des vecteurs, et que l'on désigne par Ξ l'axe unitaire du vecteur infiniment petit dX, on aura, le module de dX disparaissant,

$$W = \Xi^{-1}X\Xi,$$

expression qui, ainsi que nous l'avons vu (art. 201), représente un vecteur faisant avec X un angle double de celui que fait X avec l'axe Ξ, et qui, par suite, n'est pas indépendant du rapport des composantes de dX. Donc la fonction X^2 n'a pas de dérivée, à moins que X et dX ne soient deux quaternions coplanaires, ce qui comprend comme cas particulier le cas de dX réel.

246. Si l'on considère de même la fonction

$$f(X) = \frac{1}{X},$$

on aura

$$f(X+dX)-f(X)=\frac{1}{X+dX}-\frac{1}{X}$$

$$=\frac{1}{X+dX}\left[1-(X+dX).\frac{1}{X}\right]=-\frac{1}{X+dX}.dX.\frac{1}{X}$$

$$=-\left(\frac{1}{X+dX}.X\right).\frac{1}{X}.dX.\frac{1}{X}.$$

Or le facteur

$$\frac{1}{X+dX}.X=\frac{X}{X+dX}=\frac{X+dX-dX}{X+dX}=1-\frac{dX}{X+dX}$$

a pour limite l'unité. Donc on a, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$d.\frac{1}{X}=-\frac{1}{X}dX\frac{1}{X}.$$

expression qui ne se réduit à $-\frac{dX}{X^2}$ que si X et dX sont coplanaires, ou si dX est réel.

247. Cette absence de dérivée, dans le cas général d'une fonction de quaternions, tient, comme on le voit, à la non-commutativité de la multiplication par la différentielle dX, et elle cesserait si dX était réelle. C'est ce qui aura lieu, en particulier, dans le cas où la variable X, dont dépend le quaternion $f(X)$, sera une variable réelle (¹). Alors la différentielle $df(X)$ se ramènera à un seul terme de la forme $dXf'(X)$ ou $f'(X)dX$, et $f(X)$ aura pour dérivée le multiplicateur $f'(X)$.

248. On peut ramener à ce cas la recherche de la différentielle de $f(X)$ dans le cas où X et dX sont des quaternions quelconques. En effet, dans le cas des variables réelles ou complexes ordinaires, si l'on multiplie l'accroissement dX par une variable

---

(¹) Ou, plus généralement, une quantité complexe ordinaire.

réelle infiniment petite ε, indépendante de X, $df(X)$, réduite à sa partie principale, sera la limite pour $\varepsilon = 0$ du rapport

$$\frac{f(X+\varepsilon dX)-f(X)}{\varepsilon},$$

ou, ce qui est la même chose, la limite pour $\varepsilon = 0$ de la dérivée partielle $\frac{\partial f(X+\varepsilon dX)}{\partial \varepsilon}$.

Dans le cas où X et $f(X)$ sont des quaternions, ainsi que dX, la formule précédente ne cessera pas d'être vraie, et l'on pourra prendre pour définition de la différentielle $df(X)$, réduite à sa partie principale, l'expression

$$(1) \quad df(X) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{f(X+\varepsilon dX)-f(X)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{\partial f(X+\varepsilon dX)}{\partial \varepsilon}.$$

Ainsi l'on aura

$$d(X^2) = \lim \frac{(X+\varepsilon dX)^2 - X^2}{\varepsilon} = \lim (X.dX + dX.X + \varepsilon dX^2)$$
$$= X.dX + dX.X,$$

ou encore,

$$d(X^2) = \lim \frac{\partial.(X+\varepsilon dX)^2}{\partial \varepsilon} = \lim (X.dX + dX.X + 2\varepsilon dX^2)$$
$$= X.dX + dX.X,$$

comme nous l'avions déjà trouvé.

249. Si la différentielle dX se compose de plusieurs parties,

$$dX = d_1X + d_2X + \ldots,$$

la différentiation de $df(X)$ sera une opération distributive par rapport à ces parties. En effet, en ne considérant d'abord que deux parties, on a

$$\lim \frac{f(X+\varepsilon dX)-f(X)}{\varepsilon} = \lim \frac{(X+\varepsilon d_1X+\varepsilon d_2X)-f(X)}{\varepsilon}$$
$$= \lim \frac{f(X+\varepsilon d_1X)-f(X)}{\varepsilon} + \lim \frac{f(X+\varepsilon d_1X+\varepsilon d_2X)-f(X+\varepsilon d_1X)}{\varepsilon}$$
$$= d_1f(X) + \lim d_2f(X+\varepsilon d_1X) = d_1f(X) + d_2f(X),$$

en appelant $d_1 f(X)$, $d_2 f(X)$ les accroissements correspondants respectivement à $d_1 X$ et à $d_2 X$. On étendrait facilement le raisonnement au cas d'un nombre quelconque de parties.

De là on déduit, comme cas particulier, cette conséquence, que, si l'on multiplie dX par une constante réelle quelconque k, $df(X)$ se trouvera multiplié par la même constante k.

250. Considérons maintenant une fonction composée

$$Y = f(U, V, W, \ldots),$$

$U, V, W, \ldots$ étant des fonctions de X. La différentielle

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon} [f(U+\varepsilon dU, V+\varepsilon dV, \ldots) - f(U, V, \ldots)]$$

sera une fonction linéaire et homogène des quaternions dU, dV, ..., et distributive par rapport à chacun d'eux.

Ainsi, pour différentier une fonction composée, on différentiera la fonction par rapport à chacune des fonctions composantes, comme si elle était seule variable, et l'on fera la somme des résultats obtenus. La règle est ainsi la même que pour la différentiation des fonctions réelles, aux changements près qu'entraîne la non-commutativité de la multiplication.

251. *Exemples.* I. Soit la fonction

$$Y = (\mathfrak{T}\mathrm{x})^2 = -\mathrm{x}^2,$$

x désignant un vecteur. $\mathfrak{T}\mathrm{x}$ étant une quantité réelle, on aura

$$dY = 2\mathfrak{T}\mathrm{x}.d\mathfrak{T}\mathrm{x}.$$

On a, d'autre part, $d\mathrm{x}$ étant un vecteur,

$$d(\mathrm{x}^2) = \lim \frac{(\mathrm{x}+\varepsilon d\mathrm{x})^2 - \mathrm{x}^2}{\varepsilon} = \mathrm{x}.d\mathrm{x} + d\mathrm{x}.\mathrm{x}$$
$$= \mathrm{x}.d\mathrm{x} + \overline{\mathrm{x}.d\mathrm{x}} = 2.\mathfrak{S}(\mathrm{x}d\mathrm{x}).$$

Donc

$$\mathfrak{T}\mathrm{x}.d\mathfrak{T}\mathrm{x} = -\mathfrak{S}(\mathrm{x}d\mathrm{x}),$$

ou

$$d\mathfrak{T}\mathrm{x} = -\,\mathfrak{S}\,(\mathfrak{U}\mathrm{x}.d\mathrm{x}) = \mathfrak{S}\,\frac{d\mathrm{x}}{\mathfrak{U}\mathrm{x}},$$

ou encore

$$\frac{d\mathfrak{T}\mathrm{x}}{\mathfrak{T}\mathrm{x}} = \mathfrak{S}\,\frac{d\mathrm{x}}{\mathrm{x}}.$$

252. II. On a, x étant un vecteur quelconque,

$$\mathrm{x} = \mathfrak{T}\mathrm{x}.\mathfrak{U}\mathrm{x},$$

$\mathfrak{U}\mathrm{x}$ étant le verseur ou l'axe unitaire du vecteur. On en tire

$$d\mathrm{x} = d\mathfrak{T}.\mathfrak{U}\mathrm{x} + \mathfrak{T}\mathrm{x}.d\mathfrak{U}\mathrm{x},$$

d'où, en multipliant par $\frac{1}{\mathrm{x}} = \frac{1}{\mathfrak{T}\mathrm{x}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{U}\mathrm{x}}$, la multiplication par $\mathfrak{T}\mathrm{x}$ étant commutative,

$$\frac{d\mathrm{x}}{\mathrm{x}} = \frac{d\mathfrak{T}\mathrm{x}}{\mathfrak{T}\mathrm{x}} + \frac{d\mathfrak{U}\mathrm{x}}{\mathfrak{U}\mathrm{x}} = \mathfrak{S}\,\frac{d\mathrm{x}}{\mathrm{x}} + \frac{d\mathfrak{U}\mathrm{x}}{\mathfrak{U}\mathrm{x}}.$$

Donc

$$\frac{d\mathfrak{U}\mathrm{x}}{\mathfrak{U}\mathrm{x}} = \mathfrak{V}\,\frac{d\mathrm{x}}{\mathrm{x}} = \mathfrak{V}\,\frac{\mathrm{x}d\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2} = \frac{\mathfrak{V}\mathrm{x}d\mathrm{x}}{\mathrm{x}^2} = \text{etc.}$$

253. III. Considérons maintenant l'équation

$$(\mathfrak{T}X)^2 = X.\bar{X}.$$

On en tire

$$2\mathfrak{T}X.d\mathfrak{T}X = d(X.\bar{X}) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{(X+\varepsilon dX)(\bar{X}+\varepsilon \overline{dX}) - X.\bar{X}}{\varepsilon}$$
$$= \lim\,[dX(\bar{X}+\varepsilon\overline{dX}) + X.\overline{dX}]$$
$$= dX.\bar{X} + X.\overline{dX} = 2\mathfrak{S}(X.\overline{dX}) = 2\mathfrak{S}\,(\bar{X}.dX).$$

Donc, à cause de $\mathfrak{T}X = \mathfrak{T}\bar{X}$, et de $\mathfrak{U}\bar{X} = \mathfrak{U}\frac{1}{X} = \frac{1}{\mathfrak{U}X} = \mathrm{x}^{-\xi}$,

$$d\mathfrak{T}X = \mathfrak{S}\,(\mathfrak{U}\bar{X}.dX) = \mathfrak{S}\left(\mathfrak{U}\,\frac{1}{X}\cdot dX\right) = \mathfrak{S}\,(\mathrm{x}^{-\xi}.dX).$$

Si $\dot{X} = \mathrm{x}$ est un vecteur, alors $\bar{X} = \bar{\mathrm{x}} = -\mathrm{x}$, et l'on retrouve la formule de l'exemple I,

$$d\mathfrak{T}\mathrm{x} = -\mathfrak{S}(\mathfrak{U}\mathrm{x}.d\mathrm{x}).$$

On a encore $\mathfrak{U}\frac{1}{X} = \mathrm{x}^{-\xi} = \frac{1}{\mathrm{x}^{\xi}} = \mathfrak{U}\bar{X}$, d'où

$$\frac{d\mathfrak{T}X}{\mathfrak{T}X} = \mathfrak{S}\frac{dX}{X}.$$

D'ailleurs, en faisant $X = \mathfrak{T}X.\mathfrak{U}X$, on a

$$dX = \mathfrak{U}X.d\mathfrak{T}X + \mathfrak{T}X.d\mathfrak{U}X,$$

d'où

$$\frac{dX}{X} = \frac{d\mathfrak{T}X}{\mathfrak{T}X} + \frac{d\mathfrak{U}X}{\mathfrak{U}X},$$

et par suite, en mettant pour $\frac{d\mathfrak{T}X}{\mathfrak{T}X}$ sa valeur $\mathfrak{S}\frac{dX}{X}$,

$$\mathfrak{V}\frac{dX}{X} = \frac{d\mathfrak{U}X}{\mathfrak{U}X}.$$

254. IV. Soit

$$Y = X^2;$$

on a (art. 248)

$$dY = X.dX + dX.X = 2\mathfrak{S}(XdX) + 2\mathfrak{S}X.\mathfrak{V}dX + 2\mathfrak{S}dX.\mathfrak{V}X.$$

Si X est un vecteur x, x_0 et $\mathfrak{S}dX$ sont nuls, et l'on a

$$d(\mathrm{x}^2) = 2\mathfrak{S}(\mathrm{x}d\mathrm{x}).$$

comme dans l'exemple I.

255. V. Soit $Y = \sqrt{X}$. On a $X = Y^2$, d'où

$$dX = Y.dY + dY.Y.$$

En opérant par $Y\times$ et par $\times\,\bar{Y}$, il vient

$$Y.dX = Y^2.dY + Y.dY.Y,$$
$$dX.\bar{Y} = Y.dY.\bar{Y} + (\mathfrak{T}Y)^2.dY,$$

et, en ajoutant,

$$Y.dX + dX.\overline{Y} = [Y^2 + (\mathfrak{C}Y)^2 + 2\mathfrak{S}Y.Y]dY,$$

ce qui donne la valeur de

$$dY = d\sqrt{X}.$$

256. On a

$$X.X^{-1} = 1, \quad \text{d'où} \quad X.d(X^{-1}) + dX.X^{-1} = 0,$$

et par suite, en opérant par $X^{-1}\times$, on trouve (art. 246)

$$d\frac{1}{X} = -\frac{1}{X}.dX.\frac{1}{X}.$$

Si $X = \text{x}$ est un vecteur, alors

$$d\frac{1}{\text{x}} = -\frac{1}{\text{x}}.d\text{x}.\frac{1}{\text{x}} = \frac{1}{\text{x}^2}\,d\text{x} - \frac{1}{\text{x}}\frac{1}{\text{x}}\,d\text{x} - \frac{1}{\text{x}}.d\text{x}.\frac{1}{\text{x}}$$

$$= \frac{d\text{x}}{\text{x}^2} - \frac{1}{\text{x}}\left(\frac{1}{\text{x}}.d\text{x} + d\text{x}.\frac{1}{\text{x}}\right) = \frac{d\text{x}}{\text{x}^2} - \frac{1}{\text{x}}\left(\frac{d\text{x}}{\text{x}} + \mathfrak{C}\frac{d\text{x}}{\text{x}}\right)$$

$$= \frac{d\text{x}}{\text{x}^2} - \frac{2}{\text{x}}.\mathfrak{S}\frac{d\text{x}}{\text{x}} = \frac{1}{\text{x}}\left(\frac{d\text{x}}{\text{x}} - 2\mathfrak{S}\frac{d\text{x}}{\text{x}}\right) = -\frac{1}{\text{x}}\mathfrak{C}\frac{d\text{x}}{\text{x}}.$$

257. VII. De $X = x_0 + x_i$ on tire

$$dX = dx_0 + dx_i.$$

Donc

$$\mathfrak{S}dX = dx_0 = d\mathfrak{S}X, \quad \mathfrak{V}dX = dx_i = d\mathfrak{V}X,$$

de sorte que le signe d est commutatif avec les signes $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{V}$.

Puisque $\overline{X} = x_0 - x_i$, on aura donc

$$d\overline{X} = d\mathfrak{C}X = dx_0 - dx_i = \mathfrak{S}dX - \mathfrak{V}dX = \mathfrak{C}dX.$$

Les signes d et $\mathfrak{C}$ sont donc aussi commutatifs

258. La différentiation successive ne présente aucune nouvelle difficulté. Ainsi, en différentiant de nouveau l'expression

$$d(X^2) = X.dX + dX.X,$$

on trouve

$$d^2(X^2) = X.d^2X + 2(dX)^2 + d^2X.X,$$

et de même pour les différentielles des ordres suivants.

Si X est un vecteur x, on a (art. 251)

$$d(\mathrm{x}^2) = 2\mathfrak{S}(\mathrm{x}d\mathrm{x}),$$

d'où

$$d^2(\mathrm{x}^2) = 2(d\mathrm{x})^2 + 2\mathfrak{S}(\mathrm{x}d^2\mathrm{x}).$$

De même, X étant le verseur ou l'axe unitaire de x, on a (art. 252)

$$d^2\mathfrak{U}\mathrm{x} = d^2X = -d\frac{X.\mathfrak{V}(\mathrm{x}d\mathrm{x})}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2}.$$

Or (art. 253)

$$d\frac{1}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2} = -\frac{2d\mathfrak{T}\mathrm{x}}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^3} = \frac{2\mathfrak{S}(\mathrm{x}d\mathrm{x})}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^4},$$

$$d.\mathfrak{V}(\mathrm{x}d\mathrm{x}) = \mathfrak{V}.d(\mathrm{x}d\mathrm{x}) = \mathfrak{V}(d\mathrm{x}^2 + \mathrm{x}.d^2\mathrm{x}) = \mathfrak{V}(\mathrm{x}.d^2\mathrm{x}).$$

Donc

$$-d^2\mathfrak{U}\mathrm{x} = \frac{2\mathfrak{S}(\mathrm{x}d\mathrm{x})}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^4}.X.\mathfrak{V}(\mathrm{x}d\mathrm{x}) + \frac{1}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2}\cdot\frac{X}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2}(\mathfrak{V}.\mathrm{x}d\mathrm{x})^2 + \frac{X}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2}\mathfrak{V}(\mathrm{x}d^2\mathrm{x})$$

$$= \frac{\mathfrak{U}\mathrm{x}}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^4}\left[(\mathfrak{V}.\mathrm{x}d\mathrm{x})^2 + 2\mathfrak{S}(\mathrm{x}d\mathrm{x}).\mathfrak{V}(\mathrm{x}d\mathrm{x}) - \mathrm{x}^2.\mathfrak{V}(\mathrm{x}d^2\mathrm{x})\right].$$

259. Donnons ici la définition de l'opérateur que Hamilton a désigné par le symbole

$$\nabla = \mathrm{i}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathrm{i}_3\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Soit F (x) une fonction *réelle* du vecteur

$$\mathrm{x} = \mathrm{i}_1x_1 + \mathrm{i}_2x_2 + \mathrm{i}_3x_3,$$

et par suite une fonction réelle des composantes x_1, x_2, x_3. On aura, d'après cela

$$\nabla\,\mathrm{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{i}_1\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x_1} + \mathrm{i}_2\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x_2} + \mathrm{i}_3\frac{\partial\mathrm{F}}{\partial x_3}.$$

Or on a

$$d\mathrm{x} = \mathrm{I}_1 dx_1 + \mathrm{I}_2 dx_2 + \mathrm{I}_3 dx_3,$$

d'où, dF (x) devant être une quantité réelle, comme F (x),

$$\begin{aligned} d\mathrm{F}(\mathrm{x}) &= \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_3} dx_3 \\ &= -\mathfrak{S}\left[\left(\mathrm{I}_1 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1} + \mathrm{I}_2 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2} + \mathrm{I}_3 \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_3}\right)(\mathrm{I}_1 dx_1 + \mathrm{I}_2 dx_2 + \mathrm{I}_3 dx_3)\right] \\ &= -\mathfrak{S}(\nabla \mathrm{F}(\mathrm{x}).d\mathrm{x}). \end{aligned}$$

Si l'on considère la surface représentée par l'équation

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}) = C,$$

C étant une constante, on aura alors $d\mathrm{F}(\mathrm{x}) = 0$, et par suite

$$\mathfrak{S}[\nabla \mathrm{F}(\mathrm{x}).d\mathrm{x}] = 0.$$

L'expression $\nabla \mathrm{F}(\mathrm{x})$ représente évidemment un vecteur, que nous désignerons par N, et qui est perpendiculaire au vecteur $d\mathrm{x}$, et par suite normal à la surface $\mathrm{F}(\mathrm{x}) = C$.

§ II.

Différentiation des fonctions implicites.

260. Soit Y une fonction implicite du quaternion X, donnée par l'équation non résolue

$$\mathrm{F}(X, Y) = 0.$$

On se propose de trouver la différentielle dY en fonction de X, Y, dX.

Pour cela, on différentiera F (X, Y) par la règle de la différentiation des fonctions composées. La différentielle $dF(X, Y)$ sera une fonction linéaire et homogène des différentielles dX et dY, et par suite $d\mathrm{F} = 0$ sera une équation du premier degré en dY, que l'on résoudra par les méthodes exposées dans le Chapitre précédent.

Supposons que l'on demande, par exemple, de trouver la différentielle de $Y = \sqrt[3]{X}$. Cette quantité est déterminée par l'équation

$$Y^3 = X,$$

qui donne, en différentiant,

$$Y^2.dY + Y.dY.Y + dY.Y^2 = dX.$$

Opérons à la fois par $Y\times$ et par $\times Y^{-1}$, ce qui donne

$$Y^3.dY.Y^{-1} + Y^2.dY + Y.dY.Y = Y.dX.Y^{-1},$$

et retranchons cette équation de la précédente; il viendra

$$dY.Y^2 - Y^3.dY.Y^{-1} = dX - Y.dX.Y^{-1},$$

équation en dY, de même forme que celle que nous avons traitée dans l'art. 210.

On pourrait obtenir de la même manière la différentielle d'une racine de degré quelconque d'un quaternion.

CHAPITRE IX.

APPLICATION DU CALCUL DES QUATERNIONS A LA TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE

---

§ Ier.

Démonstration des formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique.

261. Soient ABC un triangle sphérique, A'B'C' son triangle polaire, ayant pour sommets les pôles *(positifs)* des côtés BC, CA, AB. Réciproquement, ABC sera le triangle polaire de A'B'C'. Chaque côté de l'un de ces triangles sera égal à l'angle ***extérieur*** correspondant de l'autre triangle, ces angles ***extérieurs*** étant les suppléments des angles intérieurs adjacents, et étant formés par les prolongements des côtés ***dans le sens direct.***

Les côtés BC, CA, AB, considérés en grandeur et en direction, représentent des biradiales unitaires A, B, C, formées par les vecteurs $OA = \text{A}$, $OB = \text{B}$, $OC = \text{C}$, pris deux à deux, et ayant pour axes les vecteurs A', B', C' des sommets du triangle polaire, et pour arguments les grandeurs α, β, γ de ces mêmes côtés, ou les angles extérieurs du triangle polaire A'B'C', de sorte que ces biradiales pourront être désignées (art. 175) par

$$\text{A}'^{\alpha}, \quad \text{B}'^{\beta}, \quad \text{C}'^{\gamma}.$$

De même, les côtés B'C', C'A', A'B' du triangle polaire seront des biradiales A', B', C', ayant pour axes $\text{A}, \text{B}, \text{C}$, et pour argu-

ments les grandeurs α', β', γ' des côtés de A'B'C' ou des angles extérieurs de ABC, et l'on pourra les désigner par

$$\mathrm{A}^{\alpha'}, \quad \mathrm{B}^{\beta'}, \quad \mathrm{C}^{\gamma'}.$$

262. La biradiale A'^{α} étant formée par les vecteurs B et C, a pour valeur $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}} = -\mathrm{BC}$, et de même pour les autres, ce qui donne les équations

$$(1)\quad \begin{cases} A = \cos\alpha + \mathrm{A}'\sin\alpha = -\mathrm{BC}, \\ B = \cos\beta + \mathrm{B}'\sin\beta = -\mathrm{CA}, \\ C = \cos\gamma + \mathrm{C}'\sin\gamma = -\mathrm{AB}; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} A' = \cos\alpha' + \mathrm{A}\sin\alpha' = -\mathrm{B'C'}, \\ B' = \cos\beta' + \mathrm{B}\sin\beta' = -\mathrm{C'A'}, \\ C' = \cos\gamma' + \mathrm{C}\sin\gamma' = -\mathrm{A'B'}. \end{cases}$$

En opérant sur l'équation $A = -\mathrm{BC}$ soit par $\mathrm{B}\times$, soit par $\times\,\mathrm{C}$, on en tire les deux relations

$$\mathrm{B}A = \mathrm{C}, \quad A\mathrm{C} = \mathrm{B}.$$

En y permutant circulairement les lettres, et formant les relations analogues pour le triangle polaire, on aura les formules

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = \mathrm{C}B = C\mathrm{B}, \\ \mathrm{B} = \mathrm{A}C = A\mathrm{C}, \\ \mathrm{C} = \mathrm{B}A = B\mathrm{A}; \end{cases} \qquad (4)\quad \begin{cases} \mathrm{A}' = \mathrm{C}'B' = C'\mathrm{B}', \\ \mathrm{B}' = \mathrm{A}'C' = A'\mathrm{C}', \\ \mathrm{C}' = \mathrm{B}'A' = B'\mathrm{A}. \end{cases}$$

Substituant pour A, B, ... leurs valeurs

$$\mathrm{A}'^{\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{A}'\sin\alpha, \text{ etc.},$$

ces formules deviennent

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{A} = \mathrm{C}\cos\beta + \mathrm{CB}'\sin\beta = \mathrm{B}\cos\gamma + \mathrm{C'B}\sin\gamma, \\ \mathrm{B} = \mathrm{A}\cos\gamma + \mathrm{AC}'\sin\gamma = \mathrm{C}\cos\alpha + \mathrm{A'C}\sin\alpha, \\ \mathrm{C} = \mathrm{B}\cos\alpha + \mathrm{BA}'\sin\alpha = \mathrm{A}\cos\beta + \mathrm{B'A}\sin\beta; \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} \text{A}' = \text{C}'\cos\beta' + \text{C}'\text{B}\sin\beta' = \text{B}'\cos\gamma' + \text{CB}'\sin\gamma', \\ \text{B}' = \text{A}'\cos\gamma' + \text{A}'\text{C}\sin\gamma' = \text{C}'\cos\alpha' + \text{AC}'\sin\alpha', \\ \text{C}' = \text{B}'\cos\alpha' + \text{B}'\text{A}\sin\alpha' = \text{A}'\cos\beta' + \text{BA}'\sin\beta'. \end{cases}$$

263. Multiplions entre elles les deux dernières équations (1) ; nous aurons (*voir* art. 189)

$$\text{CA}^2\text{B} = -\text{CB} = -\mathfrak{C}\,\text{BC} = \overline{A} = \cos\alpha - \text{A}'\sin\alpha = BC.$$

Opérant par $\mathfrak{S}$ sur cette égalité, il vient

$$A_0 = \mathfrak{S}BC = B_0C_0 + \mathfrak{S}B_iC_i,$$

c'est-à-dire, à cause de $\mathfrak{S}\text{B}'\text{C}' = -\mathfrak{S}A' = -\cos\alpha'$,

$$(7)\qquad \cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha',$$

première formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique.

Si l'on opère maintenant par $\mathfrak{V}$, on aura

$$-A_i = \mathfrak{V}BC = B_0C_i + C_0B_i + \mathfrak{V}B_iC_i,$$

ou, à cause de $\mathfrak{V}\text{B}'\text{C}' = -\mathfrak{V}A' = -\text{A}\sin\alpha'$,

$$(8)\quad -\text{A}'\sin\alpha = \text{C}'\cos\beta\sin\gamma + \text{B}'\sin\beta\cos\gamma - \text{A}\sin\beta\sin\gamma\sin\alpha'.$$

En opérant sur l'équation (8) tour à tour par $\mathfrak{S}\text{B}'\times$ et par $\mathfrak{V}\text{B}'\times$, on trouve, à cause de $\text{B}'\text{A}' = -\overline{C}'$, de $\text{B}'\text{C}' = -A'$, et de la dernière équation (5),

$$C_0'\sin\alpha = -A_0'\cos\beta\sin\gamma - \sin\beta\cos\gamma,$$
$$-C_i'\sin\alpha = -A_i'\cos\beta\sin\gamma + (\text{C} - \text{A}\cos\beta)\sin\gamma\sin\alpha',$$

c'est-à-dire, en effaçant dans la dernière les termes qui se détruisent, et divisant par C,

$$(9)\qquad \sin\alpha\cos\gamma' = -\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma\sin\alpha',$$
$$(10)\qquad \sin\alpha\sin\gamma' = \sin\gamma\sin\alpha'.$$

L'équation (10) est la deuxième formule fondamentale.

Des formules (9) et (10) on tire, en éliminant par division $\sin\alpha$,

(11) $$\sin\alpha' \cot\gamma' + \sin\beta \cot\gamma + \cos\beta \cos\alpha' = 0,$$

troisième formule fondamentale.

Des formules (7), (10) et (11) on en déduit d'autres par la permutation circulaire des lettres et par l'échange mutuel des lettres accentuées avec les lettres sans accent.

264. Les trois biradiales A, B, C formant un angle trièdre fermé, on a (art. 189)

$$ABC = 1, \quad \text{d'où} \quad A = \bar{C}\bar{B},$$

équation qui fait connaître directement une de ces biradiales, quand on connaît les deux autres.

Soient donnés, par exemple, les deux biradiales

$$B = \frac{1}{\sqrt{14}}(3 + 2\text{i}_1 - \text{i}_2), \qquad C = \frac{1}{\sqrt{6}}(2 + \text{i}_1 - \text{i}_3),$$

d'où

$$\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}}, \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \sin\gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}},$$

les vecteurs unitaires B', C' ayant pour expressions

$$\text{B}' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\text{i}_1 - \text{i}_2), \quad \text{C}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{i}_1 - \text{i}_3).$$

On a, en effectuant la multiplication,

$$A = \frac{2 - \text{i}_1 + \text{i}_3}{\sqrt{6}} \cdot \frac{3 - 2\text{i}_1 + \text{i}_2}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2 - 3\text{i}_1 + 2\text{i}_2 + 2\text{i}_3),$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}, \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{21}}, \quad \text{A}' = \frac{1}{\sqrt{17}}(-3\text{i}_1 + 2\text{i}_2 + 2\text{i}_3).$$

On trouve ensuite

1° $$A' = -\text{B}'\text{C}' = \frac{1}{\sqrt{10}}(2 + \text{i}_1 + 2\text{i}_2 + \text{i}_3).$$

d'où

$$\cos\alpha' = \frac{2}{\sqrt{10}}, \quad \sin\alpha' = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}, \quad \mathrm{A} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3);$$

2° $$B' = -\mathrm{C}'\mathrm{A}' = \frac{1}{\sqrt{34}}(-5 + 2\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + 2\mathrm{I}_3),$$

d'où

$$\cos\beta' = \frac{-5}{\sqrt{34}}, \quad \sin\beta' = \frac{3}{\sqrt{34}}, \quad \mathrm{B} = \tfrac{1}{3}(2\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + 2\mathrm{I}_3);$$

3° $$C' = -\mathrm{A}'\mathrm{B}' = \frac{1}{\sqrt{85}}(-8 + 2\mathrm{I}_1 + 4\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_3),$$

d'où

$$\cos\gamma' = \frac{-8}{\sqrt{85}}, \quad \sin\gamma' = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{85}}, \quad \mathrm{C} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2\mathrm{I}_1 + 4\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_3).$$

Ainsi, connaissant les deux côtés AB, AC du triangle ABC de grandeur et de position, nous en avons déduit tous les éléments du triangle et de son triangle polaire, et les vecteurs qui fixent la position des sommets de ces deux triangles par rapport aux axes OI_1, OI_2, OI_3.

265. *Autre exemple.* On donne les trois côtés

$$\alpha = 1^q{,}26, \quad \beta = 1^q{,}39, \quad \gamma = 1^q{,}17,$$

et l'on propose de résoudre le triangle. Fixons les positions arbitraires des trois axes rectangulaires OI_1, OI_2, OI_3, de manière que l'axe OI_1 passe par le sommet B, d'où

$$\mathrm{B} = \mathrm{I}_1,$$

et que l'axe OI_3 soit perpendiculaire au plan BOC de la biradiale A d'argument α, ce qui donne

$$\mathrm{A}' = \mathrm{I}_3.$$

On aura donc, en multipliant, pour simplifier l'écriture, tous les nombres par 1000, et bornant les calculs à 3 figures,

à l'aide de la Table de multiplication de Crelle,

$$A = -397 + 918\,\text{I}_3,$$
$$B = -575 + 818\,\text{B}',$$
$$C = -254 + 962\,\text{C}'.$$

On a, par les formules (3) et (4),

$$\text{C} = \text{B}\,A = \text{I}_1(\cos\alpha + \text{I}_3 \sin\alpha) = -397\,\text{I}_1 + 918\,\text{I}_2,$$
$$\text{C}' = B'\text{A}' = (\cos\beta' + \text{I}_1 \sin\beta')\,\text{I}_3 = \text{I}_2 \sin\beta' + \text{I}_3 \cos\beta',$$
$$\text{A} = C\,\text{B} = (-264 + 962\,\text{C}')\,\text{I}_1$$
$$= -264\,\text{I}_1 + 962(-\text{I}_2 \cos\beta' + \text{I}_3 \sin\beta').$$
$$\text{B}' = \text{A}'C' = \text{I}_3(\cos\gamma' + \text{C} \sin\gamma')$$
$$= 918\,\text{I}_1 \sin\gamma' + 397\,\text{I}_2 \sin\gamma' + \text{I}_3 \cos\gamma',$$
$$\text{A} = \text{C}\,B = (-397\,\text{I}_1 + 918\,\text{I}_2)(-575 + 818\,\text{B}')$$
$$= (228 - 751 \cos\gamma')\,\text{I}_1 - (528 + 325 \cos\gamma')\,\text{I}_2 - 818 \sin\gamma' . \text{I}_3 .$$

Identifiant entre elles les deux expressions de A, on a les équations

$$-264 = 228 - 751 \cos\gamma',$$
$$-962 \cos\beta' = -528 - 325 \cos\gamma',$$
$$962 \sin\beta' = 818 \sin\gamma',$$

d'où l'on tire

$$\cos\gamma' = 0{,}655, \qquad \gamma' = 0^q{,}545,$$
$$\tan\beta' = 0{,}834, \qquad \beta' = 0^q{,}442.$$

Enfin, on a

$$A' = -\text{B}'\text{C}' = -\text{A}'C'.\text{C}' = -\text{I}_3(\cos\gamma' + \text{C}\sin\gamma')\,\text{C}'$$
$$= -(693\,\text{I}_1 + 300\,\text{I}_2 + 655\,\text{I}_3)(640\,\text{I}_2 + 769\,\text{I}_3)$$
$$= 696 - 188\,\text{I}_1 - 532\,\text{I}_2 + 444\,\text{I}_3,$$

d'où

$$\cos\alpha' = 0{,}696, \qquad \sin\alpha' = 0{,}718, \qquad \alpha' = 0^q{,}510.$$

En appliquant les mêmes calculs à un triangle quelconque, donné par ses trois côtés α, β, γ, on retrouverait les formules générales que nous avons obtenues d'une manière un peu différente dans l'art. 263.

§ II.

Questions diverses relatives aux triangles sphériques.

266. Nous avons vu (art. 156) que les produits

(1) $$AB = C, \qquad BA = D,$$

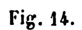
que l'on peut former avec deux biradiales données LOM $= A$ $=$ MOL', MON $= B =$ N'OM (*fig.* 14), en changeant l'ordre des facteurs, sont deux biradiales LON, N'OL', de même module $\mathfrak{T}A\,.\,\mathfrak{T}B$, et d'arguments égaux en grandeur, mais non en position, puisque leurs plans sont différents. Les plans de ces biradiales forment des angles égaux avec ceux des biradiales données,

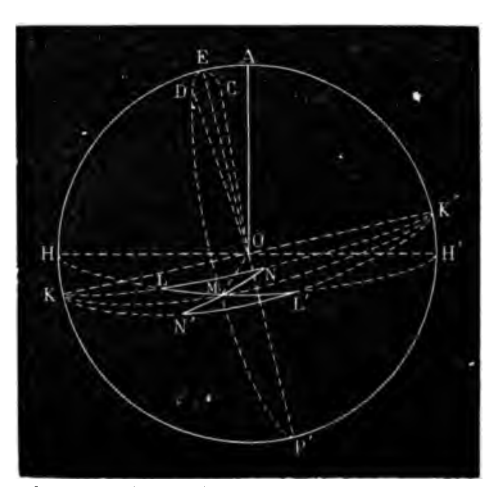
$$\text{MLN} = \text{ML'N'}, \qquad \text{MNL} = \text{MN'L'},$$

et par suite les vecteurs C_i, D_i font des angles égaux tant avec le vecteur A_i qu'avec le vecteur B_i.

De plus, le vecteur OM, intersection des plans de A et de B, est perpendiculaire aux deux axes A_i, B_i, et intermédiaire entre les axes C_i, $\overline{D}_i$ des biradiales LON $= C$, L'ON' $= \overline{D}$, et il formera avec ces derniers axes des angles égaux.

Si donc on mène par OM un plan Π perpendiculaire à l'intersection KK' des plans LON, N'OL', et par suite aussi au plan bissecteur KMK', ce plan Π contiendra les axes OC, OD, OE de ces trois plans, et l'axe OE sera bissecteur de l'angle des deux autres.


Fig. 14.



267. Ce théorème peut se démontrer par le calcul. Supposons, pour plus de simplicité, les modules réduits à l'unité, et soit

$$\mathrm{AB} = \cos\mu + \mathrm{M}\sin\mu$$

le produit des axes A, B des biradiales unitaires A et B, l'axe M étant perpendiculaire à chacun des axes A et B.

En intervertissant l'ordre des facteurs, on aura (art. 159)

$$\mathrm{BA} = \overline{\mathrm{AB}} = \cos\mu - \mathrm{M}\sin\mu.$$

Or on a

$$\begin{aligned} AB &= (\cos\alpha + \mathrm{A}\sin\alpha)(\cos\beta + \mathrm{B}\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \mathrm{A}\sin\alpha\cos\beta + \mathrm{B}\cos\alpha\sin\beta + \mathrm{AB}\sin\alpha\sin\beta, \\ BA &= \cos\alpha\cos\beta + \mathrm{A}\sin\alpha\cos\beta + \mathrm{B}\cos\alpha\sin\beta + \mathrm{BA}\sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}$$

En mettant pour AB sa valeur, il vient

$$\begin{aligned} AB = C = \cos\alpha\cos\beta + \mathrm{A}\sin\alpha\cos\beta + \mathrm{B}\cos\alpha\sin\mathrm{B} \\ + \sin\alpha\sin\beta\cos\mu + \mathrm{M}\sin\alpha\sin\beta\sin\mu. \end{aligned}$$

Le produit $BA = D$ ne diffèrera de C que par le changement de signe du terme multiplié par M. On a donc, en faisant

$$C = \cos\gamma + \mathrm{C}\sin\gamma, \qquad D = \cos\delta + \mathrm{D}\sin\delta,$$

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\mu = \cos\delta, \tag{2}$$

d'où $\gamma = \delta$, c'est-à-dire arc LM = arc N'L'.

On trouve ensuite

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{C}\sin\gamma &= \mathrm{A}\sin\alpha\cos\beta + \mathrm{B}\cos\alpha\sin\beta + \mathrm{M}\sin\alpha\sin\beta\sin\mu, \\ \mathrm{D}\sin\delta &= \mathrm{A}\sin\alpha\cos\beta + \mathrm{B}\cos\alpha\sin\beta - \mathrm{M}\sin\alpha\sin\beta\sin\mu. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Divisant les deux seconds membres par A, les parties réelles seront, de part et d'autre,

$$\sin\alpha\cos\beta + \mathfrak{S}\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\cos\alpha\sin\beta,$$

puisque $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}$ est une biradiale rectangle, dont la partie réelle est

nulle. Donc, à cause de $\gamma = \delta$, les cosinus des arguments des biradiales $\frac{\text{C}}{\text{A}}$, $\frac{\text{D}}{\text{A}}$ sont égaux.

En divisant par M, on voit de même que les deux biradiales $\frac{\text{C}}{\text{M}}$, $-\frac{\text{D}}{\text{M}}$ ont la même partie réelle $\frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\mu}{\sin\gamma}$, et ne diffèrent que par le signe de leurs vecteurs. Donc

$$-\frac{\text{D}}{\text{M}} = \mathfrak{C}\,\frac{\text{C}}{\text{M}}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad -\frac{\text{D}}{\text{M}} = \frac{\text{M}}{\text{C}}.$$

268. Si l'une A des deux biradiales A, B est rectangle et se réduit à son vecteur A, nous aurons ce corollaire :

Soit LM = LM' = un quadrant; L et L' se confondront avec les extrémités H, H' du diamètre perpendiculaire à OM, et, par suite, l'intersection des plans OLN, OL'N' se confondra avec HH_1. Le plan bissecteur KMK_1 deviendra le plan HLML'H'; son pôle E viendra en A, pôle de HMH'. Donc, si l'on considère les produits

$$\text{A}.\frac{\text{N}}{\text{M}}, \quad \frac{\text{N}}{\text{M}}.\text{A}$$

d'une biradiale et d'un vecteur, où les facteurs sont pris dans un ordre différent, le vecteur A sera la bissectrice de l'angle des axes des deux biradiales HON, N'OH'. On en conclut que les axes des biradiales

$$(4) \qquad \text{A}B = C, \qquad B\text{A} = D$$

forment avec A des angles égaux de grandeur et de position.

En employant la transformation de l'art. 188, la seconde équation (4) donne

$$D\text{A} = -B, \quad \text{A} = -\bar{D}B, \quad \text{A}\bar{B} = -\bar{D}.$$

Or il est clair que l'axe de la biradiale D est le même que l'axe de sa conjuguée prise négativement $-\bar{D}$. Donc les axes des biradiales AB et A$\bar{B}$ font des angles égaux avec le vecteur A.

C'est ce qui résulte encore des calculs de l'art. 267. En faisant, dans (2) et (3), $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\frac{\text{C}\sin\gamma}{\text{A}} = \cos\beta + \frac{\text{M}}{\text{A}}\sin\beta\sin\mu, \qquad \frac{\text{D}\sin\gamma}{\text{A}} = \cos\beta - \frac{\text{M}}{\text{A}}\sin\beta\sin\mu,$$

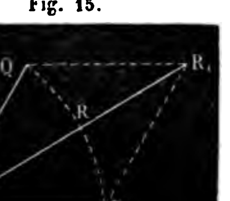
de sorte que $\frac{\text{C}}{\text{A}}$ et $\frac{\text{D}}{\text{A}}$ sont deux biradiales conjuguées. Donc

$$\frac{\text{C}}{\text{A}} = \frac{\text{A}}{\text{D}},$$

le vecteur D étant l'axe de $-\overline{D}$.

269. Soient OP, OQ deux vecteurs unitaires, et $\text{OR}_1 = \text{OP} + \text{OQ}$ leur somme. Si l'on prend $\mathfrak{T}\text{OR} = \mathfrak{T}\text{OP} = \mathfrak{T}\text{OQ} = 1$, on aura

Fig. 15.



$$\text{OR} = \frac{\text{OR}_1}{\mathfrak{T}\text{OR}_1} = \frac{\text{OP}+\text{OQ}}{\mathfrak{T}(\text{OP}+\text{OQ})}$$

pour le vecteur unitaire bissecteur de la biradiale.

D'après cela, si ABC est un triangle sphérique, les milieux L, M, N des côtés BC, CA, AB seront donnés par les formules

$$\text{L} = \frac{\text{B}+\text{C}}{\mathfrak{T}(\text{B}+\text{C})}, \quad \text{M} = \frac{\text{C}+\text{A}}{\mathfrak{T}(\text{C}+\text{A})}, \quad \text{N} = \frac{\text{A}+\text{B}}{\mathfrak{T}(\text{A}+\text{B})}.$$

L'égalité des biradiales BOL, LOC donne

$$\frac{\text{C}}{\text{L}} = \frac{\text{L}}{\text{B}},$$

et de même

$$\frac{\text{A}}{\text{M}} = \frac{\text{M}}{\text{C}}, \quad \frac{\text{B}}{\text{N}} = \frac{\text{N}}{\text{A}}.$$

Les biradiales BOL, LOC ayant pour angle commun $\frac{\alpha}{2}$ et pour axe commun A′, on aura donc

$$\frac{\text{C}}{\text{L}} = \frac{\text{L}}{\text{B}} = \cos\frac{\alpha}{2} + \text{A}'\sin\frac{\alpha}{2},$$

avec deux autres formules semblables.

270. Réciproquement, proposons-nous, étant donnés les milieux L, M, N des côtés d'un triangle sphérique, de déterminer le triangle.

Les axes des biradiales exprimées par les produits $L\cdot\frac{M}{N}$ et $\frac{N}{M}\cdot L$ forment un angle qui a pour bissectrice le vecteur OL. De même, les axes des biradiales $M\cdot\frac{L}{N}$ et $\frac{L}{N}\cdot M$ ont pour bissectrice OM, et les axes des biradiales $N\cdot\frac{M}{L}$ et $\frac{M}{L}\cdot N$ ont pour bissectrice ON.

Or, en remarquant que $L\cdot\frac{M}{N}$ et $\frac{N}{M}\cdot L$ ont des arguments de même grandeur, ainsi que $\frac{M}{L}\cdot N = L\cdot\frac{N}{M}$ et $N\cdot\frac{M}{L}$, et désignant par φ la grandeur de cet argument commun, et par B, C, A les axes des diverses biradiales, on a

$$L\cdot\frac{N}{M} = -LMN = \frac{M}{L}\cdot N = \cos\varphi + B\sin\varphi,$$

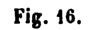
$$M\cdot\frac{L}{N} = -MNL = \frac{N}{M}\cdot L = \cos\varphi + C\sin\varphi,$$

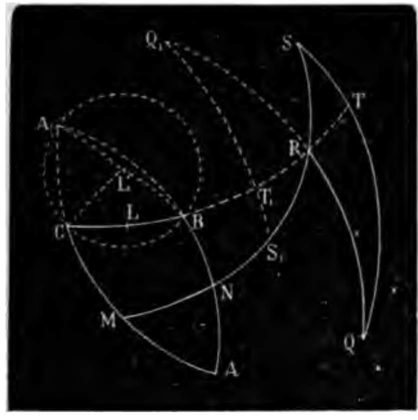
$$N\cdot\frac{M}{L} = -NLM = \frac{L}{N}\cdot M = \cos\varphi + A\sin\varphi.$$

Il résulte, de ces égalités et de ce que nous avons rappelé tout à l'heure, que L, M, N sont respectivement les milieux des arcs BC, CA, AB, et, par suite, ABC est le triangle cherché, et le problème est analytiquement résolu.

Pour construire ces formules, soit R (*fig.* 16), l'intersection du cercle MN avec le grand cercle dont le pôle est en L, et soit $RQ = \frac{\pi}{2}$. Prenons, sur le prolongement de MN, $RS = MN$; alors $QOS = L\cdot\frac{N}{M} = \cos\varphi + B\sin\varphi$, B étant l'axe du plan OQS. Or, $LQ = \frac{\pi}{2} = LR$; donc Q est le pôle de LR, et par suite OQS est perpendiculaire à OLRT. On obtient donc B en prenant $TB = \frac{\pi}{2}$.

On obtiendra de même A et C. Ainsi, on aura C, pôle de $\frac{N}{M}L$, en prenant $S_1R = MN$, $RQ_1 = \frac{\pi}{2}$, et portant $T_1C = \frac{\pi}{2}$ à partir de la rencontre de S_1Q_1 avec LR. Cela revient (art. 266) à faire LC $=$ BL.


Fig. 16.



271. Soit L' le pôle de MN. Les angles QBR, SBL' seront droits, B et L' étant les pôles de QS et de MNRS, et par suite S le pôle de L'B. Donc

$$QS = \varphi = QBS = QBS + SBL' - QBR$$
$$= QBL' - QBR = RBL' = \pi - L'BC.$$

Les arcs CA, AB étant partagés en leurs milieux par l'arc MN, de pôle L', A, B, C seront équidistants du plan OMN. Donc, si A_1 est le point diamétralement opposé à A, le petit cercle A_1BC aura son plan parallèle à MNR, et par suite aura même pôle L' que MNR. Donc les triangles L'BC, $L'CA_1$, $L'A_1B$ seront isoscèles. Or on a

$$\pi = ABC + CBL' + L'BA_1,$$
$$\pi = BCA + BCL' + L'CA_1,$$

d'où

$$2\pi = ABC + BCA + 2CBL' + CA_1B,$$
$$BAC + CBA + ACB = 2\pi - 2CBL' = 2\varphi.$$

Donc l'angle φ, qui est l'argument du produit — LMN des trois rayons bissecteurs des côtés du triangle sphérique ABC, est égal à la demi-somme des angles du triangle, de sorte que $\varphi - \frac{\pi}{2}$ représente le demi-excès sphérique.

On pourrait prendre aussi pour φ l'argument de l'un des deux autres produits $-\mathrm{MNL}$, $-\mathrm{NLM}$.

272. L'égalité

$$-\mathrm{LMN} = \cos\varphi + \mathrm{B}\sin\varphi = \mathrm{B}^{\frac{2}{\pi}\varphi},$$

multipliée par $\frac{1}{\mathrm{B}}$, donne

$$\mathrm{BLMN} = \mathrm{B}^{\frac{2}{\pi}\varphi - 1} = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{B}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Or $\varphi - \frac{\pi}{2}$ est le demi-excès sphérique, ou la moitié de l'aire du triangle ABC, le triangle trirectangle étant pris pour unité. Donc

$$\mathrm{BLMN} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{B}} \cdot \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{B}} \cdot \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \cdot \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}} = \sqrt{\mathrm{BOC}} \,.\, \sqrt{\mathrm{COA}} \,.\, \sqrt{\mathrm{AOB}}.$$

Par conséquent, l'*aire d'un triangle sphérique est donnée par l'argument du quaternion qui a pour valeur le produit des racines carrées des trois côtés, comptés dans l'ordre direct.*

Exemple. Soient donnés les trois sommets (art. 265)

$$\mathrm{A} = -264\,\mathrm{I}_1 - 739\,\mathrm{I}_2 + 616\,\mathrm{I}_3,$$
$$\mathrm{B} = 1000\,\mathrm{I}_1,$$
$$\mathrm{C} = -397\,\mathrm{I}_1 + 918\,\mathrm{I}_2,$$

On a $\mathrm{L} = \frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}}{\mathfrak{T}(\mathrm{B}+\mathrm{C})}$, etc., d'où l'on pourra calculer le produit $-\mathrm{LMN}$. Mais comme l'aire du triangle ne dépend que de l'argument de ce produit, on peut faire abstraction du module et chercher simplement l'argument du produit

$$\mathrm{BLMN} = \mathrm{I}_1(\mathrm{B}+\mathrm{C})(\mathrm{C}+\mathrm{A})(\mathrm{A}+\mathrm{B}),$$
$$= \mathrm{I}_1(603\,\mathrm{I}_1 + 918\,\mathrm{I}_2)(-661\,\mathrm{I}_1 + 179\,\mathrm{I}_2 + 616\,\mathrm{I}_3)(736\,\mathrm{I}_1 - 739\,\mathrm{I}_2 + 616\,\mathrm{I}_3)$$
$$= -472 + 1123\,\mathrm{I}_1 - 3\,\mathrm{I}_2 - 2\,\mathrm{I}_3.$$

On trouve ainsi

$$\operatorname{tang}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1123}{472} = -2.379, \qquad \varphi - \frac{\pi}{2} = 1^{q},253,$$

d'où l'excès sphérique $= 2^q{,}506$, valeur qui est le rapport de l'aire du triangle donné à celle du triangle rectangle, et qui s'accorde sensiblement avec celle que nous aurions déduite des valeurs de α', β', γ', calculées dans l'art. 265.

§ III.

Propriétés du quadrilatère sphérique.

273. Soient

$$(1)\quad \begin{cases} A = \cos\alpha + \mathrm{A}'\sin\alpha = -\,\mathrm{AB}, \\ B = \cos\beta + \mathrm{B}'\sin\beta = -\,\mathrm{BC}, \\ C = \cos\gamma + \mathrm{C}'\sin\gamma = -\,\mathrm{CD}, \\ D = \cos\delta + \mathrm{D}'\sin\delta = -\,\mathrm{DA} \end{cases}$$

les quatre côtés d'un quadrilatère sphérique, A', B', C', D' étant respectivement leurs pôles positifs. On a identiquement

$$\frac{\mathrm{B}'}{\mathrm{A}'}\,\frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{B}'} = \frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{A}'}\cdot\frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{D}'},$$

c'est-à-dire, A', B', C', D' étant les côtés du quadrilatère polaire,

$$A'.B' = \overline{D}'.\overline{C}',$$

ou

$$(\cos\alpha' + \mathrm{A}\sin\alpha')(\cos\beta' + \mathrm{B}\sin\beta') = (\cos\delta' - \mathrm{D}\sin\delta')(\cos\gamma' - \mathrm{C}\sin\gamma').$$

En opérant par $\mathfrak{V}$ sur cette équation, et ayant égard aux équations (1), il vient

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}\sin\alpha'\cos\beta' + \mathrm{B}\cos\alpha'\sin\beta' - \mathrm{A}'\sin\alpha\sin\alpha'\sin\beta' \\ &\qquad = -\,\mathrm{C}\sin\gamma'\cos\delta' - \mathrm{D}\cos\gamma'\sin\delta' - \mathrm{C}'\sin\gamma\sin\gamma'\sin\delta'. \end{aligned}$$

Soit maintenant P un vecteur quelconque; AP, BP, ... les angles qu'il fait avec les vecteurs A, B, ... En opérant par $\mathfrak{S}\,\mathrm{P}\times$ sur l'équation précédente, il vient

$$\begin{aligned} 0 = {}&\cos AP\sin\alpha'\cos\beta' + \cos BP\cos\alpha'\sin\beta' - \cos A'P\sin\alpha\sin\alpha'\sin\beta' \\ &+ \cos CP\sin\gamma'\cos\delta' + \cos DP\cos\gamma'\sin\delta' - \cos C'P\sin\gamma\sin\gamma'\sin\delta', \end{aligned}$$

où l'on peut remplacer cos A′P, cos C′P par sin PA_1, sin PC_1, en désignant par PA_1, PC_1 les arcs perpendiculaires abaissés de P sur les côtés *A* et *C*.

274. On a [art. 200, (22)] l'identité

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\text{AB}.\mathfrak{V}\text{CD}) = \mathfrak{S}\text{AD}.\mathfrak{S}\text{BC} - \mathfrak{S}\text{AC}.\mathfrak{S}\text{BD}.$$

En mettant pour les produits AB, CD, ... leurs valeurs (1), et désignant, de plus, les diagonales du quadrilatère par

$$K = \cos\varkappa + \text{K}'\sin\varkappa = -\text{AC},$$
$$L = \cos\lambda + \text{L}'\sin\lambda = -\text{BD},$$

et de même pour le quadrilatère polaire, on aura

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\text{AB}.\mathfrak{V}\text{CD}) = \sin\alpha\sin\gamma.\mathfrak{S}\text{A}'\text{C}' = -\sin\alpha\sin\gamma\cos\varkappa'.$$

d'où

$$\sin\alpha\sin\gamma\cos\varkappa' = \cos\varkappa\cos\lambda - \cos\beta\cos\delta,$$

ou

$$\sin\text{AB}\sin\text{CD}\cos(\text{AB},\text{CD}) = \cos\text{AC}\cos\text{BD} - \cos\text{BC}\cos\text{DA},$$

ce qui est le théorème connu de Gauss.

CHAPITRE X.

COMPOSITION DES ROTATIONS.

---

§ Ier.

Rotations autour d'axes fixes.

275. Soit une biradiale $\mathrm{LOM} = A = \mathrm{a}\,\mathrm{A}^{\alpha}$, et soit R un vecteur perpendiculaire à l'axe A. Le produit $\mathrm{R}A = \mathrm{a}\,\mathrm{R}\,\mathrm{A}^{\alpha}$ exprimera (art. 101) ce que deviendra le vecteur R après qu'on aura fait croître sa longueur dans le rapport de 1 à a, et qu'il aura tourné autour de A de l'angle α.

Mais il n'en est plus ainsi lorsque R n'est pas perpendiculaire à A. On décomposera alors R en deux composantes : l'une $\mathrm{R}_{\prime}$ perpendiculaire à A, et que l'on multipliera par $\mathrm{a}\,\mathrm{A}^{\alpha}$; l'autre $\mathrm{R}_{\prime\prime}$ parallèle à A, et que l'on multipliera seulement par a. De cette manière, le vecteur résultant de cette opération sera exprimé par $\mathrm{a}(\mathrm{R}_{\prime}\mathrm{A}^{\alpha} + \mathrm{R}_{\prime\prime})$.

627. Soit maintenant B une biradiale unitaire quelconque; considérons le produit

$$B^{-1}\mathrm{R}B.$$

En supposant R parallèle à l'axe B de cette biradiale B, on aura

$$\begin{aligned} B^{-1}\mathrm{R}B &= (\cos\beta - \mathrm{B}\sin\beta)\,\mathrm{R}\,(\cos\beta + \mathrm{B}\sin\beta) \\ &= \cos^2\beta.\mathrm{R} + \cos\beta\sin\beta\,(\mathrm{RB} - \mathrm{BR}) - \sin^2\beta.\mathrm{BRB}, \end{aligned}$$

ou, en remarquant que B et R ne diffèrent que par un facteur numérique, et que $\mathrm{B}^2 = -1$,

$$B^{-1}\mathrm{R}B = (\cos^2\beta + \sin^2\beta)\,\mathrm{R} = \mathrm{R}.$$

Si, au contraire, R est perpendiculaire à B, alors $-\mathrm{BR} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{B}}$ est une biradiale rectangle $= \mathrm{RB}$, d'où $\mathrm{BRB} = -\mathrm{RB}^2 = \mathrm{R}$. Donc alors

$$\begin{aligned} B^{-1}\mathrm{R}B &= \mathrm{R}(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\mathrm{RB}\cos\beta\sin\beta \\ &= \mathrm{R}(\cos 2\beta + \mathrm{B}\sin 2\beta) = \mathrm{R}.\mathrm{B}^{2\beta}. \end{aligned}$$

Donc l'opération sur le vecteur R, indiquée par $B^{-1}\mathrm{R}B$, B étant une biradiale dont le plan contient R, revient à faire tourner R de l'angle 2β autour de B.

Si R est un vecteur oblique à B, et qu'on le décompose en $\mathrm{R}_{\prime}$ parallèle à B et $\mathrm{R}_{\prime\prime}$ perpendiculaire à B, on aura, en remarquant que $\mathrm{R}_{\prime}$ ne change pas lorsqu'on lui imprime la rotation représentée par $\times\, \mathrm{B}^{2\beta}$,

$$\begin{aligned} B^{-1}\mathrm{R}B &= B^{-1}(\mathrm{R}_{\prime} + \mathrm{R}_{\prime\prime})B = \mathrm{R}_{\prime} + \mathrm{R}_{\prime\prime}\mathrm{B}^{2\beta} \\ &= \mathrm{R}_{\prime}\mathrm{B}^{2\beta} + \mathrm{R}_{\prime\prime}\mathrm{B}^{2\beta} = \mathrm{R}\mathrm{B}^{2\beta}. \end{aligned}$$

Or $\mathrm{R}_{\prime} + \mathrm{R}_{\prime\prime}\mathrm{B}^{2\beta}$ représente évidemment la position du vecteur R, lorsqu'on l'a fait tourner de l'angle 2β autour de B. Donc

$$B^{-1}\mathrm{R}B = \mathrm{R}\mathrm{B}^{2\beta}$$

exprime, dans tous les cas, la position du vecteur R après une rotation égale à 2β autour de l'axe B, rotation exprimée par le symbole

$$(1) \qquad B^{-1}\ldots B = \ldots \times \mathrm{B}^{2\beta}.$$

Cette règle est la même que nous avons établie d'une autre manière (art. 164, 4°).

277. Au lieu d'un vecteur R, on peut prendre une biradiale $R = r_0 + r_i = \mathrm{R}^{\rho}$, et l'on a

$$B^{-1}RB = r_0 + B^{-1}r_iB = \mathrm{S}^{\rho},$$

S^{ρ} étant une biradiale d'axe S différent de R, et de même argument ρ que R^{ρ} ; car, d'après ce que nous savons (art. 156), les deux produits

$$B(B^{-1}\mathrm{R}^{\rho}) = \mathrm{R}^{\rho} \qquad \text{et} \qquad (B^{-1}\mathrm{R}^{\rho}).B$$

formés avec les mêmes facteurs pris dans l'ordre inverse, ont même argument.

Les axes R et S font avec B des angles égaux (art. 266), de sorte que S est ce que devient R après avoir tourné autour de B en vertu de la même rotation par laquelle R^ρ devient S^ρ. Si donc on pose (art. 101)

$$S = B^{-\beta} R B^{\beta},$$

on aura ce théorème :

$$S^\rho = B^{-1} R^\rho B = (B^{-\beta} R . B^{\beta})^\rho .$$

278. Si à une rotation $A^{2\alpha}$ succède une autre rotation $B^{2\beta}$, leur effet sur le vecteur R ou sur la biradiale R sera exprimé par un symbole de la forme

$$B^{-1} A^{-1} . R . AB = \overline{AB} . R . AB .$$

Donc la composition des rotations successives s'effectue en multipliant entre elles deux biradiales ayant pour axes les axes de rotation A, B, et pour arguments les deux demi-angles de rotation. Ainsi, la composition des rotations 2α, 2β autour des axes A, B se réduit à la multiplication des biradiales A^α, B^β.

279. Dans le cas des rotations infinitésimales, $A = A^\alpha = \cos\alpha + A \sin\alpha$ devient, aux infiniment petits près du second ordre,

$$A = A^\alpha = 1 + A\alpha ,$$

et l'on a de même

$$B = B^\beta = 1 + B\beta ,$$

d'où l'on tire, avec la même approximation,

$$AB = 1 + A\alpha + B\beta .$$

En composant les vecteurs $A\alpha$, $B\beta$, de grandeurs proportionnelles aux rotations, on a l'axe de la rotation résultante, représenté proportionnellement par

$$C\gamma = A\alpha + B\beta .$$

Dans ce cas, les deux rotations sont commutatives.

280. Considérons les deux rotations $2\alpha, 2\beta$, autour de deux axes rectangulaires A, B. On a

$$\begin{aligned} A^\alpha B^\beta &= (\cos\alpha + A\sin\alpha).(\cos\beta + B\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta + A\cos\beta\sin\alpha + B\cos\alpha\sin\beta - C\sin\alpha\sin\beta, \end{aligned}$$

où l'on a fait $AB = -C$, C étant un troisième axe perpendiculaire à chacun des deux autres.

Pour $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, les deux rotations $2\alpha, 2\beta$ étant chacune d'un quadrant,

$$\begin{aligned} A^{\frac{\pi}{4}} B^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(1 + A + B - C) &= \frac{1}{2} + \frac{A+B-C}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \cos\frac{\pi}{3} + \frac{A+B-C}{\sqrt{3}} \sin\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Donc l'effet de ces deux rotations combinées équivaut à une rotation de l'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe $A + B - C$, également incliné sur les axes A, B, $-$C.

Si aux deux rotations de $\frac{\pi}{2}$ autour de A, B, on en fait succéder une troisième, aussi d'un quadrant, autour de C, on a

$$A^{\frac{\pi}{4}} B^{\frac{\pi}{4}} C^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1 + A + B - C}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 + C}{\sqrt{2}} = \frac{1 + B}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + B\sin\frac{\pi}{4} = B^{\frac{\pi}{4}},$$

à cause de $-A = -CB = BC$, $-B = -AC$. Donc l'effet des trois rotations successives est le même que celui de la rotation intermédiaire, d'un quadrant autour de l'axe B.

281. Dans le cas le plus général de la rotation autour de trois axes rectangulaires A, B, C, on a

$$\begin{aligned} & A^\alpha B^\beta C^\gamma \\ &= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + A\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + B\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma - C\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ &+ \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma - A\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + B\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + C\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma. \end{aligned}$$

Si les rotations 2α, 2γ sont chacunes $= + \frac{\pi}{2}$, d'où

$$\cos\alpha = \sin\alpha = \cos\gamma = \sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

et que 2β soit $= - \frac{\pi}{2}$, d'où $\cos\beta = - \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on aura

$$A^{\frac{\pi}{4}} B^{-\frac{\pi}{4}} C^{\frac{\pi}{4}} = \frac{A + C}{\sqrt{2}},$$

ce qui est une biradiale rectangle, ayant son axe dirigé suivant la bissectrice de l'angle AOC (art. 266). Donc $A^{\frac{\pi}{4}} B^{-\frac{\pi}{4}} C^{\frac{\pi}{4}}$ correspond à une rotation d'un angle π autour de la bissectrice $A + C$, comme il est aisé de le vérifier directement.

282. *Vice versa,* toute rotation peut se décomposer en deux rotations d'une demi-révolution chacune. C'est ce que nous avons établi directement (art. 163), et on peut encore le déduire des considérations précédentes. En effet, une biradiale $BOC = A = A^{\alpha}$ est exprimable par le rapport $\frac{C}{B}$ de deux vecteurs faisant entre eux l'angle α. On a donc

$$A^{-\alpha} R A^{\alpha} = C^{-1} B R B^{-1} C.$$

Or, $BRB^{-1} = B^{\frac{\pi}{2}} R B^{-\frac{\pi}{2}}$ représente une rotation de grandeur $2 \frac{\pi}{2}$ autour de B, puis $C^{-1} \ldots C$ est l'indication d'une nouvelle rotation de même grandeur autour de C. Donc la rotation $\left(\frac{B}{C}\right)^{-1} R \left(\frac{B}{C}\right)$ équivaut à deux demi-révolutions, l'une autour de l'axe B, l'autre autour de l'axe C.

§ II.

Rotations autour d'axes mobiles.

283. Désignons, pour abréger, par $(A, 2\alpha)$ une rotation de grandeur 2α autour de l'axe OA.

Si à la rotation $(B, 2\beta)$ succède la rotation $(A', 2\alpha)$, A' étant la position prise par le vecteur A, par suite de la rotation $(B, 2\beta)$, l'effet final sera le même que si l'on avait d'abord

imprimé au système la rotation (A, 2α), puis la rotation (B, 2β).

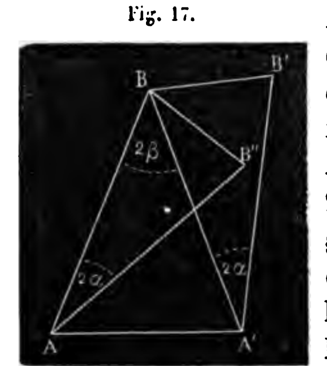


Fig. 17.

En effet, en faisant tourner le système de 2β autour de OB, le point A passe en A'. D'autre part, en le faisant tourner de 2α autour de OA, B passe en B''; en le faisant tourner ensuite de 2β autour de OB, l'égalité des triangles BAB'', BA'B' donne BB'' = BB' et angle B''BB' = ABA' = 2β. Donc B'' arrivera en B' par cette rotation. Donc, si nous représentons, comme dans l'article 164, par le signe $\times$ le résultat de la combinaison de deux rotations, l'effet de chacune des combinaisons

$$(\text{A}, 2\alpha) \times (\text{B}, 2\beta), \qquad (\text{B}, 2\beta) \times (\text{A}', 2\alpha)$$

sera de faire arriver les axes OA, OB respectivement en OA', OB', et par suite le système prendra dans les deux cas la même position finale. Donc ces deux combinaisons sont équivalentes, ce que nous exprimerons par la formule

$$(\text{A}, 2\alpha) \times (\text{B}, 2\beta) = (\text{B}, 2\beta) \times (\text{A}', 2\alpha) = (\text{B}, 2\beta) \times (\text{B}^{-\beta}\text{A}\,\text{B}^{\beta}, 2\alpha),$$

d'où, les biradiales correspondantes étant égales,

$$\text{A}^{\alpha}\text{B}^{\beta} = \text{B}^{\beta}\text{A}'^{\alpha} = \text{B}^{\beta}.(\text{B}^{-\beta}\text{A}\,\text{B}^{\beta})^{\alpha}.$$

284. *Exemple.* Soient A et B deux axes rectangulaires entre eux, et considérons la rotation composée

$$(\text{B}, 2\beta) \times (\text{A}', 2\alpha),$$

où $\text{A}' = \text{B}^{-\beta}\text{A}\,\text{B}^{\beta}$. L'axe B étant perpendiculaire à A, pour faire tourner A de 2β, il suffit de le multiplier par $\text{B}^{2\beta}$ (art. 276), ce qui donne

$$\text{A}' = \text{A}\,\text{B}^{2\beta} = \text{A}(\cos 2\beta + \text{B}\sin 2\beta) = \text{A}\cos 2\beta - \text{C}\sin 2\beta,$$

$\text{C} = -\text{A}\text{B}$ étant perpendiculaire au plan AOB. Donc

$$\begin{aligned}\text{B}^{\beta}\text{A}'^{\alpha} &= (\cos\beta + \text{B}\sin\beta)(\cos\alpha + \text{A}'\sin\alpha)\\ &= \cos\alpha\cos\beta + \text{A}(\sin\alpha\cos\beta\cos 2\beta + \sin\alpha\sin\beta\sin 2\beta)\\ &\quad + \text{B}\cos\alpha\sin\beta + \text{C}(-\sin\alpha\cos\beta\sin 2\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos 2\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta + \text{A}\sin\alpha\cos\beta + \text{B}\cos\alpha\sin\beta - \text{C}\sin\alpha\sin\beta,\end{aligned}$$

valeur que nous avions déjà trouvée (art. 267) pour le produit $A^{\alpha} B^{\beta}$.

285. ABC étant un triangle sphérique quelconque, on a (art. 264)

$$A^{\alpha'} B^{\beta'} C^{\gamma'} = 1,$$

pour le produit des biradiales qui ont pour arguments les angles extérieurs du triangle donné ou les côtés de son triangle polaire. Donc, si un corps tourne autour des arêtes d'un angle trièdre d'angles doubles des dièdres *intérieurs* de cet angle trièdre, il reviendra à sa position primitive. Car les angles $2\alpha', 2\beta', 2\gamma'$ sont égaux à $2(\pi - BAC)$, $2(\pi - CBA)$, $2(\pi - ACB)$, ou à $-2BAC$, $-2CBA$, $-2ACB$, c'est-à-dire au double des angles dièdres intérieurs de l'angle trièdre, pris en sens contraire.

Ce théorème, facile à retenir, peut servir à composer deux rotations en une seule. Il donne, en effet,

$$B^{\beta'} C^{\gamma'} = A^{-\alpha'},$$

A et α' étant déterminés au moyen de B, C, β', γ' par la résolution d'un triangle sphérique (art. 262).

On peut également se servir, pour le même but, de la relation

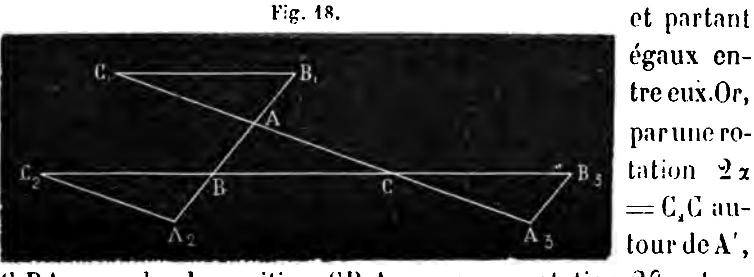
$${A'}^{\alpha} {B'}^{\beta} {C'}^{\gamma} = 1,$$

que l'on démontre facilement comme il suit. Prenons (*fig.* 18)

$$C_2B = BC = CB_3, \quad A_3C = CA = AC_2, \quad B_1A = AB = BA_2,$$

Les trois triangles AB_1C_1, BC_2A_2, CA_3B_3 seront égaux à ABC, et partant égaux entre eux. Or, par une rotation $2\alpha = C_1C$ autour de A', C_1BA_2 prendra la position CB_3A_3; par une rotation 2β autour

Fig. 18.



de B′, ce triangle vient en $C_1B_1A_1$, et enfin, par une rotation 2γ autour de C′, il reprend sa première position C_2BA_2.

286. Théorème. — *Si à la rotation autour du vecteur* OD = D *succède une rotation autour d'un axe* PP′, *parallèle au vecteur* OC = C, *le mouvement résultant sera composé de la rotation déterminée comme dans les articles* 278 *et* 285, *et d'un mouvement de translation.*

Menons, en effet, OP = p perpendiculaire à PP′, et soit OM le vecteur d'un point quelconque M du système. On pourra décomposer OM en trois composantes rectangulaires,

Fig. 19.



$$OM = Ax + By + Cz,$$

l'une des composantes étant dirigée suivant OC, et l'une des deux autres A l'étant suivant OP. Par une rotation (C, ω) autour de OC, OM prend (art. 277) la position

$$\begin{aligned} OM' &= (Ax + By)\,C^{\omega} + Cz \\ &= A(x\cos\omega - y\sin\omega) + B(y\cos\omega + z\sin\omega) + Cz, \end{aligned}$$

que l'on obtient en appliquant la formule

$$B^{-\frac{1}{2}}RB^{\frac{1}{2}} = R_1 + R_2B^{\beta},$$

où $R_1 = Cz$ est parallèle à l'axe de rotation, et $R_2 = Ax + By$ perpendiculaire à cet axe.

Si, au lieu de cela, le même point M, déterminé par

$$PM = OM - OP = A(x - p) + Bz + Cz,$$

exécute la rotation (C, ω) autour de PP′, on aura, pour la nouvelle position M″,

$$PM' = A[(x-p)\cos\omega - y\sin\omega] + B[y\cos\omega + (x-p)\sin\omega] + Cz,$$

d'où l'on tire, pour la distance des deux points M′, M″,

$$M'M'' = OM'' - OM' = OP + PM'' - OM' = Ap(1 - \cos\omega) - Bp\sin\omega.$$

expression indépendante de M. Donc l'effet de la rotation (c, ω) autour de PP′ diffère de celui de la rotation (c, ω) autour de OC seulement par une translation ou mouvement progressif égal à

$$M'M'' = QP = OP - OQ,$$

en posant

$$OQ = p(A\cos\omega + B\sin\omega) = OP.c^{\omega},$$

et par suite Q étant la position que prend le point P en tournant de l'angle ω autour de OC. Donc les deux rotations, autour de OC et autour de PP′, ne diffèrent que par un mouvement progressif. De là résulte le théorème précédent, qui sert à composer les mouvements de rotation autour d'axes OD et PP′, non situés dans le même plan, théorème que l'on peut exprimer par l'équation

$$(OD, \psi) \times (PP', \omega) = (OD, \psi) \times (OC, \omega) + OP.c^{\omega},$$

OC étant parallèle à PP′.

§ III.

Mouvements rotatoires et progressifs.

287. Tout mouvement d'un corps solide se réduit à une rotation c^{ω}, puisque le passage d'un corps de la position OM à une autre position quelconque O′M′ peut s'effectuer au moyen d'une translation égale et parallèle à OO′, combinée avec une rotation c^{ω} autour d'un axe c passant dans la première position par O, dans la seconde par O′, et parallèle dans les deux cas à une même direction.

Il est facile de voir que, en choisissant convenablement le point S, on pourra faire en sorte que la rotation c^{ω} s'opère autour de l'axe SS′ passant par S, et que la translation soit parallèle à SS′. En effet, soient

$$OO' = Aa + Bb + Cc, \quad OM = Ax + By + Cz,$$

A et B étant deux vecteurs unitaires perpendiculaires entre eux

et à c. La nouvelle position M″ de M s'obtiendra : 1° en faisant tourner le système autour de c; 2° en le transportant parallèlement à lui-même suivant OO′. Si donc M′ est la position que prend M par l'effet de la rotation c^{ω}, on aura

$$OM'' = OM' + OO',$$

d'où

$$\begin{aligned} MM'' &= OM' - OM + OO' \\ &= A(x\cos\omega - y\sin\omega - x + a) + B(y\cos\omega + x\sin\omega - y + b) + Cc. \end{aligned}$$

MM″ sera parallèle à OC, si l'on pose

$$\begin{aligned} &x(\cos\omega - 1) - y\sin\omega + a = 0, \\ &x\sin\omega + y(\cos\omega - 1) + b = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire pour tous les points de l'axe SS′, parallèle à OC, et déterminé par les équations

$$x = \frac{1}{2}\left(a - b\cot\frac{\omega}{2}\right), \qquad y = \frac{1}{2}\left(b + a\cot\frac{\omega}{2}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned} OS &= \frac{1}{2}A\left(a - b\cot\frac{\omega}{2}\right) + \frac{1}{2}B\left(b + a\cot\frac{\omega}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(Aa + Bb) + \frac{1}{2}(Ba - Ab)\cot\frac{\omega}{2}. \end{aligned}$$

288. Observons que, si à la droite $O'O = -Aa - Bb - Cc$ on fait exécuter autour de O′ la rotation $c^{-\omega}$, O se placera en un point O°, tel que

$$\begin{aligned} O'O^{\circ} &= -(Aa + Bb)(\cos\omega - C\sin\omega) - Cc \\ &= A(-a\cos\omega - b\sin\omega) + B(-b\cos\omega + a\sin\omega) - Cc. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} OO^{\circ} &= OO' + O'O^{\circ} \\ &= A(a - a\cos\omega - b\sin\omega) + B(b - b\cos\omega + a\sin\omega) \\ &= 4\,OS\sin^2\frac{\omega}{2}. \end{aligned}$$

Soit OO′ perpendiculaire à OC. Le plan OO′O° est perpen-

diculaire à OC, et l'angle $OO'O'' = \omega$. Donc, $O''O'$ étant égal à OO', et par suite les projections $O'O''$, $O'O$ de ces lignes étant aussi égales, on a

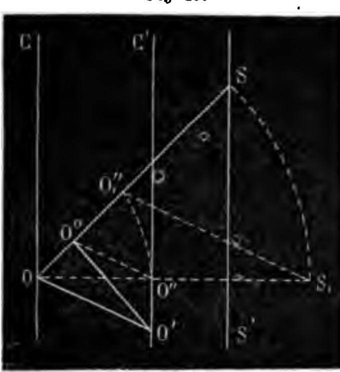


Fig 20.

$$OO'' = 2OO' \sin\frac{\omega}{2} = 4OS\sin^2\frac{\omega}{2}.$$

Il s'ensuit de là que OS est une troisième proportionnelle à OO' et à OO''. En construisant donc $OS = OS_1 = \frac{OO'^2}{OO''}$, puis menant SS' parallèle à OC, on aura l'axe cherché.

289. Si, outre la rotation (c, ω) autour de O et la translation OO', le corps reçoit, dans sa nouvelle position, une dilatation ou une contraction, de manière à rester homothétique à lui-même, tandis que ses dimensions varient dans le rapport de 1 à r, on aura alors

$$\begin{aligned} O'M' &= r.c^{-\frac{\omega}{\pi}}.OM.c^{\frac{\omega}{\pi}} \\ &= r\text{A}(x\cos\omega - y\sin\omega) + r\text{B}(y\cos\omega + x\sin\omega) + r\text{C}z, \end{aligned}$$

et, pour que M' coïncide avec sa position primitive M, il faudra que l'on ait

$$O'M' = OM - OO' = \text{A}(x-a) + \text{B}(y-b) + \text{C}(z-c),$$

d'où l'on tire

$$x - a = r(x\cos\omega - y\sin\omega),$$
$$y - b = r(y\cos\omega + x\sin\omega), \qquad z - c = rz,$$

et par suite

$$x = \frac{a(1 - r\cos\omega) - br\sin\omega}{1 - 2r\cos\omega + r^2},$$

$$y = \frac{b(1 - r\cos\omega) + ar\sin\omega}{1 - 2r\cos\omega + r^2}, \qquad z = \frac{c}{1-r}.$$

On obtiendra ainsi le point unique S qui coïncide avec son an-

cienne position, et qui n'a pas varié dans le changement de lieu et de grandeur du corps.

290. Le point O exécutant autour de O' le mouvement marqué par $r\text{C}^{-\omega}$, et venant se placer en O^0, on aura

Fig. 21.



$$O'O^0 = \text{A}r(-a\cos\omega - b\sin\omega) + \text{B}r(a\sin\omega - b\cos\omega) - \text{C}cr,$$

d'où

$$OO^0 = OO' + O'O^0 = \text{A}(a - ar\cos\omega - br\sin\omega) + \text{B}(b - br\cos\omega + ar\sin\omega) + \text{C}c(1-r).$$

La projection de OO^0 sur le plan perpendiculaire à C sera

$$OO^{00} = \text{A}(a - ar\cos\omega - br\sin\omega) + \text{B}(b - br\cos\omega + ar\sin\omega),$$

et, si OS^0 est la projection analogue de OS, on a

$$OS = \text{A}x + \text{B}y + \text{C}z$$
$$= \text{A}\frac{a - ar\cos\omega - br\sin\omega}{1 - 2r\cos\omega + r^2} + \text{B}\frac{b - br\cos\omega + ar\sin\omega}{1 - 2r\cos\omega + r^2} + \frac{\text{C}c}{1-r}$$
$$= \frac{OO^{00}}{1 - 2r\cos\omega + r^2} + \frac{\text{C}c}{1-r} = OS^0 + S^0S.$$

Donc, à cause de $OO^0 = OO^{00} + O^{00}O^0$, $O^{00}O^0 = \text{C}c(1-r)$,

$$OS = \frac{OO^{00}}{1 - 2r\cos\omega + r^2}, \quad S^0S = \frac{O^{00}O}{(1-r)^2}.$$

291. Dans le cas de r négatif, les deux corps OM, OM' seront inversement semblables. Si l'on suppose, par exemple, $r = -1$, le point S qui coïncidera avec son correspondant sera donné par la forme

$$OS = \text{A}x + \text{B}y + \text{C}z.$$

On a d'ailleurs

$$OS = \text{A}(-x\cos\omega + y\sin\omega) + \text{B}(-y\cos\omega - x\sin\omega) - \text{C}z,$$

d'où l'on tire la valeur de $OS = OO' + O'S$, et, en l'identifiant avec $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z$, on en conclut

$$a - x - x\cos\omega + y\sin\omega = 0,$$
$$b - y - y\cos\omega - x\sin\omega = 0, \qquad c - z - z = 0,$$

et par suite

$$x = a + b\,\mathrm{tang}\,\frac{\omega}{2}, \quad y = b - a\,\mathrm{tang}\,\frac{\omega}{2}, \quad z = \frac{c}{2}.$$

Si l'on fait faire à O autour de O' la rotation $(\mathrm{C}, \pi - \omega)$, on aura

$$O'O^{oo} = -(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b)(-\cos\omega + \mathrm{C}\sin\omega)$$
$$= \mathrm{A}(a\cos\omega + b\sin\omega) + \mathrm{B}(b\cos\omega - a\sin\omega),$$

d'où

$$OO^{oo} = \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + O'O^{oo}$$
$$= \mathrm{A}(a + a\cos\omega + b\sin\omega) + \mathrm{B}(b + b\cos\omega - a\sin\omega),$$

$$OS^{o} = \frac{OO^{oo}}{4\cos^2\frac{\omega}{2}}, \quad S^{o}S = \frac{c}{2}.$$

292. Si nous supposons, r étant quelconque, que OO' soit perpendiculaire à l'axe de rotation, on pourra prendre $z = 0$, et alors, au lieu de la formule $r.B^{-\frac{1}{2}}\mathrm{R}B^{\frac{1}{2}}$, employer la formule plus simple $r\mathrm{R}B$. On a alors

$$OM - O'M = OO' = OM(1 - r\mathrm{C}^{\omega}).$$

En posant $-r.OO'.\mathrm{C}^{\omega} = r.O'O.\mathrm{C}^{\omega} = O'\Omega$, on aura

$$(OO' + O'\Omega).OM = O\Omega.OM = OO'(1 - r\mathrm{C}^{\omega}).OM = OO'^2,$$

d'où

$$OM = \frac{OO'^2}{O\Omega},$$

valeur facile à construire. On obtiendra ainsi le point immobile M.

En comparant cette solution à la précédente, on voit à quel point les formules se simplifient, lorsque les biradiales sont coplanaires; on peut éviter alors de décomposer toujours chaque vecteur suivant trois axes rectangulaires.

§ IV.

Transformation des coordonnées rectangulaires.

293. D'après ce que nous avons vu (art. 278), si l'on fait subir à un système un nombre quelconque de rotations autour d'axes passant par un même point, ces rotations peuvent se composer en une seule. Désignons par s^σ cette rotation,

$$s = s_1 \iota_1 + s_2 \iota_2 + s_3 \iota_3,$$

$\iota_1, \iota_2, \iota_3$ étant trois axes rectangulaires fixes; on a

$$\Sigma = s^{\frac{1}{2}\sigma} = \cos\tfrac{1}{2}\sigma + s\sin\tfrac{1}{2}\sigma = \cos\tfrac{1}{2}\sigma(1 + \lambda_1\iota_1 + \lambda_2\iota_2 + \lambda_3\iota_3),$$

en posant

$$\lambda_1 = s_1 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\sigma, \quad \lambda_2 = s_2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\sigma, \quad \lambda_3 = s_3 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\sigma.$$

Si l'on fait subir à un vecteur quelconque x la rotation s^σ, il prendra la position

$$x' = \Sigma^{-1} x \Sigma = s^{-\frac{1}{2}\sigma} x s^{\frac{1}{2}\sigma},$$

c'est-à-dire

$$x'_1\iota_1 + x'_2\iota_2 + x'_3\iota_3 = \cos^2\tfrac{1}{2}\sigma.(1 - \lambda_1\iota_1 - \lambda_2\iota_2 - \lambda_3\iota_3)(x_1\iota_1 + x_2\iota_2 + x_3\iota_3)$$
$$\times (1 + \lambda_1\iota_1 + \lambda_2\iota_2 + \lambda_3\iota_3),$$

d'où, en effectuant les multiplications,

$$\begin{aligned}
\operatorname{séc}^2\tfrac{1}{2}\sigma.x'_1 &= (1 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2)x_1 + 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3)x_2 + 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2)x_3.\\
\operatorname{séc}^2\tfrac{1}{2}\sigma.x'_2 &= 2(\lambda_2\lambda_1 + \lambda_3)x_1 + (1 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2)x_2 + 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_1)x_3.\\
\operatorname{séc}^2\tfrac{1}{2}\sigma.x'_3 &= 2(\lambda_3\lambda_1 - \lambda_2)x_1 + 2(\lambda_3\lambda_2 + \lambda_1)x_2 + (1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2)x_3,
\end{aligned}$$

ce qui n'est autre chose que les formules d'Euler.

CHAPITRE XI.

GÉOMÉTRIE DE LA LIGNE DROITE ET DU PLAN.

294. Appliquons d'abord le calcul des quaternions à quelques propositions de Géométrie élémentaire.

I. Soit un triangle ABC, ayant les deux angles B,C égaux entre eux. Les biradiales $\frac{BA}{BC}, \frac{CA}{CB}$ auront des verseurs conjugués entre eux. En prenant donc A pour origine des vecteurs, et désignant par λ un coefficient réel, on aura

$$\frac{-\text{B}}{\text{C}-\text{B}} = \lambda.\mathfrak{C}\frac{-\text{C}}{\text{B}-\text{C}},$$

ou

$$(\text{B}-\text{C})^{-1}\text{B} = \lambda.\mathfrak{C}(\text{C}-\text{B})^{-1}\text{C} = \lambda.\text{C}(\text{C}-\text{B})^{-1}.$$

En opérant par $(\text{B}-\text{C})\times$, puis par $(\text{C}-\text{B})\times$, on a l'égalité

$$\text{B}(\text{C}-\text{B}) = \lambda(\text{B}-\text{C})\text{C}.$$

ou

$$\text{BC}-\text{B}^2 = \lambda.\text{BC}-\lambda.\text{C}^2,$$

$$\mathfrak{S}\text{BC}+\mathfrak{V}\text{BC}-\text{B}^2 = \lambda.\mathfrak{S}\text{BC}+\lambda.\mathfrak{V}\text{BC}-\lambda.\text{C}^2.$$

Les vecteurs AB, AC n'étant pas parallèles entra eux, $\mathfrak{V}\text{BC}$ n'est pas nul. Il faut donc, pour que l'équation précédente subsiste, que l'on ait $1-\lambda=0$, d'où $\text{B}^2=\text{C}^2$. Le triangle est donc isoscèle.

En reprenant les raisonnements dans l'ordre inverse, on démontrerait la proposition réciproque.

II. Trouver sur la base BC d'un triangle ABC un point B d'où l'on puisse mener aux deux autres côtés AB, AC des parallèles DE, DF égales entre elles.

Les trois points B, D, C étant en ligne droite, si l'on fait $\frac{AE}{AC} = t$, on aura

$$t = \frac{BD}{BC} = \frac{BF}{BA} = 1 - \frac{AF}{BA}, \quad \text{d'où} \quad \frac{AE}{BA} = 1 - t;$$

donc, à cause de FD = AE,

$$AD = AF + FD = (1-t)AB + t.AC,$$

ou

$$\text{D} = (1-t)\text{B} + t.\text{C}.$$

Pour que l'on ait DE = CF, il faut que $(1-t).\mathfrak{T}\text{B}$ soit égal à $t.\mathfrak{T}\text{C}$. En désignant par u la valeur commune de ces deux quantités, on aura

$$(1-t)\text{B} = u.\mathfrak{U}\text{B}, \quad t.\text{C} = u.\mathfrak{U}\text{C},$$

d'où

$$\text{D} = u(\mathfrak{U}\text{B} + \mathfrak{U}\text{C}),$$

et par suite (art. 271), AD est la bissectrice de l'angle **BAC**.

Nous avons supposé t et $1 - t$ positifs; on pourra examiner de même le cas où l'une de ces quantités serait négative.

III. Dans un quadrilatère inscrit au cercle, le produit des côtés est réel.

Soient, en effet, A, B, C, D les quatre côtés, I l'axe du plan du quadrilatère, $(\widehat{\text{A},\text{B}}) = \lambda$, $(\widehat{\text{C},\text{D}}) = \mu$ deux angles opposés. On a, en désignant par **a**, **b**, **c**, **d** les modules des quatre côtés

$$\text{AB} = \text{A}^2.\frac{\text{B}}{\text{A}} = -\mathbf{ab}.I^{\lambda}, \qquad \text{CD} = \text{C}^2.\frac{\text{D}}{\text{C}} = -\mathbf{cd}.I^{\mu},$$

d'où

$$\text{ABCD} = \mathbf{abcd}.I^{\lambda+\mu}.$$

Or $\lambda + \mu = \pi$, si le quadrilatère est convexe, et $= 0$, s'il est biconcave. Donc le produit ABCD est égal à $\pm$ **abcd**.

Si donc on connaît deux côtés A, B du quadrilatère inscrit, on aura les deux autres X et $-\text{A}-\text{B}-\text{X}$ au moyen de l'équation

$$(x) \qquad \mathfrak{P}\,\text{ABX}(\text{A}+\text{B}+\text{X}) = 0,$$

qui sera celle d'un cercle.

Exemple. Soient

$$\mathrm{A} = \mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_2, \qquad \mathrm{B} = 3\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_3,$$

et représentons le troisième côté par $\mathbf{X} = x_1\mathrm{I}_1 + x_2\mathrm{I}_2 + x_3\mathrm{I}_3$. On aura

$$0 = \mathfrak{V}\{(\mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_2)(3\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_3)(x_1\mathrm{I}_1 + x_2\mathrm{I}_3 + x_3\mathrm{I}_3) \times [(4 + x_1)\mathrm{I}_1 + (2 + x_2)\mathrm{I}_2 + (x_0 - 1)\mathrm{I}_3]\},$$

d'où, en effectuant et égalant séparément à zéro les coefficients de $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$, on tire trois équations

$$0 = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1 + 3x_2 + 28x_3,$$
$$0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1 + 4x_2 - x_3,$$
$$0 = 6x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 16x_1 + 25x_2 - 12x_3,$$

qui se réduisent à deux équations distinctes, représentant l'intersection d'une sphère et d'un plan. Ainsi l'équation (x) représente bien un cercle.

295. Pour que deux vecteurs A, B soient parallèles, il faut que la biradiale $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \frac{1}{\mathrm{A}^2}\mathrm{AB}$ ait son angle nul ; il faut donc qu'elle se réduise à sa partie réelle et que son vecteur soit nul. Donc la condition de parallélisme est

$$\mathfrak{V}\mathrm{AB} = 0.$$

Pour que les vecteurs A, B soient perpendiculaires entre eux, il faut que la même biradiale ait son angle droit et qu'elle se réduise à son vecteur. Donc la condition de perpendicularité est

$$\mathfrak{S}\mathrm{AB} = 0.$$

Généralement, les vecteurs A, B faisant entre eux un angle θ, le verseur de la biradiale AB sera

$$\mathfrak{U}\mathrm{AB} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathfrak{T}\mathrm{AB}} = \cos\theta + \frac{\mathfrak{V}\mathrm{AB}}{\mathfrak{T}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}}\sin\theta = \left(\frac{\mathfrak{V}\mathrm{AB}}{\mathfrak{T}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}}\right)^\theta.$$

On aura, pour déterminer l'angle θ, les équations

$$\cos\theta = \frac{\mathfrak{S}\mathrm{AB}}{\mathfrak{T}\mathrm{AB}}, \quad \sin\theta = \frac{\mathfrak{T}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}}{\mathfrak{T}\mathrm{AB}}.$$

De la dernière égalité on tire

$$\mathfrak{T}.\mathfrak{V}\mathrm{AB} = \mathfrak{T}\mathrm{A}.\mathfrak{T}\mathrm{B}\sin\theta.$$

Donc $\mathfrak{T}:\mathfrak{V}\mathrm{AB}$ représente le double de l'aire du triangle compris entre les vecteurs A et B.

296. L'équation du vecteur $OX = \mathrm{x}$, prolongement de $OA = \mathrm{A}$. peut se mettre sous l'une des formes

(1) $\quad \mathrm{x} \parallel \mathrm{A}, \quad \mathrm{x} = t\mathrm{A}, \quad \mathfrak{V}\mathrm{Ax} = 0, \quad \mathfrak{U}\mathrm{x} = \mathfrak{U}\mathrm{A},$

Ces équations sont toutes linéaires en x, et renferment, explicitement ou implicitement, une variable réelle t.

Si A, B, C sont trois vecteurs non coplanaires, en opérant par $\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{AB}\times)$ et par $\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\mathrm{AC}\times)$ sur l'une des équations (1), on trouve

(2) $$\mathfrak{S}\mathrm{ABx} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{ACx} = 0.$$

Chacune de ces nouvelles équations, prise séparément, représente un plan [art. 200, (18)], puisqu'elle exprime que le vecteur x est coplanaire soit avec A et B, soit avec A et C. Donc l'ensemble de ces équations représente la ligne OA d'intersection de ces deux plans.

297. Réciproquement, pour résoudre les équations (2) et en tirer x en fonction de quantités connues, écrivons-les sous la forme

$$\mathfrak{S}(\mathrm{x}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}) = 0, \quad \mathfrak{S}(\mathrm{x}.\mathfrak{V}\mathrm{AC}) = 0,$$

ce qui fait voir que x est perpendiculaire à chacun des vecteurs $\mathfrak{V}\mathrm{AB}$, $\mathfrak{V}\mathrm{AC}$, et par conséquent parallèle à l'axe de leur produit, d'où l'on tire (art. 298)

$$\mathrm{x} = t'.\mathfrak{V}(\mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathfrak{V}\mathrm{AC}),$$
$$= t'(\mathrm{C}.\mathfrak{S}\mathrm{ABA} - \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{ABC}) = -t'.\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{ABC},$$

ou simplement $\mathrm{x} = t\mathrm{A}$, en posant $-t'\mathfrak{S}\mathrm{ABC} = t$.

298. L'équation d'une parallèle menée par le point B à la droite $X = t A$, sera

(3) $$X = tA + B, \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{V}.A(X - B) = 0.$$

299. L'équation de la perpendiculaire à A, menée par le point P, sera de la forme

$$X = tC + P.$$

Pour que les vecteurs A et C soient perpendiculaires, il faudra que l'on ait

$$\mathfrak{S}AC = 0.$$

Ensuite A, P, C devant être coplanaires, on aura

$$\mathfrak{S}APC = 0, \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{S}(\mathfrak{V}AP.C) = 0;$$

C, étant donc perpendiculaire aux deux vecteurs A et $\mathfrak{V}AP$, sera parallèle à l'axe de leur produit, et l'on aura

$$C \parallel \mathfrak{V}(A.\mathfrak{V}AP).$$

Donc l'équation de la perpendiculaire cherchée sera

(4) $$X = t.\mathfrak{V}(A.\mathfrak{V}AP) + P.$$

On peut arriver autrement à ce résultat. On a, en effet,

$$P = A^{-1}AP = A^{-1}.\mathfrak{S}AP + A^{-1}.\mathfrak{V}AP.$$

Donc $A^{-1}.\mathfrak{V}AP$, qui est une perpendiculaire à A (puisque son produit par A est un vecteur), est coplanaire avec A et avec P. Donc c'est la direction de la perpendiculaire cherchée, d'où l'on tire l'équation (4), en remplaçant t par $-\frac{t}{(\mathfrak{T}A)^2}$.

300. Ainsi $-A^{-1}.\mathfrak{V}AP$ est le vecteur mené par l'extrémité de P perpendiculairement à la droite $X = tA$. Si l'on transporte maintenant l'origine au point P, on en conclura que

$$\Pi = -A^{-1}.\mathfrak{V}A(P - B)$$

est le vecteur allant de l'extrémité de P perpendiculairement vers la droite

(5) $$\mathrm{X} = t\mathrm{A} + \mathrm{B}.$$

On peut le voir plus simplement comme il suit. Si X est le pied de la perpendiculaire, celle-ci sera $\mathrm{X} - \mathrm{P}$. Cette droite devant être perpendiculaire à $\mathrm{X} = t\mathrm{A} + \mathrm{B}$, ou à sa parallèle A, on aura

$$\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{X}-\mathrm{P}) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{S}\mathrm{A}(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}) = 0,$$

d'où

$$t\mathrm{A} = \mathrm{A}^{-1}\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{P}-\mathrm{B}),$$
$$\mathrm{X} - \mathrm{P} = t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P} = -\mathrm{A}^{-1}[\mathrm{A}(\mathrm{P}-\mathrm{B}) - \mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{P}-\mathrm{B})]$$
$$= -\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{V}\mathrm{A}(\mathrm{P}-\mathrm{B}),$$

comme ci-dessus. On a, pour la longueur de la perpendiculaire,

$$\mathfrak{T}\Pi = \mp\mathfrak{T}\mathfrak{V}[\mathfrak{U}\mathrm{A}.(\mathrm{P}-\mathrm{B})].$$

301. Le vecteur qui joint le point P à un point quelconque de la droite (5) est égal à

$$t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}.$$

Pour que sa longueur soit un minimum, il faudra donc que l'on ait

$$d\mathfrak{T}(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}) = 0,$$

ou (art. 243)

$$0 = \mathfrak{T}(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P})\, d\mathfrak{T}(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P})$$
$$= -\mathfrak{S}[(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}).d(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P})]$$
$$= -\mathfrak{S}[(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}).\mathrm{A}].dt = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{S}[(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P})\mathrm{A}] = 0,$$

et par suite que le vecteur $t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}$ soit perpendiculaire à A ou à $t\mathrm{A}$.

Cette équation donne

$$t\mathrm{A}^2 + \mathfrak{S}[\mathrm{A}(\mathrm{B}-\mathrm{P})] = 0, \qquad \text{ou} \qquad t\mathrm{A} = -\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}[\mathrm{A}(\mathrm{B}-\mathrm{P})].$$

Donc le vecteur perpendiculaire à A ou à la droite (5) est

$$\text{B} - \text{P} - \text{A}^{-1}.\mathfrak{S}[\text{A}(\text{B}-\text{P})] = \text{A}^{-1}\{\text{A}(\text{B}-\text{P}) - \mathfrak{S}[\text{A}(\text{B}-\text{P})]\}$$
$$= \text{A}^{-1}.\mathfrak{V}[\text{A}(\text{B}-\text{P})] = -\text{A}^{-1}.\mathfrak{V}[\text{A}(\text{P}-\text{B})],$$

comme on l'a trouvé dans l'art. précédent.

302. Cherchons maintenant ***la plus courte distance de deux droites,*** données par les équations

$$\text{x} = t\text{A} + \text{B}, \qquad \text{x}' = t'\text{A}' + \text{B}'.$$

On posera $d\mathfrak{T}(\text{x}' - \text{x}) = 0$, ou

$$0 = \mathfrak{S}[(\text{x}' - \text{x})(d\text{x}' - d\text{x})] = \mathfrak{S}[(\text{x}' - \text{x})(\text{A}'dt' - \text{A}dt)].$$

t et t' étant deux variables indépendantes, l'équation se décomposera dans ces deux-ci

$$\mathfrak{S}.(\text{x}' - \text{x})\text{A} = 0, \qquad \mathfrak{S}.(\text{x}' - \text{x})\text{A}' = 0,$$

équations qui expriment que la plus courte distance des deux droites est leur perpendiculaire commune.

Cette perpendiculaire est parallèle à $\mathfrak{V}\text{A}\text{A}'$, et par suite on a

(6) $$\text{x}' - \text{x} = t'\text{A}' + \text{B}' - t\text{A} - \text{B} = u.\mathfrak{V}\text{A}\text{A}'.$$

En opérant sur cette équation par $\mathfrak{S}\text{A}\text{A}' \times$, il vient

$$\mathfrak{S}[\text{A}\text{A}'(\text{B}' - \text{B})] = u.\mathfrak{S}(\text{A}\text{A}'.\mathfrak{V}\text{A}\text{A}') = u(\mathfrak{V}\text{A}\text{A}')^2,$$

ce qui détermine le coefficient u. La plus courte distance cherchée est

$$\mathfrak{T}(\text{x}' - \text{x}) = \mathfrak{T}(u.\mathfrak{V}\text{A}\text{A}') = \mathfrak{T}\frac{\mathfrak{S}[\text{A}\text{A}'(\text{B}' - \text{B})]}{\mathfrak{V}\text{A}\text{A}'} = \frac{\mathfrak{S}[\mathfrak{V}\text{A}\text{A}'.(\text{B}' - \text{B})]}{\mathfrak{T}(\mathfrak{V}\text{A}\text{A}')}$$
$$= \mathfrak{T}\mathfrak{S}[\mathfrak{U}\mathfrak{V}\text{A}\text{A}'.(\text{B}' - \text{B})],$$

le signe $\mathfrak{T}$ mis devant $\mathfrak{S}$ indiquant simplement que la valeur numérique de la quantité doit être prise positivement.

Pour trouver les extrémités de la perpendiculaire commune, opérons sur (6) par $\mathfrak{S}.\text{A} \times$ et par $\mathfrak{S}.\text{A}' \times$; on trouvera ainsi

$$\mathfrak{S}.\text{A}(\text{x}' - \text{x}) = \mathfrak{S}(t'\text{A}\text{A}' + \text{A}\text{B}' - t\text{A}^2 - \text{A}\text{B}) = u.\mathfrak{S}(\text{A}.\mathfrak{V}\text{A}\text{A}') = 0,$$

c'est-à-dire

$$t'.\mathfrak{S}_{AA'} + \mathfrak{S}_{AB'} - tA^2 - \mathfrak{S}_{AB} = 0,$$

et de même

$$t'A'^2 + \mathfrak{S}_{A'B'} - t.\mathfrak{S}_{AA'} - \mathfrak{S}_{A'B} = 0;$$

ces équations font connaître les valeurs de t, t', et par suite celles de x, x'.

303. Soit donné un tétraèdre OABC. La perpendiculaire AA' à la face OBC, abaissée du point A, est parallèle au vecteur de la biradiale BOC ou à $\mathfrak{V}_{BC}$. Donc un vecteur mené dans le plan OAA' et rencontrant la hauteur AA', aura pour expression

$$A + \lambda.\mathfrak{V}_{BC},$$

λ étant un facteur réel indéterminé. De même, un vecteur rencontrant la hauteur BB' aura pour expression

$$B + \mu.\mathfrak{V}_{CA}.$$

Pour qu'un même vecteur rencontre à la fois les deux hauteurs AA', BB', il faut que λ et μ soient tels que les deux vecteurs précédents soit parallèles, ou que le vecteur de leur produit soit nul, ce qui donne la condition

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{V}.[(A + \lambda.\mathfrak{V}_{BC})(B + \mu.\mathfrak{V}_{CA})] \\ &= \mathfrak{V}_{AB} + \lambda.\mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{BC}.B) + \mu.\mathfrak{V}(A.\mathfrak{V}_{CA}) + \lambda\mu\mathfrak{V}(\mathfrak{V}_{BC}.\mathfrak{V}_{CA}) \\ &= \mathfrak{V}_{AB} + \lambda(B.\mathfrak{S}_{CB} - C\mathfrak{S}_{B^2}) + \mu(A.\mathfrak{S}_{AC} - C.\mathfrak{S}_{A^2}) \\ &\qquad + \lambda\mu(A.\mathfrak{S}_{BC^2} - C.\mathfrak{S}_{BCA}) \\ &= \mathfrak{V}_{AB} + \lambda(B.\mathfrak{S}_{BC} - B^2C) + \mu(A.\mathfrak{S}_{CA} - A^2C) - \lambda\mu.C.\mathfrak{S}_{ABC}. \end{aligned}$$

En opérant par $\mathfrak{S}_B\times$, il vient

$$0 = \mu(\mathfrak{S}_{AB}.\mathfrak{S}_{AC} - A^2.\mathfrak{S}_{BC}) - \lambda\mu.\mathfrak{S}_{BC}.\mathfrak{S}_{ABC},$$

d'où l'on tire

$$\lambda.\mathfrak{S}_{ABC} = \frac{\mathfrak{S}_{AB}.\mathfrak{S}_{AC}}{\mathfrak{S}_{BC}} - A^2;$$

et de même, en opérant par $\mathfrak{S}_A \times$,

$$\mu.\mathfrak{S}_{ABC} = \frac{\mathfrak{S}_{BC}.\mathfrak{S}_{BA}}{\mathfrak{S}_{CA}} - B^2.$$

La symétrie de ces formules fait voir qu'en identifiant l'une des droites précédentes avec celle qui rencontrerait la hauteur CC′, on trouverait pour λ ou μ la même valeur, et de plus

$$\nu.\mathfrak{S}_{ABC} = \frac{\mathfrak{S}_{CA}.\mathfrak{S}_{CB}}{\mathfrak{S}_{AB}} - C^2.$$

On peut donc toujours mener par chaque sommet d'un tétraèdre une droite déterminée, rencontrant les quatre hauteurs. Donc ces quatre hauteurs sont rencontrées par quatre droites différentes; elles sont donc des génératrices d'un même système d'un hyperboloïde gauche.

On peut encore énoncer la proposition que nous venons de démontrer, en disant que si, par chaque arête d'un angle trièdre, on mène un plan perpendiculaire à la face opposée, ces trois plans ont une intersection commune.

304. Ce théorème peut encore se démontrer plus directement de la manière suivante.

Soient

$$\mathfrak{S}_{AX} = 0, \quad \mathfrak{S}_{BX} = 0, \quad \mathfrak{S}_{CX} = 0$$

les équations des trois faces. L'intersection des deux dernières est $\parallel \mathfrak{V}_{BC}$ (art. 307), et par suite la normale au plan $\parallel A$ et passant par l'intersection des deux faces en question sera perpendiculaire à $\mathfrak{V}_{BC}$; cette normale sera donc parallèle à

$$\mathfrak{V}(A.\mathfrak{V}_{BC}).$$

Donc le plan aura pour équation

$$\mathfrak{S}[X.\mathfrak{V}(A.\mathfrak{V}_{BC})] = 0.$$

On a d'ailleurs [art. 196, (9)]

$$\mathfrak{V}(A.\mathfrak{V}_{BC}) = C.\mathfrak{S}_{AB} - B.\mathfrak{S}_{AC}.$$

Donc l'équation devient

$$0 = \mathfrak{S}(\text{xc}.\mathfrak{S}\text{AB} - \text{xb}.\mathfrak{S}\text{AC}) = \mathfrak{S}\text{AB}.\mathfrak{S}\text{CX} - \mathfrak{S}\text{AC}.\mathfrak{S}\text{BX}.$$

En formant par des permutations cycliques les équations des deux autres plans, et ajoutant les trois équations ainsi obtenues, la somme esf identiquement nulle, ce qui démontre le théorème.

305. *Étant donné un tétraèdre* OABC, *déterminer un système de trois axes rectangulaires, dont chacune passe par deux arêtes opposées de ce tétraèdre.*

Le sommet O étant pris pour origine, soit x le vecteur du point d'intersection des axes cherchés XI_1, XI_2, XI_3. La condition pour que le vecteur XI_1 coupe l'arête OA sera

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{S}\text{I}_1\text{AX} = 0,$$

et pour qu'il coupe l'arête opposée BC, il faudra que l'on ait

$$(\beta) \quad \mathfrak{S}[\text{I}_1(\text{B}-\text{C})(\text{X}-\text{B})] = 0, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{S}\{\text{I}_1[(\text{B}-\text{C})\text{X}-\text{BC}]\} = 0.$$

On a deux autres équations semblables à (α), et deux autres semblables à (β). Si donc on pose

$$\text{B}-\text{C} = \text{A}', \quad \mathfrak{V}\text{BC} = \text{A}'', \quad \mathfrak{V}\text{A}'\text{A} = \text{A}''',$$

et de même pour les autres, on aura les six équations

$$\mathfrak{S}\text{I}_1\text{AX} = 0, \qquad \mathfrak{S}\text{I}_1\text{A}'\text{X} - \mathfrak{S}\text{I}_1\text{A}'' = 0,$$
$$\mathfrak{S}\text{I}_2\text{BX} = 0, \qquad \mathfrak{S}\text{I}_2\text{B}'\text{X} - \mathfrak{S}\text{I}_2\text{B}'' = 0,$$
$$\mathfrak{S}\text{I}_3\text{CX} = 0, \qquad \mathfrak{S}\text{I}_3\text{C}'\text{X} - \mathfrak{S}\text{I}_3\text{C}'' = 0.$$

Des deux équations en I_1 il résulte que I_1 est perpendiculaire aux deux vecteurs $\mathfrak{V}\text{AX}$, $(\mathfrak{V}\text{A}'\text{X} - \text{A}'')$, et par suite parallèle au vecteur de leur produit

$$\mathfrak{V}[\mathfrak{V}\text{AX}.(\mathfrak{V}\text{A}'\text{X} - \text{A}'')],$$

lequel est égal [art. 196, (9), et art. 198, (13)] à

$$\text{X}.\mathfrak{S}\text{AXA}' - \text{A}'.\mathfrak{S}\text{AXX} - \text{A}.\mathfrak{S}\text{A}''\text{X} + \text{X}.\mathfrak{S}\text{AA}''$$
$$= -\text{A}.\mathfrak{S}\text{A}''\text{X} + \text{X}(\mathfrak{S}\text{AA}'' + \mathfrak{S}\text{A}'''\text{X}).$$

On obtiendra de même les expressions des vecteurs parallèles à I_2 et à I_3. Remplaçant I_1, I_2, I_3 par ces valeurs dans les conditions de perpendicularité

$$\mathfrak{S} I_2 I_3 = 0, \quad \mathfrak{S} I_3 I_1 = 0, \quad \mathfrak{S} I_1 I_2 = 0,$$

on obtiendra trois équations du 4e ordre en X. Donc l'origine cherchée est donnée par l'intersection des trois surfaces du 4e ordre.

306. L'équation

(1) $$\mathfrak{S} AX = 0$$

exprime que X est une perpendiculaire quelconque au vecteur A; donc c'est l'équation du plan perpendiculaire à A, mené par l'origine.

Pour trouver cette équation directement, remarquons que, B et C étant deux vecteurs perpendiculaires à A, l'équation de ce plan peut s'écrire (art. 80)

$$X = tB + uC.$$

En opérant par $\mathfrak{S} A \times$, on éliminera les deux indéterminées t, u.

On peut aussi n'en éliminer qu'une, en opérant par $\mathfrak{V} B \times$, ce qui donne

$$\mathfrak{V} BX = t\mathfrak{V} BB + u\mathfrak{V} BC = uA \times \text{une quantité réelle},$$

A étant parallèle à $\mathfrak{V} BC$, ou simplement

$$\mathfrak{V} BX = uA.$$

On tire de là

$$0 = \mathfrak{V}(A.\mathfrak{V} BX) = X.\mathfrak{S} AB - B.\mathfrak{S} AX,$$

d'où résulte, à cause de $\mathfrak{S} AB = 0$, $\mathfrak{S} AX = 0$, c'est-à-dire l'équation (7).

Pareillement

(8) $$\mathfrak{S}[A(X - B)] = 0$$

est l'équation du plan mené par le point B perpendiculairement

à A. Cette équation est, comme la précédente, susceptible de diverses formes.

En général, toute équation de la forme

$$\mathfrak{S}\text{AX} = c$$

peut être identifiée avec l'équation (8), et représente un plan perpendiculaire au vecteur A. Pour avoir sa distance à l'origine, posons $\text{X} = \text{A}t$. Il vient

$$\mathfrak{S}\text{A}^2 t = \text{A}^2 t = c,$$

d'où

$$t = \frac{c}{\text{A}^2}, \qquad \text{X} = \frac{c}{\text{A}}, \qquad \mathfrak{T}\text{X} = \frac{c}{\mathfrak{T}\text{A}}:$$

pour la distance cherchée.

307. L'intersection des deux plans

$$(9) \qquad \mathfrak{S}[\text{A}(\text{X}-\text{B})] = 0, \qquad \mathfrak{S}[\text{A}'(\text{X}-\text{B}')] = 0$$

contient tous les points dont le vecteur X satisfait à la fois à ces deux équations. Mais, les vecteurs A, A', $\mathfrak{V}\text{AA}'$ n'étant pas coplanaires, on a [art. 199, (16)]

$$\text{X}.\mathfrak{S}(\text{AA}'.\mathfrak{V}\text{AA}') = \mathfrak{V}(\text{A}'.\mathfrak{V}\text{AA}').\mathfrak{S}\text{AX} + \mathfrak{V}(\mathfrak{V}\text{AA}'.\text{A}).\mathfrak{S}\text{A}'\text{X} + \mathfrak{V}\text{AA}'.\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\text{AA}'.\text{X}),$$

ou, en ayant égard aux équations (9),

$$-\text{X}.(\mathfrak{T}.\mathfrak{V}\text{AA}')^2 = \mathfrak{V}(\text{A}'.\mathfrak{V}\text{AA}').\mathfrak{S}\text{AB} + \mathfrak{V}(\mathfrak{V}\text{AA}'.\text{A}).\mathfrak{S}\text{A}'\text{B}' + \mathfrak{V}\text{AA}'.\mathfrak{S}\text{AA}'\text{X}.$$

ou enfin, en remarquant que $\mathfrak{S}\text{AA}'\text{X}$ est une quantité réelle indéterminée, que nous représenterons par t,

$$(10) \quad \begin{cases} -\text{X}.(\mathfrak{T}.\mathfrak{V}\text{AA}')^2 \\ \quad = \mathfrak{V}(\text{A}'.\mathfrak{V}\text{AA}').\mathfrak{S}\text{AB} + \mathfrak{V}(\mathfrak{V}\text{AA}'.\text{A}).\mathfrak{S}\text{A}'\text{B}' + t.\mathfrak{V}\text{AA}', \end{cases}$$

expression du vecteur de la droite d'intersection des deux plans (9). Cette équation est moins commode dans la pratique que les deux équations simultanées (9).

Quand les deux plans donnés passent par l'origine, on a $B = B' = 0$, d'où l'on tire, pour l'équation de l'intersection,

$$X = t.\mathfrak{V}AA'.$$

308. L'équation du plan passant par l'origine et par l'intersection des deux plans (9) sera

$$\mathfrak{S}A'B'.\mathfrak{S}AX - \mathfrak{S}AB.\mathfrak{S}A'X = 0$$

ou

$$\mathfrak{S}[(A.\mathfrak{S}A'B' - A'.\mathfrak{S}AB)X] = 0.$$

C'est là, en effet, l'équation d'un plan passant par l'origine; de plus, si X est tel que l'on ait $\mathfrak{S}AX = \mathfrak{S}AB$, on aura aussi $\mathfrak{S}A'X = \mathfrak{S}A'B'$, et les équations (9) seront toutes les deux vérifiées.

On voit par là que le vecteur

$$A.\mathfrak{S}A'B' - A'.\mathfrak{S}AB$$

est perpendiculaire à la ligne d'intersection (10) des deux plans (9), ainsi qu'à tout vecteur mené de l'origine à un point de cette ligne.

309. Cherchons *la distance d'un point donné* P *au plan* $\mathfrak{S}A(X - B) = 0$. La perpendiculaire abaissée de P sur le plan étant parallèle au vecteur A, aura pour équation

$$X = tA + P,$$

et la longueur de la perpendiculaire sera celle de $X - P = tA$. Pour déterminer t, opérons par $\mathfrak{S}A\times$, ce qui donne, en vertu de l'équation du plan,

$$\mathfrak{S}[A(tA + B)] = tA^2 + \mathfrak{S}AP = \mathfrak{S}AB,$$

d'où

(1) $$\Pi = tA = -A^{-1}.\mathfrak{S}A(P - B),$$

expression du vecteur qui va perpendiculairement du point P vers le plan.

Si le plan passe par l'origine, alors $B = 0$, et l'on a

$$\Pi = - A^{-1} \mathfrak{S} A P.$$

La longueur de la perpendiculaire Π donnée par l'équation (1) est

$$(2) \qquad \mathfrak{T}\Pi = \mathfrak{T}A^{-1}.\mathfrak{T}\mathfrak{S}A(P-B) = \mp \mathfrak{S}[\mathfrak{U}A.(P-B)].$$

310. *Trouver l'équation d'un plan passant par trois points donnés* A, B, C.

Si X est le vecteur d'un point du plan, $X - A$, $X - B$, $B - C$ seront trois vecteurs coplanaires. On aura donc

$$\begin{aligned} 0 &= \mathfrak{S}[(X - A)(X - B)(B - C)] \\ &= \mathfrak{S}[X(BC + CA + AB)] - \mathfrak{S}ABC \\ &= \mathfrak{S}[X(\mathfrak{V}BC + \mathfrak{V}CA + \mathfrak{V}AB)] - \mathfrak{S}ABC. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$D = \mathfrak{V}BC + \mathfrak{V}CA + \mathfrak{V}AB,$$

comme on a $\mathfrak{S}DA = \mathfrak{S}ABC$, l'équation pourra se mettre sous la forme (8)

$$\mathfrak{S}D(X - A) = 0.$$

Pour avoir le vecteur perpendiculaire mené de l'origine au plan, on posera $X = tD$, et l'équation

$$\mathfrak{S}XD - \mathfrak{S}ABC = 0$$

deviendra

$$tD^2 = \mathfrak{S}ABC,$$

d'où

$$X = tD = D^{-1}.\mathfrak{S}ABC = \frac{\mathfrak{S}ABC}{\mathfrak{V}BC + \mathfrak{V}CA + \mathfrak{V}AB};$$

expression du vecteur cherché, d'où l'on peut déduire de nombreuses propriétés du tétraèdre.

$\mathfrak{S}ABC$ étant [art. 200, (17)] le sextuple du volume du tétraèdre OABC, l'équation

$$\mathfrak{S}ABC = \mathfrak{S}XBC + \mathfrak{S}XCA + \mathfrak{S}XAB$$

aurait pu s'obtenir immédiatement, en remarquant que, si X est

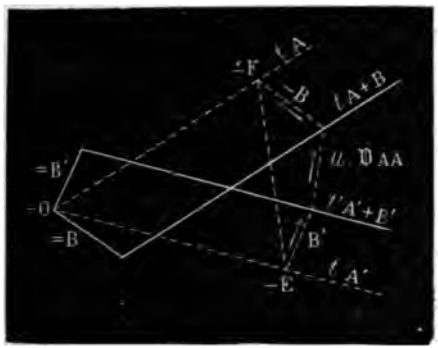
un point du plan de la base ABC, la volume du tétraèdre est égal à la somme algébrique des volumes des tétraèdres OXBC, OXCA, OXAB.

311. Soient les deux droites

$$\text{x} = t\text{A} + \text{B}, \qquad \text{x} = t'\text{A}' + \text{B}'.$$

L'équation d'un plan parallèle à ces deux droites et passant par le point C sera

Fig. 22.



$$(11) \quad \mathfrak{S}[\text{AA}'(\text{x}-\text{c})] = 0,$$

cette équation exprimant que les trois vecteurs A, A', x — c sont coplanaires.

Si $\text{c} = \text{B}$, le plan contiendra la première droite; si $\text{c} = \text{B}'$, il contiendra la seconde.

Si $u.\mathfrak{V}\text{AA}'$ est la plus courte distance de ces deux lignes (art. 301), le vecteur $\text{EF} = \text{B}' + u.\mathfrak{V}\text{AA}' - \text{B}$ (*fig.* 22) étant coplanaire avec $t\text{A}$ et avec $t'\text{A}'$, on a

$$\mathfrak{S}[\text{AA}'(\text{B}' - \text{B} + u.\mathfrak{V}\text{AA}')] = 0.$$

Cette équation peut s'écrire ainsi

$$\mathfrak{S}[(\mathfrak{S}\text{AA}' + \mathfrak{V}\text{AA}')(\text{B} - \text{B}' - u.\mathfrak{V}\text{AA}')] = 0,$$

ou

$$u(\mathfrak{V}\text{AA}')^2 + \mathfrak{S}[\mathfrak{V}\text{AA}'.(\text{B}' - \text{B})] = 0,$$

ou, en divisant par $\mathfrak{T}(\mathfrak{V}\text{AA}')$,

$$\mathfrak{T}(u.\mathfrak{V}\text{AA}') = \mathfrak{T}\mathfrak{S}[(\text{B}' - \text{B}).\mathfrak{U}(\mathfrak{V}\text{AA}')],$$

comme nous l'avions trouvé (art. 302) par une autre voie.

312. ***Trouver l'équation d'un plan passant par l'origine et faisant des angles égaux avec trois lignes données. Déterminer la valeur commune de ces angles.***

Soient A, B, C les vecteurs unitaires qui marquent les directions des trois lignes données, et

$$\mathfrak{S}\text{RX} = 0$$

l'équation du plan cherché. Le cosinus de l'angle de ce plan avec A, ou le sinus de l'argument de la biradiale (A, R) est donné par l'équation

$$\mathfrak{S}\text{AR} = \mathfrak{T}\text{R}.\sin\varphi.$$

On devra donc avoir

$$\mathfrak{S}\text{AR} = \mathfrak{S}\text{BR} = \mathfrak{S}\text{CR} = t,$$

d'où

$$\sin\varphi = \frac{t}{\mathfrak{T}\text{R}}.$$

Or on a (art. 199)

$$\begin{aligned}\text{R}.\mathfrak{S}\text{ABC} &= \mathfrak{V}\text{BC}.\mathfrak{S}\text{AR} + \mathfrak{V}\text{CA}.\mathfrak{S}\text{BR} + \mathfrak{V}\text{AB}.\mathfrak{S}\text{CR} \\ &= t(\mathfrak{V}\text{BC} + \mathfrak{V}\text{CA} + \mathfrak{V}\text{AB}).\end{aligned}$$

Donc l'équation du plan sera

$$\mathfrak{S}[\text{X}(\mathfrak{V}\text{BC} + \mathfrak{V}\text{CA} + \mathfrak{V}\text{AB})] = 0.$$

et le sinus de l'angle cherché sera

$$\sin\varphi = \frac{\mathfrak{S}\text{ABC}}{\mathfrak{T}(\mathfrak{V}\text{BC} + \mathfrak{V}\text{CA} + \mathfrak{V}\text{AB})}.$$

313. *Lieu des milieux des droites parallèles à un plan donné et s'appuyant sur deux droites fixes.*

Soient $\mathfrak{S}\text{CX} = 0$ l'équation du plan donné;

$$\text{X} = t\text{A} + \text{B}, \quad \text{X}' = t'\text{A}' + \text{B}'$$

les équations des droites fixes, et Y le milieu de X′ — X. On aura les relations

$$\begin{aligned} 2\text{Y} &= t\text{A} + \text{B} + t'\text{A}' + \text{B}', \\ 0 = \mathfrak{S}[\text{C}(\text{X}' - \text{X})] &= \mathfrak{S}[\text{C}(t'\text{A}' + \text{B}' - t\text{A} - \text{B})].\end{aligned}$$

Cette dernière équation donne une relation linéaire entre t et t',

de sorte que, en éliminant t' entre cette équation et la précédente, on obtient pour le lieu cherché une équation de la forme

$$\mathrm{Y} = t\mathrm{M} + \mathrm{N};$$

ce lieu est donc une droite.

Exemple. Soient

$$\mathfrak{S}[(\mathrm{I}_1 - 2\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3)\mathrm{X}] = 0,$$

$$\mathrm{X} = (\mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_2)t + 3\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_3, \quad \mathrm{X}' = \mathrm{I}_3 t' + 3\mathrm{I}_2 - 2\mathrm{I}_3,$$

les équations du plan et des deux droites. On aura

$$2\mathrm{Y} = (\mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_2)t + \mathrm{I}_3 t' + 3\mathrm{I}_1 + 3\mathrm{I}_2 - 3\mathrm{I}_3;$$

$$0 = \mathfrak{S}\{(\mathrm{I}_1 - 2\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3)[(\mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_2)t - \mathrm{I}_3 t' + 3\mathrm{I}_1 - 3\mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3]\}$$
$$= -t - 3 + 4t - 6 + t' - 1,$$

d'où

$$t' = 10 - 3t,$$

et par suite

$$2\mathrm{Y} = (\mathrm{I}_1 + 2\mathrm{I}_2 - 3\mathrm{I}_3)t + 3\mathrm{I}_1 + 3\mathrm{I}_2 + 7\mathrm{I}_3.$$

Telle est l'équation du lieu cherché.

314. Soit ABC un triangle, AT la tangente en A au cercle circonscrit, prolongée dans le sens direct ABC. L'angle γ des deux vecteurs BC, CA est égal au supplément de celui des vecteurs TA, AB. En désignant donc par I l'axe du plan ABC, et par k une quantité positive quelconque, abstraction faite de sa valeur, on aura

$$\mathrm{BC.CA} = -k.I^{\gamma}, \quad \mathrm{TA.AB} = -k.I^{\pi-\alpha} = k.I^{\alpha},$$

d'où $\mathrm{AT.CA} = k.I^{-\alpha}$, et par suite

$$\mathrm{TA.AB.BC.CA} = -k;$$

ou, en opérant par $(\mathrm{TA})^{-1} = \frac{\mathrm{AT}}{(\mathfrak{T}\mathrm{AT})^2}$ premier facteur,

$$\mathrm{AB.BC.CA} = -k.\mathrm{AT}.$$

Soit maintenant ABCD un quadrilatère gauche, AU la

est le vecteur allant de l'extrémité de P perpendiculairement vers la droite

(5) $$\mathrm{X} = t\mathrm{A} + \mathrm{B}.$$

On peut le voir plus simplement comme il suit. Si X est le pied de la perpendiculaire, celle-ci sera $\mathrm{X} - \mathrm{P}$. Cette droite devant être perpendiculaire à $\mathrm{X} = t\mathrm{A} + \mathrm{B}$, ou à sa parallèle A, on aura

$$\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{X} - \mathrm{P}) = 0, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{S}\mathrm{A}(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}) = 0,$$

d'où

$$t\mathrm{A} = \mathrm{A}^{-1}\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{P} - \mathrm{B}),$$
$$\mathrm{X} - \mathrm{P} = t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P} = -\mathrm{A}^{-1}[\mathrm{A}(\mathrm{P} - \mathrm{B}) - \mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{P} - \mathrm{B})]$$
$$= -\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{V}\mathrm{A}(\mathrm{P} - \mathrm{B}),$$

comme ci-dessus. On a, pour la longueur de la perpendiculaire,

$$\mathfrak{T}\Pi = \mp\,\mathfrak{T}\mathfrak{V}[\mathfrak{U}\mathrm{A}.(\mathrm{P} - \mathrm{B})].$$

301. Le vecteur qui joint le point P à un point quelconque de la droite (5) est égal à

$$t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}.$$

Pour que sa longueur soit un minimum, il faudra donc que l'on ait

$$d\mathfrak{T}(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}) = 0,$$

ou (art. 243)

$$0 = \mathfrak{T}(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P})\,d\mathfrak{T}(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P})$$
$$= -\mathfrak{S}[(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}).d(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P})]$$
$$= -\mathfrak{S}[(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}).\mathrm{A}].dt = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{S}[(t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P})\mathrm{A}] = 0,$$

et par suite que le vecteur $t\mathrm{A} + \mathrm{B} - \mathrm{P}$ soit perpendiculaire à A ou à $t\mathrm{A}$.

Cette équation donne

$$t\mathrm{A}^2 + \mathfrak{S}[\mathrm{A}(\mathrm{B} - \mathrm{P})] = 0, \quad \text{ou} \quad t\mathrm{A} = -\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}[\mathrm{A}(\mathrm{B} - \mathrm{P})].$$

Donc le vecteur perpendiculaire à A ou à la droite (5) est

$$\mathrm{B} - \mathrm{P} - \mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{S}[\mathrm{A}(\mathrm{B}-\mathrm{P})] = \mathrm{A}^{-1}\{\mathrm{A}(\mathrm{B}-\mathrm{P}) - \mathfrak{S}[\mathrm{A}(\mathrm{B}-\mathrm{P})]\}$$
$$= \mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{V}[\mathrm{A}(\mathrm{B}-\mathrm{P})] = -\mathrm{A}^{-1}.\mathfrak{V}[\mathrm{A}(\mathrm{P}-\mathrm{B})],$$

comme on l'a trouvé dans l'art. précédent.

302. Cherchons maintenant *la plus courte distance de deux droites*, données par les équations

$$\mathrm{x} = t\mathrm{A} + \mathrm{B}, \qquad \mathrm{x}' = t'\mathrm{A}' + \mathrm{B}'.$$

On posera $d\mathfrak{T}(\mathrm{x}' - \mathrm{x}) = 0$, ou

$$0 = \mathfrak{S}[(\mathrm{x}'-\mathrm{x})(d\mathrm{x}'-d\mathrm{x})] = \mathfrak{S}[(\mathrm{x}'-\mathrm{x})(\mathrm{A}'dt' - \mathrm{A}dt)].$$

t et t' étant deux variables indépendantes, l'équation se décomposera dans ces deux-ci

$$\mathfrak{S}.(\mathrm{x}'-\mathrm{x})\mathrm{A} = 0, \qquad \mathfrak{S}.(\mathrm{x}'-\mathrm{x})\mathrm{A}' = 0,$$

équations qui expriment que la plus courte distance des deux droites est leur perpendiculaire commune.

Cette perpendiculaire est parallèle à $\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}'$, et par suite on a

(6) $$\mathrm{x}'-\mathrm{x} = t'\mathrm{A}' + \mathrm{B}' - t\mathrm{A} - \mathrm{B} = u.\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}'.$$

En opérant sur cette équation par $\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{A}'\times$, il vient

$$\mathfrak{S}[\mathrm{A}\mathrm{A}'(\mathrm{B}'-\mathrm{B})] = u.\mathfrak{S}(\mathrm{A}\mathrm{A}'.\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}') = u(\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}')^2,$$

ce qui détermine le coefficient u. La plus courte distance cherchée est

$$\mathfrak{T}(\mathrm{x}'-\mathrm{x}) = \mathfrak{T}(u.\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}') = \mathfrak{T}\frac{\mathfrak{S}[\mathrm{A}\mathrm{A}'(\mathrm{B}'-\mathrm{B})]}{\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}'} = \frac{\mathfrak{S}[\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}'.(\mathrm{B}'-\mathrm{B})]}{\mathfrak{T}(\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}')}$$
$$= \mathfrak{T}\mathfrak{S}[\mathfrak{U}\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}'.(\mathrm{B}'-\mathrm{B})],$$

le signe $\mathfrak{T}$ mis devant $\mathfrak{S}$ indiquant simplement que la valeur numérique de la quantité doit être prise positivement.

Pour trouver les extrémités de la perpendiculaire commune, opérons sur (6) par $\mathfrak{S}.\mathrm{A}\times$ et par $\mathfrak{S}.\mathrm{A}'\times$; on trouvera ainsi

$$\mathfrak{S}.\mathrm{A}(\mathrm{x}'-\mathrm{x}) = \mathfrak{S}(t'\mathrm{A}\mathrm{A}' + \mathrm{A}\mathrm{B}' - t\mathrm{A}^2 - \mathrm{A}\mathrm{B}) = u.\mathfrak{S}(\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{A}\mathrm{A}') = 0,$$

mètre inconnu, dont nous pourrons supposer le module $\mathfrak{T}\text{Y} = 1$. Les perpendiculaires à ce plan seront (art. 308)

$$-\text{Y}.\mathfrak{S}\text{AY}, \qquad -\text{Y}.\mathfrak{S}\text{A}'\text{Y}, \ldots .$$

Les carrés de ces expressions étant

$$-(\mathfrak{S}\text{AY})^2, \qquad -(\mathfrak{S}\text{A}'\text{Y})^2, \ldots,$$

on voit que la condition de la question revient à rendre la quantité $\sum(\mathfrak{S}\text{AY})^2$ un maximum, ce qui donne l'équation

(1) $$\sum(\mathfrak{S}\text{AY}.d\mathfrak{S}\text{AY}) = 0.$$

De plus, de l'hypothèse que Y est un vecteur unitaire ou que $(\mathfrak{T}\text{Y})^2 = 1$, on tire (art. 251)

(2) $$\mathfrak{S}\text{Y}d\text{Y} = 0.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$\text{A}.\mathfrak{S}\text{AY} + \text{A}'.\mathfrak{S}\text{A}'\text{Y} + \ldots = \text{R},$$

l'équation (1) pourra se mettre sous la forme

(3) $$\mathfrak{S}\text{R}d\text{Y} = 0.$$

Les équations (2) et (3) expriment que les deux vecteurs Y et R doivent être ensemble perpendiculaires au vecteur $d\text{Y}$, dans toutes les positions, en nombre infini, que celui-ci peut occuper. Il faut donc que ces deux vecteurs soient parallèles, ce qui donne la condition $\text{R} = g\text{Y}$, ou

$$\sum \text{A}.\mathfrak{S}\text{AY} = g\text{Y},$$

g étant un nombre réel.

Si l'on représente par $\square\text{Y}$ le premier membre de cette équation, on voit que l'opération $\square$ ne doit pas changer la direction de Y, d'où l'on conclut (art. 236 et suiv.) que Y doit être une des trois directions correspondantes aux racines de l'équation $\varphi(g) = 0$. En outre, la fonction $\square$ étant conjuguée à elle-même, ces trois directions seront rectangulaires entre elles. Si, comme cela a lieu généralement, les trois valeurs de

g sont inégales, l'une d'elles correspondra à un maximum, une autre à un minimum, et la troisième ne correspondra ni à un maximum, ni à un minimum.

317. *Deux des arêtes d'un angle trièdre trirectangle se mouvant chacune dans un plan donné, et le sommet étant fixe à l'origine des coordonnées, trouver le lieu de la troisième arête.*

Soient X, Y, Z les trois arêtes mobiles, A et B les axes des deux plans donnés. On aura les conditions

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{YZ}=0,\quad \mathfrak{S}\,\mathrm{ZX}=0,\quad \mathfrak{S}\,\mathrm{XY}=0,\quad \mathfrak{S}\,\mathrm{AY}=0,\quad \mathfrak{S}\,\mathrm{BZ}=0,$$

entre lesquelles il s'agit d'éliminer Y et Z. Ces deux vecteurs dépendent de 6 paramètres, parmi lesquels 2 (les modules) doivent rester arbitraires; on n'aura donc que 4 paramètres à éliminer entre les 5 équations. On pourrait d'ailleurs compléter le nombre d'équations nécessaire pour l'élimination des 6 paramètres, en joignant aux équations précédentes ces deux-ci

$$\mathfrak{T}\,\mathrm{Y}=g,\qquad \mathfrak{T}\,\mathrm{Z}=h,$$

g et h étant arbitraires.

Des équations $\mathfrak{S}\,\mathrm{AY}=0$, $\mathfrak{S}\,\mathrm{XY}=0$, on conclut que Y est perpendiculaire au plan (A, X), d'où

$$\mathrm{Y}=t.\mathfrak{V}\,\mathrm{AX},\qquad \text{et de même,}\qquad \mathrm{Z}=u.\mathfrak{V}\,\mathrm{BX}.$$

Portant ces valeurs dans $\mathfrak{S}\,\mathrm{YZ}=0$, il vient

$$\mathfrak{S}\,(\mathfrak{V}\,\mathrm{AX}.\mathfrak{V}\,\mathrm{BX})=0,$$

ou, à cause de $\mathfrak{V}\,\mathrm{BX}=-\mathfrak{V}\,\mathrm{XB}$,

$$0=\mathfrak{S}(\mathfrak{V}\,\mathrm{AX}.\mathfrak{V}\,\mathrm{XB})=\mathfrak{S}[(\mathrm{AX}-\mathfrak{S}\,\mathrm{AX})(\mathrm{XB}-\mathfrak{S}\,\mathrm{XB})],$$

et, en réduisant,

$$0=\mathfrak{S}\,\mathrm{AX}.\mathfrak{S}\,\mathrm{BX}-\mathfrak{S}\,\mathrm{AB}.\mathrm{X}^2,$$

équation du second degré, qui est celle d'un cône dont les sections circulaires sont perpendiculaires à A et à B (art. 329).

CHAPITRE XII.

LA SPHÈRE ET LES SURFACES DU SECOND ORDRE.

---

§ Ier.

La sphère et le cône.

318. L'équation

(1) $$\mathfrak{T}x = \mathfrak{T}a, \quad \text{ou} \quad x^2 = a^2$$

représente une sphère de rayon $\mathfrak{T}a$, ayant son centre à l'origine.

On peut donner à cette équation diverses formes, qui correspondront à diverses propriétés de la sphère. De l'égalité

$$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2 + ax - xa = x^2 - a^2 + 2\mathfrak{V}ax,$$

il résulte, au lieu de l'équation (1), l'équation

$$\mathfrak{S}.(x+a)(x-a) = 0,$$

qui exprime que les vecteurs $x + a$ et $x - a$ sont perpendiculaires entre eux, c'est-à-dire que la sphère est le lieu des sommets des angles droits dont les côtés passent par les extrémités a et $-a$ d'un de ses diamètres.

On en tire encore

$$\mathfrak{T}(x+a)(x-a) = 2\mathfrak{T}\mathfrak{V}ax.$$

L'aire du rectangle compris entre des cordes $x + a$, $x - a$ est donc le quadruple de l'aire du triangle compris entre les vecteurs a et x.

On a (art. 201)

$$x = (x+a)^{-1}a(x+a),$$

ce qui fait voir que l'angle des vecteurs a et x est double de

l'angle des vecteurs A et $X+A$, lequel est égal à un angle inscrit, s'appuyant sur le même arc que l'angle au centre.

319. Si le centre de la sphère est en B, l'équation de la sphère sera alors

(2) $\mathfrak{T}(X-B)=\mathfrak{T}A,$ ou $X^2-2\mathfrak{S}BX=A^2-B^2.$

Si $\mathfrak{T}B=\mathfrak{T}A$, le cercle passe par l'origine, et son équation est

$$X^2-2\mathfrak{S}BX=0, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{S}X(X-2B)=0, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{S}\frac{2B}{X}=1,$$

ce qui fait voir encore que l'angle inscrit dans le demi-grand cercle est droit.

320. Réciproquement, cherchons le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point fixe A sur tous les plans passant par l'origine. Soit

$$\mathfrak{S}MX=0$$

l'équation d'un de ces plans; le vecteur abaissé de A sur ce plan sera (art. 309) $-M^{-1}\mathfrak{S}MA$, et le lieu de son pied sera

(3) $X=A-M^{-1}\mathfrak{S}MA=M^{-1}\mathfrak{V}MA$ (¹).

On tire de l'équation (3), par l'élévation au carré,

$$(X-A)^2=M^{-2}(\mathfrak{S}MA)^2;$$

puis de la même équation, en opérant par $\mathfrak{S}A\times$,

$$\mathfrak{S}AX-A^2=-M^2(\mathfrak{S}MA)^2,$$

d'où, par addition,

$$X^2-\mathfrak{S}AX=0, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{T}\left(X-\frac{A}{2}\right)=\mathfrak{T}\frac{A}{2},$$

ce qui représente une sphère [éq. (2)].

(¹) Remarquons cet exemple d'une équation d'une surface exprimée au moyen des quaternions. Cette équation est *vectorielle*, et, par suite, équivalente à trois équations réelles. Mais elle renferme un vecteur indéterminé M, ou plutôt son verseur, le module disparaissant de cette expression, de manière que la présence de M équivaut seulement à deux indéterminées réelles. Les trois équations équivalent donc à une seule équation entre les coordonnées du point X.

321. *Trouver l'intersection de deux sphères*

$$\mathfrak{T}(x - a) = \mathfrak{T}b, \qquad \mathfrak{T}(x - a') = \mathfrak{T}b'.$$

En élevant au carré et soustrayant, il vient

$$2\mathfrak{S}(a' - a)x = a'^2 - a^2 - (b'^2 - b^2),$$

équation d'un plan perpendiculaire à la ligne des centres $a' - a$. Ce plan est celui de l'intersection des deux sphères, quand elles se coupent, et, dans tous les cas, c'est le plan radical des deux sphères.

322. En différentiant l'équation $\mathfrak{T}x = \mathfrak{T}a$, on a (art. 251)

$$\mathfrak{S}x\,dx = 0,$$

ce qui montre que la corde infiniment petite dx a pour limite une perpendiculaire à l'extrémité du rayon.

Le lieu des positions-limites d'une sécante est donc un plan

$$\mathfrak{S}(\Xi - x)x = 0,$$

ou, à cause de $x^2 = a^2$,

(4) $$\mathfrak{S}\Xi x = a^2.$$

323. *Lieu des projections d'un point de la sphère sur tous les plans tangents.*

Supposons que ce point soit le point a. La perpendiculaire $\Xi - a$ devra être parallèle au rayon x du point de contact, d'où

(5) $$\Xi = a + tx.$$

Il reste maintenant à éliminer x et t entre les équations (4), (5) et l'équation de la sphère $x^2 = a^2$,

En opérant par $\mathfrak{S}\Xi \times$ sur l'équation (5), il vient, en vertu de (4)

$$\Xi^2 = \mathfrak{S}a\Xi + t\mathfrak{S}\Xi x = \mathfrak{S}a\Xi + ta^2,$$

d'où

$$x = \frac{\Xi - a}{t} = \frac{a^2(\Xi - a)}{\Xi^2 - \mathfrak{S}a\Xi}.$$

En prenant les modules des deux membres, il vient, à cause de $X^2 = A^2$,

$$(\Xi^2 - \mathfrak{S} A \Xi)^2 = A^2 (\Xi - A)^2,$$

ce qui est l'équation cherchée. On peut la mettre sous la forme

$$[\mathfrak{S} . \Xi \mathfrak{U} (\Xi - A)]^2 = - A^2.$$

On tire de cette équation, en exprimant les vecteurs en coordonnées ordinaires, et posant $\Xi = \xi_1 I_1 + \xi_2 I_2 + \xi_3 I_3$, $A = a I_1$,

$$-A^2 = a^2 = \left[\mathfrak{S} (\xi_1 I_1 + \xi_2 I_2 + \xi_3 I_3) \frac{(\xi_1 - a) I_1 + \xi_2 I_2 + \xi_3 I_3}{\sqrt{(\xi_1 - a)^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} \right]^2$$

$$= \frac{[\xi_1 (\xi_1 - a) + \xi_2^2 + \xi_3^2]^2}{(\xi_1 - a)^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2},$$

ou, en posant $\xi_1 - a = r \cos p$, $\sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2} = r \sin p$,

$$r = a (1 - \cos p),$$

équation d'une cardioïde, qui engendre, par sa révolution autour de son axe de symétrie, le lieu cherché.

324. *Lieu des centres des sphères tangentes à deux droites non situées dans le même plan.*

En prenant pour origine le milieu de la perpendiculaire commune aux deux droites, leurs équations seront

$$Y = A t + B, \qquad Y = A' t' - B,$$

avec les conditions

$$\mathfrak{S} A B = 0, \qquad \mathfrak{S} A' B = 0.$$

L'équation d'une sphère de rayon r, ayant son centre en Y, est

$$\mathfrak{T} (X - Y) = r,$$

ou, en remplaçant Y par $At + B$, et ayant égard à la condition $\mathfrak{S} AB = 0$,

$$(X - B)^2 - 2t . \mathfrak{S} A X + A^2 t^2 = - r^2.$$

Pour que la sphère soit tangente à la première droite, il faut que cette équation ait deux racines égales en t, ce qui donne

$$(\mathfrak{S}\,\mathrm{A}\mathrm{X})^2 = \mathrm{A}^2[(\mathrm{X}-\mathrm{B})^2 + r^2].$$

On trouvera de même, relativement à la seconde droite,

$$(\mathfrak{S}\,\mathrm{A}'\mathrm{X})^2 = \mathrm{A}'^2[(\mathrm{X}+\mathrm{B})^2 + r^2).$$

Éliminant r^2 entre ces deux équations, il vient

$$\mathrm{A}'^{-2}(\mathfrak{S}\,\mathrm{A}'\mathrm{X})^2 - \mathrm{A}^{-2}(\mathfrak{S}\,\mathrm{A}\mathrm{X})^2 = (\mathrm{X}+\mathrm{B})^2 - (\mathrm{X}-\mathrm{B})^2 = 4\mathfrak{S}\,\mathrm{B}\mathrm{X}.$$

Si l'on prend des axes de coordonnées parallèles respectivement aux vecteurs A, A′, B, on obtient une équation de la forme

$$(x_1 + m x_2)^2 - (x_2 + m x_1)^2 = p x_3;$$

le lieu cherché est donc un paraboloïde hyperbolique.

325. *Équation d'un cône de révolution, dont le sommet est à l'origine.*

Soient X le vecteur d'un point du cône, A un vecteur unitaire pris sur l'axe, $\mathrm{A}t$ la projection de X sur cet axe, α le demi-angle au sommet. On aura

$$\mathfrak{T}(\mathrm{A}t) = t = \cos\alpha . \mathfrak{T}\mathrm{X}.$$

La biradiale $\frac{\mathrm{A}t}{\mathrm{X}}$ a pour argument α et pour module $\cos\alpha$. On a donc

$$\mathfrak{S}\frac{\mathrm{A}t}{\mathrm{X}} = \mathfrak{S}\frac{\mathrm{A}t.\mathrm{X}}{\mathrm{X}^2} = \mathfrak{S}[\cos\alpha(\cos\alpha + I\sin\alpha)] = \cos^2\alpha,$$

d'où $t.\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{X} = \mathrm{X}^2\cos^2\alpha$, et, à cause de $t^2 = -\mathrm{X}^2\cos^2\alpha$,

$$(\mathfrak{S}\,\mathrm{A}\mathrm{X})^2 = -\mathrm{X}^2\cos^2\alpha,$$

équation du cône.

326. Si l'on transporte l'origine au point dont le vecteur est $\mathrm{A}t$, l'équation devient

$$[(\mathfrak{S}\,\mathrm{A}(\mathrm{X}-\mathrm{A}t)]^2 = -(\mathrm{X}+\mathrm{A}t)^2\cos^2\alpha.$$

Coupons le cône par le plan $\mathfrak{S}\text{A}\text{x} = 0$, perpendiculaire à l'axe. Pour que le rayon de la section ainsi formée soit constant, il faut que $\mathfrak{T}\text{x} = r$ soit indépendant de t, et par suite que l'on ait

$$\frac{t^2}{r^2 + t^2} = \cos^2\alpha$$

pour toute valeur de t, et même pour t infini, ce qui exige que l'on ait $\cos^2\alpha = 1$. Alors le cône deviendra un cylindre de révolution, dont l'équation sera ce que devient à la limite l'équation

$$(\mathfrak{S}\text{A}\text{x})^2 - 2t.\mathfrak{S}\text{A}\text{x}.\sin^2\alpha + t^2\sin^2\alpha + \text{x}^2 = 0,$$

d'où, en remarquant que r^2 est la limite constante de $t^2\tan^2\alpha$ pour $t = \infty$ et $\alpha = 0$, et que $t\sin^2\alpha$ est infiniment petit, on tire

$$(\mathfrak{S}\text{A}\text{x})^2 + \text{x}^2 + r^2 = 0,$$

équation du cylindre de révolution.

C'est ce que l'on peut vérifier, en égalant à r la distance constante $\mathfrak{T}(\mathfrak{V}\text{A}\text{x})$ du point x à l'axe (art. 301).

327. *Équation d'une surface de révolution.*

Soit $\text{A}t$ l'axe de révolution passant pas l'origine. La biradiale $\frac{\text{x}}{\text{A}} = \mathfrak{S}\frac{\text{x}}{\text{A}} + \mathfrak{V}\frac{\text{x}}{\text{A}}$ a pour partie réelle le rapport de la composante de x parallèle à A à la longueur constante de A, et le module de son vecteur $\mathfrak{T}\left(\mathfrak{V}\frac{\text{x}}{\text{A}}\right)$ est le rapport de la distance de x à l'axe à cette même longueur de A. L'équation de la surface de révolution sera une relation quelconque entre ces deux quantités,

$$\text{F}\left[\mathfrak{S}\frac{\text{x}}{\text{A}},\ \mathfrak{T}\left(\mathfrak{V}\frac{\text{x}}{\text{A}}\right)\right] = 0,$$

ou, si l'on veut,

$$\text{F}[\mathfrak{S}\text{A}\text{x},\ \mathfrak{T}(\mathfrak{V}\text{A}\text{x})] = 0,$$

l'équation de la courbe méridienne dans son plan étant, en supposant $\mathfrak{T}\text{A} = 1$,

$$\text{F}(x, y) = 0.$$

Si l'on suppose, par exemple, que

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

soit l'équation de la courbe méridienne, celle de l'ellipsoïde de révolution sera

$$\frac{(\mathfrak{S}\,\mathrm{A}\,\mathrm{X})^2}{a^2}+\frac{(\mathfrak{T}\mathfrak{V}\,\mathrm{A}\,\mathrm{X})^2}{b^2}=1,$$

ou, en faisant $\mathrm{A}a=\mathrm{A}_1$, $\mathrm{A}b=\mathrm{A}_2$,

$$\left(\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}_1}\right)^2+\left(\mathfrak{T}\mathfrak{V}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}_2}\right)^2=1.$$

328. *Équation d'un cône du second ordre.*

Les équations

$$\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}}=1,\qquad \mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{X}}=1$$

représentant (art. 306 et 319) la première un plan perpendiculaire au vecteur A, la seconde une sphère de diamètre B, leur ensemble représentera le cercle qui est l'intersection de ces surfaces. Si l'on multiplie chaque vecteur X de ce cercle par une indéterminée r, on aura alors

$$\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}}=r,\qquad \mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{X}}=\frac{1}{r},$$

et le lieu des extrémités de tous les vecteurs sera un cône ayant pour sommet l'origine et s'appuyant sur le cercle en question. Son équation, qui s'obtiendra en éliminant r, sera

(1) $$\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}}.\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{X}}=1.$$

Pour que ce cône soit réel, il faut que le plan coupe la sphère, et que par suite on ait $\mathfrak{T}\mathrm{A}<\frac{1}{2}\,\mathfrak{T}\mathrm{B}\,(1+\cos \mathrm{A}O\mathrm{B})$.

On peut encore supposer que A et B sont des vecteurs unitaires. En remplaçant alors A par $\alpha\mathrm{A}$, B par $\beta\mathrm{B}$, l'équation devient

(2) $$\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}}.\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{X}}=\frac{\alpha}{\beta}=\gamma,$$

et la condition de réalité devient $\gamma<\frac{1}{2}(1+\cos \mathrm{A}O\mathrm{B})$.

329. L'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{A}\,\mathrm{x}\,.\,\mathfrak{S}\,\mathrm{x}\,\mathrm{B} = \gamma\,\mathrm{A}^2\mathrm{x}^2 = -\,\gamma\,\mathrm{x}^2,$$

et son premier membre ne change pas lorsqu'on échange entre elles les quantités A et B. Donc l'équation du même cône peut encore se mettre sous la forme

$$\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{B}}\,.\,\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{X}} = \gamma,$$

et par suite, outre la section circulaire représentée par les équations

$$\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{A}} = \gamma, \qquad \mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{X}} = 1,$$

il contiendra encore une autre section circulaire, représentée par les équations

$$\mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{X}} = 1, \qquad \mathfrak{S}\,\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{B}} = \gamma,$$

On obtient ainsi les directions des deux systèmes de sections circulaires, dont les unes ont leurs plans perpendiculaires à A, les autres à B.

§ II.

Équation générale des surfaces du second ordre. Étude des surfaces à centre.

330. L'équation réelle générale qui donne le vecteur x d'une surface du second ordre doit évidemment contenir : 1° un terme indépendant de x ; 2° des termes du premier degré en x, réductibles à la forme $\mathfrak{S}A\mathrm{x}B$; 3° des termes du second degré en x, de la forme $\mathfrak{S}A\mathrm{x}B\mathrm{x}C$, A, B, C, ... désignant des quaternions constants.

Le terme $\mathfrak{S}A\mathrm{x}B$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{S}(\mathrm{x}\,\mathfrak{V}BA),$$

ou sous la forme

$$\mathfrak{S}[(a_0 + a_i) \text{x} (b_0 + b_i)] = \mathfrak{S}(a_0 \text{x}\, b_i) + \mathfrak{S}(a_i \text{x}\, b_0) + \mathfrak{S}(a_i \text{x}\, b_i),$$

dont chaque terme peut se ramener à la forme $\mathfrak{S}\text{AX}$, A étant un vecteur connu.

De même, on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(A \text{x} B \text{x} C) &= \mathfrak{S}(C A \text{x} B \text{x}) = \mathfrak{S}(A' \text{x} B \text{x}) = \mathfrak{S}[(a'_0 + a'_i) \text{x} (b_0 + b_i) \text{x}] \\ &= a'_0 b_0 \text{x}^2 + \mathfrak{S}(a'_i \text{x}\, b_i \text{x}) = a'_0 b_0 \text{x}_0 + \mathfrak{S} a'_i \text{x} . \mathfrak{S} b_i \text{x} + \mathfrak{S}(\mathfrak{V} a'_i \text{x} . \mathfrak{V} b_i \text{x}) \\ &= a'_0 b_0 \text{x}^2 + \mathfrak{S} a'_i \text{x} . \mathfrak{S} b_i \text{x} - \mathfrak{S}(a'_i \text{x} . \mathfrak{V} \text{x}\, b_i) \\ &= a'_0 b_0 \text{x}^2 + \mathfrak{S} a'_i \text{x} . \mathfrak{S} b_i \text{x} - \mathfrak{S}(a'_i \text{x}^2 b_i) + \mathfrak{S} a'_i \text{x} . \mathfrak{S} b_i \text{x} \\ &= (a'_0 b_0 - \mathfrak{S} a'_i b_i) \text{x}^2 + 2 \mathfrak{S} a'_i \text{x} . \mathfrak{S} b_i \text{x} . \end{aligned}$$

Donc ce terme se décompose en termes de la forme

$$\mathfrak{S}\text{AX}.\mathfrak{S}\text{BX}, \qquad (\mathfrak{S}\text{AX})^2,$$

dont le dernier est un cas particulier du précédent.

Par conséquent, en introduisant, pour plus de commodité, des coefficients numériques 2, on peut écrire l'équation réelle générale du second degré sous la forme

$$(1) \qquad 2\sum \mathfrak{S}\text{AX}.\mathfrak{S}\text{BX} + \alpha \text{X}^2 + 2\mathfrak{S}\text{CX} = \beta,$$

α, β étant des constantes réelles, A, B, C des vecteurs constants.

331. Transportons l'origine en R, et changeons X en X + R. Il viendra

$$\begin{aligned} 2\sum \{ \mathfrak{S}\text{AX}.\mathfrak{S}\text{BX} + \mathfrak{S}\text{AR}.\mathfrak{S}\text{BX} + \mathfrak{S}\text{AX}.\mathfrak{S}\text{BR} + \mathfrak{S}\text{AR}.\mathfrak{S}\text{BR} \} \\ + \alpha \text{X}^2 + 2\alpha . \mathfrak{S}\text{RX} + \alpha \text{R}^2 + 2\mathfrak{S}\text{CX} + 2\mathfrak{S}\text{CR} = \beta, \end{aligned}$$

d'où les termes du premier degré en X disparaîtront, si l'on pose

$$(2) \qquad \sum (\text{A}.\mathfrak{S}\text{BR} + \text{B}.\mathfrak{S}\text{AR}) + \alpha \text{R} + \text{C} = 0,$$

comme on le voit en opérant sur cette équation par $\mathfrak{S}\text{X}\times$. On obtient ainsi une équation du premier degré par rapport au

vecteur R, telle que nous en avons résolu dans le Chapitre VII. La valeur de R donnera la position du centre [1].

Si l'on pose maintenant, en substituant pour R sa valeur,

$$\gamma = \beta - 2\sum \mathfrak{S}\mathrm{AR}.\mathfrak{S}\mathrm{BR} - 2\mathfrak{S}\mathrm{CR} - \alpha\mathrm{R}^2,$$

l'équation (1) deviendra

$$(3) \qquad 2\sum \mathfrak{S}\mathrm{AX}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \alpha\mathrm{X}^2 = \gamma,$$

équation générale des surfaces à centre du second degré.

Si $\gamma = 0$, l'équation représentera un cône. Nous en avons vu un cas particulier dans l'art. 328.

Si γ est différent de zéro, la surface sera un ellipsoïde ou l'un des deux hyperboloïdes. Nous considérerons seulement le cas de l'ellipsoïde.

En divisant par γ, ce qui altère seulement les modules des constantes, l'équation prendra la forme

$$(4) \qquad 2\sum \mathfrak{S}\mathrm{AX}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + g\mathrm{X}^2 = 1.$$

332. En différentiant, il vient

$$\sum (\mathfrak{S}\mathrm{A}d\mathrm{X}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \mathfrak{S}\mathrm{AX}.\mathfrak{S}\mathrm{B}d\mathrm{X}) + g\mathfrak{S}\mathrm{X}d\mathrm{X} = 0,$$

ou

$$(5) \qquad \mathfrak{S}\left\{d\mathrm{X}\left[\sum(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AX}) + g\mathrm{X}\right]\right\} = 0,$$

et par suite l'équation du plan tangent est, en exprimant que le vecteur $\Xi - \mathrm{X}$ est parallèle à $d\mathrm{X}$,

$$\mathfrak{S}\left\{(\Xi - \mathrm{X})\left[\sum(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AX}) + g\mathrm{X}\right]\right\} = 0,$$

ou, en ayant égard à l'équation (4),

$$(6) \qquad \mathfrak{S}\left\{\Xi\left[\sum(\mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{AX}) + g\mathrm{X}\right]\right\} = 1.$$

---

[1] Nous laisserons de côté les cas où la surface n'est pas douée d'*un centre unique*.

Si donc on pose

$$\text{N} = \sum (\text{A}.\mathfrak{S}\text{BX} + \text{B}.\mathfrak{S}\text{AX}) + g\text{X},$$

l'équation du plan tangent sera

$$\mathfrak{S}\text{N}\Xi = 1,$$

celle de la surface elle-même pouvant s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{S}\text{NX} = 1.$$

D'après l'équation (5), le vecteur N étant perpendiculaire à dX et par suite au plan tangent, le vecteur N^{-1}, perpendiculaire également à ce plan, et satisfaisant à son équation (6), est évidemment le vecteur perpendiculaire abaissé de l'origine sur ce plan.

333. Si nous faisons usage de la notation déjà employée dans le Chapitre VII pour représenter une fonction linéaire et vectorielle, la valeur de N pourra se mettre sous la forme

$$\text{N} = \Box\text{X}.$$

Alors l'équation de la surface et celle du plan tangent s'écriront d'une manière abrégée

(1) $$\mathfrak{S}\text{X}\Box\text{X} = 1,$$

(2) $$\mathfrak{S}\Xi\Box\text{X} = 1.$$

En différentiant l'équation (1), et remarquant que $d\Box\text{X} = \Box d\text{X}$, il vient

$$\mathfrak{S}d\text{X}\Box\text{X} + \mathfrak{S}\text{X}\Box d\text{X} = \text{C}.$$

En remarquant maintenant que, dans le cas actuel, la fonction $\Box$ est conjuguée à elle-même (art. 239) [1], on voit que les deux termes de l'équation précédente sont identiquement égaux; donc l'équation se réduit à

(3) $$\mathfrak{S}d\text{X}\Box\text{X} = 0,$$

---

[1] On vérifie, en effet, facilement que l'on a, quels que soient Ξ et X,

$$\mathfrak{S}\Xi\Box\text{X} = \mathfrak{S}\text{X}\Box\Xi.$$

et l'on est conduit, comme dans l'article précédent, mais par un calcul plus simple, à l'équation du plan tangent

$$\mathfrak{S}(\Xi - \mathrm{x})\square\mathrm{x} = 0,$$

laquelle, en vertu de (1), se réduit à (2).

Si le plan tangent passe au point p, on aura, pour $\Xi = \mathrm{p}$,

$$\mathfrak{S}\mathrm{p}\square\mathrm{x} = 1,$$

ou, la fonction $\square$ étant conjuguée à elle-même,

(4) $$\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{p} = 1,$$

équation du plan de contact des plans tangents menés par p, ou du plan polaire du point p.

334. L'équation

(5) $$\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{x} - 1 + \lambda(\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{p} - 1)^2 = 0$$

représente une surface du second degré passant par l'intersection de la surface (1) avec le plan (4). On en tire, en effet,

$$2\mathfrak{S}\square\mathrm{x}d\mathrm{x} + 2\lambda(\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{p} - 1)\mathfrak{S}\square\mathrm{p}d\mathrm{x} = 0,$$

équation qui, pour les points appartenant au plan (4), se réduit à l'équation (3), d'où l'on conclut que la surface (5) est *tangente* à la surface (1) le long de la courbe d'intersection avec le plan (4).

En écrivant que la surface (5) passe par le point p, on a, pour déterminer λ, l'équation

$$\mathfrak{S}\mathrm{p}\square\mathrm{p} - 1 + \lambda(\mathfrak{S}\mathrm{p}\square\mathrm{p} - 1)^2 = 0,$$

et l'équation (5) devient alors

(6) $$(\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{x} - 1)(\mathfrak{S}\mathrm{p}\square\mathrm{p} - 1) - (\mathfrak{S}\mathrm{x}\square\mathrm{p} - 1)^2 = 0.$$

On peut voir aisément que cette surface est un cône. Transportons, en effet, l'origine en p, en changeant x en $\mathrm{x} + \mathrm{p}$. On

a alors, à cause de la propriété distributive de la fonction $\square$,

$$(\mathfrak{S}\,\mathrm{x}\square\mathrm{x}+2\mathfrak{S}\,\mathrm{x}\square\mathrm{p}+\mathfrak{S}\,\mathrm{p}\square\mathrm{p}-1)(\mathfrak{S}\,\mathrm{p}\square\mathrm{p}-1)$$
$$-(\mathfrak{S}\,\mathrm{x}\square\mathrm{p}+\mathfrak{S}\,\mathrm{p}\square\mathrm{p}-1)^2=0,$$

ou

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{x}\square\mathrm{x}.(\mathfrak{S}\,\mathrm{p}\square\mathrm{p}-1)-(\mathfrak{S}\,\mathrm{x}\square\mathrm{p})^2=0,$$

équation homogène en $\mathfrak{T}\mathrm{x}^2$, et par conséquent représentant un cône. On voit d'ailleurs qu'elle est de la forme (3) (art. 331) pour $\gamma=0$. Donc l'équation (6) est celle du cône circonscrit à la surface (1) et ayant pour sommet le point p.

Si l'on remplace, dans (6), p par $\alpha\mathrm{p}$, puis que l'on fasse α infini, on exprimera que le sommet du cône s'en va à l'infini sur une droite parallèle à p. En divisant l'équation par α, il ne restera plus que les termes du degré le plus élevé en p. On aura ainsi, pour l'équation du cylindre circonscrit à la surface (1) et parallèle au vecteur p,

$$(\mathfrak{S}\,\mathrm{x}\square\mathrm{x}-1).\mathfrak{S}\,\mathrm{p}\square\mathrm{p}-(\mathfrak{S}\,\mathrm{x}\square\mathrm{p})^2=0.$$

335. *Lieu des milieux d'un système de cordes parallèles.*

Soient des cordes parallèles au vecteur l, et Ξ le vecteur du milieu d'une de ces cordes. Les vecteurs des points de rencontre de la corde avec la surface seront $\Xi+\mathrm{l}t$ et $\Xi-\mathrm{l}t$. En substituant ces vecteurs dans l'équation de la surface, on a

$$\mathfrak{S}.(\Xi\pm\mathrm{l}t)\square(\Xi\pm\mathrm{l}t)=1,$$

d'où l'on tire, en vertu des propriétés de la fonction $\square$

$$\mathfrak{S}\,\Xi\square\Xi+t^2\mathfrak{S}\,\mathrm{l}\square\mathrm{l}=1,$$

avec la condition

$$\mathfrak{S}\,\Xi\square\mathrm{l}=0, \tag{7}$$

qui est l'équation du lieu cherché. On voit que ce lieu est un plan perpendiculaire au vecteur $\square\mathrm{l}$, et par suite parallèle au plan tangent au point de rencontre du vecteur l avec la surface [art. 333, (2)].

L'équation (7) pouvant s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{S}\mathrm{L}\square\Xi = 0,$$

on voit que le plan diamétral des cordes parallèles à Ξ est parallèle au plan tangent à l'extrémité de Ξ. Les deux vecteurs L et Ξ sont donc tels que chacun d'eux appartient au plan diamétral des cordes parallèles à l'autre.

Soient donc L et M deux vecteurs liés par la relation

(8) $$\mathfrak{S}\mathrm{L}\square\mathrm{M} = \mathfrak{S}\mathrm{M}\square\mathrm{L} = 0,$$

et soit N l'intersection des plans diamétraux conjugués de ces vecteurs,

$$\mathfrak{S}\Xi\square\mathrm{L} = 0, \qquad \mathfrak{S}\Xi\square\mathrm{M} = 0,$$

d'où $\mathrm{N} = \mathfrak{V}(\square\mathrm{L}\,.\,\square\mathrm{M})$. Le plan diamétral conjugué de N devra contenir à la fois les vecteurs L et M. On devra donc joindre aux relations (8) les suivantes

(8) $$\begin{cases} \mathfrak{S}\mathrm{M}\square\mathrm{N} = \mathfrak{S}\mathrm{N}\square\mathrm{M} = 0, \\ \mathfrak{S}\mathrm{N}\square\mathrm{L} = \mathfrak{S}\mathrm{L}\square\mathrm{N} = 0. \end{cases}$$

336. Le vecteur X pouvant être décomposé suivant trois directions quelconques non coplanaires, on pourra poser

$$\mathrm{X} = \mathrm{L}x_1 + \mathrm{M}x_2 + \mathrm{N}x_3,$$

$\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}$ étant trois vecteurs *conjugués*, satisfaisant aux relations (8). Si l'on pose, de plus,

$$\mathfrak{S}\mathrm{L}\square\mathrm{L} = 1, \qquad \mathfrak{S}\mathrm{M}\square\mathrm{M} = 1, \qquad \mathfrak{S}\mathrm{N}\square\mathrm{N} = 1,$$

les extrémités de ces vecteurs seront sur la surface. Substituant la valeur précédente de X dans l'équation $\mathfrak{S}\mathrm{X}\square\mathrm{X} = 1$ de la surface, et ayant égard aux équations précédentes, ainsi qu'aux propriétés de la fonction $\square$, il vient

$$\begin{aligned} 1 = \mathfrak{S}\mathrm{X}\square\mathrm{X} &= \mathfrak{S}[(\mathrm{L}x_1 + \mathrm{M}x_2 + \mathrm{N}x_3)\square(\mathrm{L}x_1 + \mathrm{M}x_2 + \mathrm{N}x_3)] \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Or x_1 est le rapport de la composante de X parallèle à L à la

longueur même de L, et de même pour les autres. Si donc on désigne par l, m, n les longueurs des trois vecteurs conjugués, l'équation de l'ellipsoïde, rapportée à ces trois vecteurs pris pour axes, sera

$$\frac{x_1^2}{l^2}+\frac{x_2^2}{m^2}+\frac{x_3^2}{n^2}=1.$$

337. Considérons la fonction linéaire conjuguée à elle-même

$$\Box X = \alpha_1 A_1 \mathfrak{S} A_1 X + \alpha_2 A_2 \mathfrak{S} A_2 X + \alpha_3 A_3 \mathfrak{S} A_3 X,$$

α_1, α_2, α_3 étant des coefficients réels, et A_1, A_2, A_3 trois vecteurs unitaires rectangulaires entre eux. Nous aurons

$$\Box^2 X = -\alpha_1^2 A_1 \mathfrak{S} A_1 X - \alpha_2^2 A_2 \mathfrak{S} A_2 X - \alpha_3^2 A_3 \mathfrak{S} A_3 X.$$

On conclut de là que, si l'on a une fonction linéaire conjuguée à elle-même,

$$\Box X = \alpha_1 A_1 \mathfrak{S} A\ X + \alpha_2 A_2 \mathfrak{S} A_2 X + \alpha_3 A_3 \mathfrak{S} A_3 X,$$

où les coefficients α_1, α_2, α_3 soient positifs, et les vecteurs A_1, A_2, A_3 orthogonaux entre eux, la fonction linéaire conjuguée à elle-même

$$\Delta X = \sqrt{\alpha_1} A_1 \mathfrak{S} A_1 X + \sqrt{\alpha_2} A_2 \mathfrak{S} A_2 X + \sqrt{\alpha_3} A_3 \mathfrak{S} A_3 X$$

sera telle que l'on aura $\Delta^2 X = -\Box X$, de sorte que les signes d'opération Δ et $\Box$ seront liés par la relation

$$\Delta^2 = -\Box, \qquad \text{ou} \qquad \Delta = \sqrt{-\Box}.$$

Ainsi, l'équation d'un ellipsoïde rapporté à ses axes principaux [1]

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$$

peut se mettre sous la forme

$$\mathfrak{S} X \Box X = \frac{(\mathfrak{S} I_1 X)^2}{a_1^2}+\frac{(\mathfrak{S} I_2 X)^2}{a_2^2}+\frac{(\mathfrak{S} I_3 X)^2}{a_3^2}=1,$$

---

[1] Voir les articles 236, 239, 241.

où

$$\square x = I_1 \frac{S I_1 x}{a_1^2} + I_2 \frac{S I_2 x}{a_2^2} + I_3 \frac{S I_3 x}{a_3^2}.$$

Si l'on fait

$$\Delta x = - I_1 \frac{S I_1 x}{a_1} - I_2 \frac{S I_2 x}{a_2} - I_3 \frac{S I_3 x}{a_3},$$

l'équation de la surface pourra s'écrire

$$S x \Delta^2 x = -1, \quad \text{ou} \quad S \Delta x \Delta x = -1,$$

ou enfin

$$T \Delta x = 1.$$

Comparant cette équation à celle de la sphère

$$T x = 1,$$

on voit que la sphère se change en ellipsoïde ou *vice versa,* lorsqu'on fait subir aux vecteurs la transformation linéaire Δ ou son inverse.

Ainsi, l'équation d'un ellipsoïde peut être mise sous la forme de l'équation d'une sphère, dans laquelle le vecteur x est remplacé par le vecteur transformé Δx.

Les conditions (8), qui expriment que trois vecteurs L, M, N sont conjugués, peuvent s'écrire, à cause de $S M \Delta^2 N = S \Delta M \Delta N$, sous la forme

$$S \Delta M \Delta N = 0, \quad S \Delta N \Delta L = 0, \quad S \Delta L \Delta M = 0.$$

Les trois vecteurs ΔL, ΔM, ΔN, dans lesquels se transforment trois vecteurs conjugués, lorsque l'ellipsoïde se change en une sphère par la transformation Δ, forment donc un système de trois rayons de la sphère perpendiculaires entre eux.

338. La fonction $\square$ étant définie par l'équation

$$\square x = \sum_n \frac{I_n S I_n x}{a_n^2}, \quad (n = 1, 2, 3)$$

le vecteur $\mathrm{x} = \sum \mathrm{I}x$ pouvant se mettre sous la forme

$$\mathrm{x} = -\sum \mathrm{I}_n \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{x},$$

on en conclut

$$\square \mathrm{I}_n = -\frac{\mathrm{I}_n}{a_n^2},$$

d'où

$$\square^{-1} \mathrm{I}_n = -a_n^2 \mathrm{I}_n.$$

et par suite

$$\square^{-1} \mathrm{x} = \sum a_n^2 \mathrm{I}_n . \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{x}.$$

De même, pour la fonction Δ,

$$\Delta^{-1} \mathrm{x} = -\sum a_n \mathrm{I}_n . \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{x}.$$

Donc

$$\mathrm{x} = \square^{-1} \square \mathrm{x} = \sum a_n^2 \mathrm{I}_n . \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \square \mathrm{x} = \Delta^{-1} \Delta \mathrm{x} = -\sum a_n \mathrm{I}_n . \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \Delta \mathrm{x}.$$

Si K_1, K_2, K_3 sont trois vecteurs unitaires rectangulaires quelconques, on a

$$\mathfrak{S} \mathrm{K}_1 \square \mathrm{K}_1 = \sum_n \frac{(\mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{K}_1)^2}{a_n^2}, \text{ etc.},$$

d'où, à cause de

$$\sum_n (\mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{K}_n)^2 = -1,$$

on tire

(1) $$\sum \mathrm{K}_n \square \mathrm{K}_n = \sum \frac{1}{a_n^2}.$$

On a encore

$$\mathfrak{S}(\square \mathrm{K}_1 \square \mathrm{K}_2 \square \mathrm{K}_3) = \mathfrak{S}\left[\sum_n \frac{\mathrm{I}_n \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{K}_1}{a_n^2} . \sum_n \frac{\mathrm{I}_n \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{K}_2}{a_n^2} . \sum_n \frac{\mathrm{I}_n \mathfrak{S} \mathrm{I}_n \mathrm{K}_3}{a_n^2}\right]$$

$$= -\left|\frac{\mathfrak{S} \mathrm{I}_1 \mathrm{K}_1}{a_1^2}, \frac{\mathfrak{S} \mathrm{I}_2 \mathrm{K}_2}{a_2^2}, \frac{\mathfrak{S} \mathrm{I}_3 \mathrm{K}_3}{a_3^2}\right| = -\frac{1}{a_1^2 a_2^2 a_3^2}\left|\mathfrak{S} \mathrm{I}_1 \mathrm{K}_1, \mathfrak{S} \mathrm{I}_2 \mathrm{K}_2, \mathfrak{S} \mathrm{I}_3 \mathrm{K}_3\right|$$

$$= -\frac{\mathrm{K}_1 \mathrm{K}_2 \mathrm{K}_3}{a_1^2 a_2^2 a_3^2} = \pm \frac{1}{a_1^2 a_2^2 a_3^2}.$$

339. *Lieu des pôles des plans équidistants du centre de l'ellipsoïde.*

Soit Ξ le vecteur d'un point du lieu. L'équation de son plan polaire sera

$$\mathfrak{S} \mathrm{x} \square \Xi = 1,$$

et la distance de l'origine à ce plan aura pour expression (art. 309),

$$\frac{1}{\mathfrak{T}\square\Xi}.$$

Donc l'équation cherchée sera, par une transformation analogue à celle du numéro précédent,

$$\mathfrak{T}\square\Xi = c, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{S}\square\Xi\square\Xi = \mathfrak{S}\Xi\square^2\Xi = -c^2,$$

ce qui représente un ellipsoïde concentrique au premier, e dont l'équation en coordonnées cartésiennes sera

$$\frac{x_1^2}{a_1^4} + \frac{x_2^2}{a_2^4} + \frac{x_3^2}{a_3^4} = c^2.$$

340. ***Lieu des points d'intersection d'un système rectangulaire de trois tangentes à l'ellipsoïde.***

Ξ étant le vecteur d'un point du lieu, l'une des tangentes pourra se mettre sous la forme $\Xi + t\mathrm{u}$, u étant un vecteur unitaire. Les deux points d'intersection de ce vecteur avec l'ellipsoïde seront donnés par l'équation

$$1 = \mathfrak{S}.(\Xi + t\mathrm{u})\square(\Xi + t\mathrm{u}) = t^2\mathfrak{S}\mathrm{u}\square\mathrm{u} + 2t.\mathfrak{S}\Xi\square\mathrm{u} + \mathfrak{S}\Xi\square\Xi,$$

et la condition pour que ces deux points d'intersection se confondent, ou pour que cette équation donne pour t deux valeurs égales, est que l'on ait

$$(\mathfrak{S}\Xi\square\mathrm{u})^2 = \mathfrak{S}\mathrm{u}\square\mathrm{u}:(\mathfrak{S}\Xi\square\Xi - 1).$$

En désignant par $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3$ les vecteurs unitaires u relatifs aux trois tangentes, et additionnant les trois équations ainsi obtenues, on aura

$$\sum_n(\Xi\square\mathrm{u}_n)^2 = \mathfrak{S}(\Xi\square\Xi - 1).\sum_n\mathfrak{S}\mathrm{u}_n\square\mathrm{u}_n, \qquad (n = 1, 2, 3),$$

ou [art. 338, (1)], à cause de $\mathfrak{S}\Xi\square\mathrm{u}_n = \mathfrak{S}\mathrm{u}_n\square\Xi$ et de $\sum\mathrm{u}_n^2 = -1$,

$$-(\square\Xi)^2 = (\mathfrak{S}\Xi\square\Xi - 1).\sum\frac{1}{a_n^2},$$

ou enfin, à cause de $(\square\Xi)^2 = \mathfrak{S}\square\Xi\square\Xi = \mathfrak{S}\Xi\square^2\Xi$,

$$\mathfrak{S}\Xi\left[\left(\sum\frac{1}{a_n^2}\right)\square+\square^2\right]\Xi=\sum\frac{1}{a_n^2},$$

équation d'un ellipsoïde concentrique au proposé.

341. Supposons que d'un point donné x d'un ellipsoïde on mène trois vecteurs rectangulaires, rencontrant de nouveau l'ellipsoïde aux points $x+t_1u_1$, $x+t_2u_2$, $x+t_3u_3$. On aura à la fois

$$\mathfrak{S}x\square x=0,\qquad \mathfrak{S}(x+tu)\square(x+tu)=0,$$

d'où

$$t=-\frac{2\mathfrak{S}u\square x}{\mathfrak{S}u\square u_n}.$$

Les vecteurs des seconds points de rencontre sont donc

$$x-t_nu_n=x-2u_n\frac{\mathfrak{S}u_n\square x}{\mathfrak{S}u_n\square u},\qquad (n=1,2,3).$$

L'équation du plan passant par ces trois points est (art. 310)

$$\begin{aligned}0&=\mathfrak{S}(\Xi-x-t_1u_1)(t_2u_2-t_1u_1)(t_3u_3-t_1u_1)\\&=\mathfrak{S}(\Xi-x)(t_2t_3u_2u_3+t_3t_1u_3u_1+t_1t_2u_1u_2)+t_1t_2t_3\mathfrak{S}u_1u_2u_3,\end{aligned}$$

ou, u_1, u_2, u_3 étant des vecteurs unitaires rectangulaires,

$$0=\mathfrak{S}(\Xi-x)\left(\frac{u_1}{t_1}+\frac{u_2}{t_2}+\frac{u_3}{t_3}\right)+1,$$

ou

$$0=\mathfrak{S}(\Xi-x)\left(\frac{u_1\mathfrak{S}u_1\square u_1}{\mathfrak{S}u_1\square x}+\frac{u_2\mathfrak{S}u_2\square u_2}{\mathfrak{S}u_2\square x}+\frac{u_3\mathfrak{S}u_3\square u_3}{\mathfrak{S}u_3\square x}\right)-2=0.$$

Essayons maintenant de satisfaire à cette équation par une valeur de la forme

$$\Xi-x=\alpha.\sum u_n.\mathfrak{S}u_n\square x,\qquad (n=1,2,3).$$

On aura

$$\mathfrak{S}(\Xi-x)\frac{u_1\mathfrak{S}u_1\square u_1}{\mathfrak{S}u_1\square x}=-\alpha\mathfrak{S}u_1\square u_1,$$

et de même pour les autres, d'où l'on tire

$$\alpha = -\frac{1}{\Sigma u_n \square u_n},$$

et par suite l'équation est satisfaite par le vecteur

$$\Xi = x - 2\frac{\Sigma(u_n . \mathfrak{S} u_n \square x)}{\Sigma(\mathfrak{S} u_n \square u_n)}.$$

Or, si l'on remplace, dans la seconde formule (16) de l'art. 222, L, M, N par u_1, u_2, u_3, on a, à cause de $u_2 u_3 = -u_1$, etc.,

$$m_2 = -\sum u_n \square u_n,$$

quantité réelle indépendante de u_1, u_2, u_3. Ensuite $\mathfrak{S} u_1 \square x$, $\mathfrak{S} u_2 \square x$, $\mathfrak{S} u_3 \square x$ étant les composantes du vecteur $\square x$ suivant les directions rectangulaires de u_1, u_2, u_3, on aura

$$\sum u_n \mathfrak{S} u_n \square x = -\square x.$$

Donc le plan en question passe constamment par le point fixe

$$\Xi = x + \frac{2}{m_2}\square x.$$

On tire ensuite de cette équation

$$x = \frac{m_2}{2}\left(\square + \frac{m_2}{2}\right)^{-1}\Xi.$$

Substituant cette valeur dans l'équation $\mathfrak{S} x \square x = 1$, il vient, pour l'équation du lieu du point Ξ,

$$\frac{m_2^2}{4}\mathfrak{S}\left[\left(\square + \frac{m_2}{2}\right)^{-1}\Xi . \square(\square + \tfrac{1}{2}m_2)^{-1}\Xi\right] = 0.$$

Ce lieu est un ellipsoïde concentrique au proposé.

342. *Trouver l'équation d'un ellipsoïde dont on donne un système de trois demi-diamètres conjugués* A, B, C.

Si l'on représente par $\mathfrak{S}\mathrm{X}\square\mathrm{X} = 1$ l'équation cherchée, on devra avoir

$$\mathfrak{S}\mathrm{A}\square\mathrm{A} = 1, \quad \mathfrak{S}\mathrm{B}\square\mathrm{B} = 1, \quad \mathfrak{S}\mathrm{C}\square\mathrm{C} = 1,$$
$$\mathfrak{S}\mathrm{B}\square\mathrm{C} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{C}\square\mathrm{A} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{A}\square\mathrm{B} = 0.$$

Les deux dernières équations, qui peuvent s'écrire

$$\mathfrak{S}\mathrm{C}\square\mathrm{A} = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{B}\square\mathrm{A} = 0,$$

montrent que le vecteur $\square\mathrm{A}$ est perpendiculaire à B et à C, d'où l'on tire, θ étant un facteur réel,

$$\square\mathrm{A} \parallel \mathfrak{V}\mathrm{BC}, \quad \theta\mathrm{A} = \square^{-1}\mathfrak{V}\mathrm{BC}, \quad \theta = \theta\mathfrak{S}\mathrm{A}\square\mathrm{A} = \mathfrak{S}\mathrm{ABC},$$

et de même pour les autres combinaisons. Or on a identiquement [art. 198, (15)]

$$\mathrm{X}.\mathfrak{S}\mathrm{ABC} = \mathrm{A}.\mathfrak{S}\mathrm{BCX} + \mathrm{B}.\mathfrak{S}\mathrm{CAX} + \mathrm{C}.\mathfrak{S}\mathrm{ABX},$$

d'où, en mettant par $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ leurs valeurs, et opérant par $\square$,

$$(\mathfrak{S}\mathrm{ABC})^2\square\mathrm{X} = \mathfrak{V}\mathrm{BC}.\mathfrak{S}\mathrm{BCX} + \mathfrak{V}\mathrm{CA}.\mathfrak{S}\mathrm{CAX} + \mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}\mathrm{ABX},$$

et enfin, en opérant par $\mathfrak{S}\mathrm{X}\times$,

$$(\mathfrak{S}\mathrm{ABC})^2 = (\mathfrak{S}\mathrm{BCX})^2 + (\mathfrak{S}\mathrm{CAX})^2 + (\mathfrak{S}\mathrm{ABX})^2,$$

équation de l'ellipsoïde.

Cette équation peut s'interpréter ainsi : « Si l'on forme quatre tétraèdres en groupant trois à trois trois vecteurs conjugués d'un ellipsoïde et le vecteur d'un quatrième point quelconque de la surface, la somme des carrés des volumes de trois de ces tétraèdres est égale au carré du volume du quatrième. »

343. Des articles 241 et 338 il résulte que, si g_1, g_2, g_3 sont les racines de l'équation

$$\varphi(\square) = \square^3 - m_2\square^2 + m_1\square - m = 0,$$

ces racines sont les carrés des trois demi-axes principaux de la surface représentée par l'équation

$$\mathfrak{S}\mathrm{X}\square^{-1}\mathrm{X} = 1. \tag{4}$$

Si l'on remplace $\square$ par $\square + h$, on a une seconde surface pour laquelle les différences des carrés des demi-axes sont les mêmes que pour la première, et par suite l'équation

$$(2) \qquad \mathfrak{S}[\mathrm{x}.(\square + h)^{-1}\mathrm{x}] = 1$$

représente toutes les surfaces confocales avec la surface (1).

Il est facile de voir que deux surfaces confocales se coupent orthogonalement. En effet, si l'on considère deux surfaces de la série (2), correspondantes aux valeurs h et h_1 du paramètre, leurs normales correspondantes au vecteur commun x seront

$$(\square + h)^{-1}\mathrm{x}, \qquad (\square + h_1)^{-1}\mathrm{x}.$$

Or on a

$$\mathfrak{S}[(\square + h)^{-1}\mathrm{x}.(\square + h_1)^{-1}\mathrm{x}] = \mathfrak{S}[\mathrm{x}.(\square + h)^{-1}(\square + h_1)^{-1}\mathrm{x}],$$

ou, à cause de l'identité $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$,

$$= \frac{1}{h - h_1}\mathfrak{S}\{\mathrm{x}.[(\square + h_1)^{-1} - (\square + h)^{-1}]\mathrm{x}\},$$

quantité nulle, si l'on n'a pas $h = h_1$, c'est-à-dire si les deux surfaces ne sont pas identiques.

CHAPITRE XIII.

GÉOMÉTRIE DES LIGNES ET DES SURFACES COURBES.

§ Ier.

Des lignes courbes.

344. Une équation entre un vecteur variable x, des vecteurs constants et une variable réelle t, de la forme

$$x = f(t),$$

représente une ligne.

L'équation d'une droite quelconque passant par le point x est

$$\mathfrak{V}.A(\Xi - x) = 0,$$

et la distance du point de la courbe $x + dx$, infiniment voisin de x, à cette droite sera (art. 301), en grandeur et en direction,

$$D = -A^{-1}.\mathfrak{V}A\,dx.$$

Cette distance sera généralement infiniment petite du premier ordre, tant que A fera un angle fini avec dx.

Si nous développons dx suivant les puissances de dt, nous aurons

$$dx = x'dt + \frac{x''}{2}dt^2 + \ldots.$$

La quantité $\mathfrak{V}A\,dx$ sera donc égale à

$$dt.\mathfrak{V}Ax' + \frac{dt^2}{2}\mathfrak{V}Ax'' + \ldots.$$

Elle sera infiniment petite du second ordre, si l'on pose

$$\mathfrak{V}Ax' = 0, \quad \text{ou} \quad A \parallel x'.$$

La droite correspondante à cette valeur de A est dite la *tangente à la courbe.* Elle a pour équation

(1) $$\mathfrak{V}(\Xi - \text{x})\,\text{x}' = 0,$$

ou, aux infiniment petits près d'ordre négligeable,

(2) $$\mathfrak{V}(\Xi - \text{x})\,d\text{x} = 0.$$

345. Pour avoir la distance du point $\text{x} + d\text{x}$ de la courbe à la tangente, on substituera cette valeur de A dans l'expression de D ; qui deviendra

(3) $$\text{D} = -\tfrac{1}{2}\,dt^2.\text{x}'^{-1}\mathfrak{V}\text{x}'\text{x}'',$$

ou, ce qui revient au même,

(4) $$\text{D} = -\tfrac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{V}\,d\text{x}\,d^2\text{x}}{d\text{x}}.$$

Le module de $d\text{x}$ est l'élément d'arc ds de la courbe,

(5) $$\mathfrak{T}d\text{x} = ds.$$

La longueur de la distance D sera donc

(6) $$\mathfrak{T}\text{D} = \tfrac{1}{2}\,dt^2\mathfrak{T}\mathfrak{V}(\mathfrak{U}\text{x}'.\text{x}'') = \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{T}\mathfrak{V}(\mathfrak{U}d\text{x}.d^2\text{x}).$$

346. L'équation du plan normal, perpendiculaire au vecteur $\text{x}'dt$ ou $d\text{x}$, sera

(7) $$\mathfrak{S}(\Xi - \text{x})\,\text{x}' = 0, \quad \text{ou} \quad \mathfrak{S}(\Xi - \text{x})\,d\text{x} = 0.$$

On pourrait obtenir cette équation, en cherchant le lieu des points équidistants de x et de $\text{x} + d\text{x}$, ce qui donnerait

$$\mathfrak{T}(\Xi - \text{x} - d\text{x}) = \mathfrak{T}(\Xi - \text{x}), \quad \text{ou} \quad d_x\mathfrak{T}(\Xi - \text{x}) = 0,$$

ou enfin l'équation (7).

L'équation d'un plan tangent sera

(8) $$\mathfrak{S}(\Xi - \text{x})\,\text{A}\,d\text{x} = 0,$$

A étant un vecteur quelconque.

L'équation d'une normale quelconque sera

(9) $\Xi - x \parallel \mathfrak{V} A dx$, ou $\mathfrak{V}[(\Xi - x).\mathfrak{V} A dx] = 0$,

ou encore [art. 547, (9)]

$$dx.\mathfrak{S}(\Xi - x)A - A.\mathfrak{S}(\Xi - x)dx = 0.$$

347. Soient deux positions successives

$$\mathfrak{V} A(x - B) = 0, \qquad \mathfrak{V} A'(x - B') = 0$$

d'une droite mobile, par suite de la variation d'un paramètre réel t, dont les coefficients A, B sont des fonctions. Le vecteur qui correspond à la plus courte distance de ces deux positions a pour expression

$$D = -(\mathfrak{V} AA')^{-1}\mathfrak{S}[\mathfrak{V} AA'.(B' - B)],$$

ou, si l'on pose $A' = A + dA$, $B' = B + dB$,

$$D = -(\mathfrak{V} A dA)^{-1}\mathfrak{S} A dA dB.$$

En faisant maintenant

$$dA = A'dt + \tfrac{1}{2}A''dt^2 + \ldots, \qquad dB = B'dt + \tfrac{1}{2}B''dt^2 + \ldots,$$

on voit d'abord que

$$D = -(\mathfrak{V} AA')^{-1}.dt.\mathfrak{S} AA'B'$$

est infiniment petit du premier ordre, à moins que l'on n'ait

$$\mathfrak{S} AA'B' = 0,$$

$\mathfrak{V} AA'$ étant différent de zéro (1). Dans ce cas, en poussant plus loin les développements, on a, aux quantités près du quatrième ordre,

$$\mathfrak{S} A dA dB = \tfrac{1}{2}dt^3\mathfrak{S} A[A'B'' + A''B' + \tfrac{1}{6}(2A'B''' + 3A''B'' + 2A'''B')dt].$$

(1) Le cas de $\mathfrak{V} AA' = 0$ serait celui où A serait parallèle à $A + dA$, et où la droite se mouvrait parallèlement à elle-même.

D'ailleurs, en différentiant la condition $\mathfrak{S}AA'B' = 0$, il vient

$$0 = \mathfrak{S}(A'A'B' + AA''B' + AA'B'') = \mathfrak{S}A(A'B'' + A''B'),$$

d'où il s'ensuit que la partie du troisième ordre de $\mathfrak{S}AdAdB$ s'évanouit. La plus courte distance des deux positions consécutives de la droite est donc alors infiniment petite d'ordre supérieur au second.

En différentiant une fois de plus, il vient

$$0 = \mathfrak{S}[A(A'B''' + 2A''B'' + A'''B') + A'A''B'],$$

ce qui réduit l'expression de $\mathfrak{S}AdAdB$ à

$$-\tfrac{1}{12}\,dt^3 S(AA''B'' + 2A'A''B') = \tfrac{1}{12}dt^3\mathfrak{S}A''(AB'' + 2A'B').$$

Donc nous aurons

$$D = -\frac{dt^3}{12}(\mathfrak{V}AA')^{-1}\mathfrak{S}A''(A'B'' + 2A'B')$$
$$= -\tfrac{1}{12}\mathfrak{V}(AdA)^{-1}\mathfrak{S}d^2A(Ad^2B + 2dAdB).$$

348. Si la droite mobile est la tangente (1) à une courbe quelconque, on aura $A = X'$, $B = X$. Alors

$$\mathfrak{S}AA'B' = \mathfrak{S}X'X''X' = 0.$$

Donc la plus courte distance des deux tangentes consécutives d'une courbe quelconque est infiniment petite du troisième ordre en général.

La valeur de D se réduit, dans ce cas, à

$$D = -\frac{dt^3}{12}(\mathfrak{V}X'X'')^{-1}\mathfrak{S}X'''(X'X'' + 2X''X'),$$

c'est-à-dire à

$$D = \frac{dt^3}{12}\,\frac{\mathfrak{S}X'X''X'''}{\mathfrak{V}X'X''} = \frac{1}{12}\,\frac{\mathfrak{S}dXd^2Xd^3X}{\mathfrak{V}dXd^2X}. \tag{10}$$

349. *Plan osculateur.* Un plan quelconque, passant par le point X, peut être représenté par l'équation

$$\mathfrak{S}(\Xi - X)AB = 0,$$

A et B étant deux vecteurs constants, tracés dans ce plan. La distance du point $x + dx$ à ce plan sera

$$D = -(\mathfrak{V}AB)^{-1}\mathfrak{S}AB\,dx.$$

Or, en développant la valeur de dx, on a

$$\mathfrak{S}AB\,dx = \mathfrak{S}AB\left(x'\,dt + \frac{x''}{2}\,dt^2 + \frac{x'''}{6}\,dt^3 + \dots\right).$$

Pour que la distance D soit infiniment petite d'ordre supérieur au premier, il faut que l'on ait

$$\mathfrak{S}ABx' = 0,$$

équation satisfaite par $B = x'$, ce qui ramène à l'équation (8) (art. 346) d'un plan tangent quelconque.

Pour que la distance soit infiniment petite d'ordre supérieur au second, il faut que l'on ait, en outre, la condition

$$\mathfrak{S}ABx'' = 0.$$

De ces deux conditions on conclut que le vecteur $\mathfrak{V}AB$ doit être perpendiculaire aux deux vecteurs x', x'', et par suite à leur plan. Donc

$$\mathfrak{V}AB \parallel \mathfrak{V}x'x'',$$

et par suite l'équation du plan devient

(11) $$\mathfrak{S}(\Xi - x)x'x'' = 0.$$

Telle est l'équation du plan osculateur.

On aurait pu l'obtenir en cherchant la limite du plan passant par le point x et par deux points infiniment voisins $x + dx$, $x + dx + d(x + dx)$, ce qui aurait donné immédiatement l'équation

(12) $$\mathfrak{S}(\Xi - x)\,dx\,d^2x = 0.$$

350. La distance du point $x + dx$ au plan osculateur en x sera

$$D = -\tfrac{1}{6}dt^3\frac{\mathfrak{S}x'x''x'''}{\mathfrak{V}x'x''} = -\tfrac{1}{6}\frac{\mathfrak{S}\,dx\,d^2x\,d^3x}{\mathfrak{V}\,dx\,d^2x}.$$

Elle est double de la distance des deux tangentes en x et en $x + dx$, et de signe contraire.

L'équation d'un vecteur perpendiculaire au plan osculateur est

(13) $\Xi - A \parallel \mathfrak{V}x'x''$, ou $\mathfrak{V}[(\Xi - A).\mathfrak{V}x'x''] = 0$.

351. La normale principale est l'intersection du plan normal et du plan osculateur; elle est donc représentée par l'ensemble des deux équations

$$\mathfrak{S}(\Xi - x)x' = 0, \quad \mathfrak{S}(\Xi - x)x'x'' = 0,$$

d'où l'on tire

$$\Xi - x \parallel \mathfrak{V}(x'.\mathfrak{V}x'x''),$$

ou, à cause de $\mathfrak{S}(x'.\mathfrak{V}x'x'') = 0$,

(14) $\Xi - x \parallel x'.\mathfrak{V}x'x''$, ou $\mathfrak{V}[(\Xi - x)x'\mathfrak{V}x'x''] = 0$,

que l'on pourrait écrire sous l'une des formes

$$x'.\mathfrak{S}[(\Xi - x)x'x''] - \mathfrak{V}x'x''.\mathfrak{S}[(\Xi - x)x'] = 0,$$
$$x'^2\mathfrak{V}[(\Xi - x)x''] - \mathfrak{S}x'x''\mathfrak{V}[(\Xi - x)x'] = 0.$$

352. L'intersection de deux plans normaux infiniment voisins, où l'axe de courbure est représenté par l'ensemble des équations

(15) $\mathfrak{S}(\Xi - x)x' = 0, \quad \mathfrak{S}(\Xi - x)x'' = x'^2.$

La combinaison de la première de ces équations avec celle du plan osculateur (11) donne l'équation (14), ou

$$\Xi - x = \theta\mathfrak{V}(x'.\mathfrak{V}x'x'').$$

Substituant cette valeur dans la seconde équation (15), il vient

$$\theta = \frac{x'^2}{\mathfrak{S}[\mathfrak{V}(x'.\mathfrak{V}x'x'').x''} = -\frac{x'^2}{(\mathfrak{V}x'x'')^2},$$

d'où l'on tire, pour le vecteur du centre de courbure,

$$(16)\qquad \mathrm{B} = \Xi - \mathrm{x} = -\frac{\mathrm{x}'^2\mathfrak{V}(\mathrm{x}'.\mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}'')}{(\mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}'')^2} = -\frac{\mathrm{x}'^2.\mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}''}{(\mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}'')^2} = \frac{\mathrm{x}'^2}{\mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}''}\ (^1).$$

On a ainsi l'équation du lieu des centres de courbure.

En remplaçant, dans la formule (13), A par la valeur de Ξ tirée de (16), on aura, pour l'équation de l'axe de courbure,

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Xi - \mathrm{x} + \dfrac{\mathrm{x}'^2\mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}''}{(\mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}'')^2} \parallel \mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}'', \\ \text{ou} \\ \mathfrak{V}(\Xi - \mathrm{x}).\mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}'' + \mathrm{x}'^2 = 0. \end{array}\right.$$

Le rayon de courbure se tire de la formule (16), en opérant par $\mathfrak{T}$, ce qui donne

$$(18)\qquad \rho = \mathfrak{T}(\Xi - \mathrm{x}) = \frac{ds^3}{\mathfrak{T}(\mathfrak{V}d\mathrm{x}d^2\mathrm{x})}.$$

On tire de là, pour l'expression de l'angle de contingence,

$$(19)\qquad d\tau = \frac{ds}{\rho} = \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{V}d\mathrm{x}d^2\mathrm{x}}{ds^2}.$$

353. Si l'on prend pour variable indépendante l'arc s, alors $\mathfrak{T}\dfrac{d\mathrm{x}}{ds} = 1$, d'où

$$0 = \tfrac{1}{2}d.\left(\mathfrak{T}\frac{d\mathrm{x}}{ds}\right)^2 = \mathfrak{S}\frac{d\mathrm{x}d^2\mathrm{x}}{ds^2}.$$

Donc alors $d^2\mathrm{x}$ est perpendiculaire à $d\mathrm{x}$, et l'on a

$$\mathfrak{S}d\mathrm{x}d^2\mathrm{x} = 0, \qquad \mathfrak{V}d\mathrm{x}d^2\mathrm{x} = d\mathrm{x}d^2\mathrm{x}.$$

Les formules précédentes se simplifient, et l'on a, pour le vecteur de courbure,

$$\Xi - \mathrm{x} = -\frac{1}{\mathrm{x}''},$$

---

(1) En effet

$$\mathfrak{V}\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}.\mathrm{B}\right) = \mathrm{B}^{-1}.\mathfrak{S}\mathrm{AB} - \mathrm{A} + \mathrm{B}\mathfrak{S}\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}$$

se réduit ici à $-\mathrm{A}$, à cause de $\mathfrak{S}\mathrm{AB} = 0$.

pour le rayon de courbure,

$$\rho = \frac{1}{\mathfrak{T}x'},$$

et pour l'équation de l'axe de courbure,

$$\mathfrak{V}[(\Xi - x)x'x''] - x' = 0.$$

Des simplifications analogues se produiront toutes les fois que la variable t sera proportionnelle à s.

354. On peut encore obtenir autrement ces formules. Soient P, Q deux vecteurs quelconques. On a

$$\mathfrak{V}\frac{Q}{P} = \mathfrak{V}\frac{Q-P}{P},$$

d'où, en prenant les modules de part et d'autre, et remarquant que, si θ est l'angle de la biradiale POQ, on a $\mathfrak{T}\mathfrak{V}\frac{Q}{P} = \sin\theta \,.\, \mathfrak{T}\frac{Q}{P}$,

$$\sin\theta \,.\, \mathfrak{T}\frac{Q}{P} = \mathfrak{T}\mathfrak{V}\frac{Q-P}{P}.$$

Si P et $Q = P + dP$ sont deux vecteurs infiniment peu différents, on aura alors

$$\mathfrak{T}\frac{Q}{P} = 1, \quad \sin\theta = d\theta,$$

et par suite

$$d\theta = \mathfrak{T}\mathfrak{V}\frac{dP}{P}. \tag{20}$$

Supposons maintenant que P soit un segment infiniment petit $x'dt$ pris sur la tangente au point x; $d\theta$ sera l'angle de contingence $d\tau$, formé par les tangentes en x et en $x + dx$, et l'on aura

$$d\tau = \mathfrak{T}\mathfrak{V}\frac{dx'}{x'} = \mathfrak{T}\mathfrak{V}\frac{dx\,d^2x}{dx^2}.$$

C'est la formule (19), d'où l'on tire ensuite la formule (18).

355. De même, $\mathfrak{V}x'x''$ étant un vecteur perpendiculaire au

plan osculateur (art. 350), on trouvera, pour l'angle de deux plans osculateurs consécutifs ou angle de torsion,

$$(21)\quad d\upsilon = \mathfrak{T}\mathfrak{V}\frac{d.\mathfrak{V}x'x'}{\mathfrak{V}x'x'} = dt\mathfrak{T}\mathfrak{V}\frac{\mathfrak{V}x'x'''}{\mathfrak{V}x'x'} = \mathfrak{T}\mathfrak{V}\frac{\mathfrak{V}dxd^3x}{\mathfrak{V}dxd^2x},$$

ou encore [art. 198, (13)'], à cause de $\mathfrak{V}(\mathfrak{V}x'x'.\mathfrak{V}x'x''')$ $= - x'.\mathfrak{S}x'x'x'''$, et de $\mathfrak{T}dx = ds$,

$$(22)\qquad d\upsilon = ds\frac{\mathfrak{S}x'x'x'''}{(\mathfrak{V}x'x')^2} = ds\frac{\mathfrak{S}dxd^2xd^3x}{(\mathfrak{V}dxd^2x)^2}.$$

Si l'on prend ds pour variable indépendante, on a $\mathfrak{V}x'x'$ $= x'x'$, ce qui donne, à cause de $\frac{d\mathfrak{S}x'x'}{ds} = x'^2 + \mathfrak{S}x'x''' = 0$, d'où $d(x'x') = ds.\mathfrak{V}x'x'''$,

$$d\upsilon = \mathfrak{T}\mathfrak{V}\frac{d.x'x'}{x'x'} = ds\mathfrak{T}\mathfrak{V}\frac{\mathfrak{V}x'x'''}{x'x'} = ds\frac{\mathfrak{S}x'x'x'''}{(x'x')^2}.$$

356. En comparant l'expression (22) de $d\upsilon$ avec la valeur

$$\delta = \tfrac{1}{6}\mathfrak{T}\frac{\mathfrak{S}dxd^2xd^3x}{\mathfrak{V}dxd^2x}$$

de la distance du point $x + dx$ au plan osculateur en x, on trouve

$$d\upsilon = \frac{6\delta.ds}{\mathfrak{T}\mathfrak{V}dxd^2x} = \frac{6\delta}{dsd\tau},$$

ou, en désignant par δ' la distance du point $x + dx$ à la tangente,

$$d\upsilon = 3\frac{\delta}{\delta'}.$$

357. L'équation de l'axe de courbure étant

$$\mathfrak{V}[(\Xi - x)\mathfrak{V}x'x' + x'^3] = 0,$$

si l'on pose

$$\mathfrak{S}[(\Xi - x)\mathfrak{V}x'x' + x'^3] = \mathfrak{S}[(\Xi - x)x'x'] = v,$$

elle pourra s'écrire sous la forme

(23) $$(\Xi - \mathrm{x})\mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}' + \mathrm{x}'^2 = v,$$

v variant d'un point à l'autre de l'axe de courbure.

Si l'on fait varier à la fois t et v, on aura l'équation de la surface lieu des axes de courbure, ou de la ***surface polaire*** de la courbe proposée.

On aura l'arête de rebroussement de cette surface, ou le lieu du centre de la sphère osculatrice à la courbe, en éliminant t entre l'équation de l'axe de courbure et sa différentielle, prise en considérant Ξ comme constant.

358. Cherchons maintenant l'équation générale des développées de la courbe. La tangente à la développée étant la ligne qui joint le point Ξ de la développée au point x de la courbe, on a l'équation

(24) $$\mathfrak{V}(\Xi - \mathrm{x})d\Xi = 0.$$

$\Xi - \mathrm{x}$, devant être une normale à la courbe, sera perpendiculaire à $d\mathrm{x}$; il en sera donc de même de sa parallèle $d\Xi$, d'où l'on tire

(25) $$\mathfrak{V}\, d\Xi\, d\mathrm{x} = 0.$$

Si l'on pose

(26) $$\mathfrak{T}(\Xi - \mathrm{x}) = q, \quad \text{d'où} \quad (\Xi - \mathrm{x})^2 = -q^2,$$

cette équation, jointe à celle de l'axe de courbure (17), fera connaître les trois composantes rectangulaires ξ_1, ξ_2, ξ_3 de Ξ en fonction de t et de q, ce qui fournira une nouvelle détermination de la surface polaire.

La quantité $(\Xi - \mathrm{x})d\Xi$ étant réelle, ainsi que $\dfrac{(\Xi - \mathrm{x})d\Xi}{d\Xi^2}$, on aura

$$\frac{\mathfrak{T}(\Xi - \mathrm{x})}{\mathfrak{T}d\Xi} = \pm \frac{\mathfrak{S}(\Xi - \mathrm{x})d\Xi}{d\Xi^2}.$$

D'ailleurs, en vertu de l'équation du plan normal $\mathfrak{S}(\Xi - \mathrm{x})d\mathrm{x} = 0$, on a

$$\mathfrak{T}(\Xi - \mathrm{x}).d\mathfrak{T}(\Xi - \mathrm{x}) = -\mathfrak{S}(\Xi - \mathrm{x})d(\Xi - \mathrm{x}) = -\mathfrak{S}(\Xi - \mathrm{x})\,d\Xi.$$

Donc

$$\frac{\mathfrak{T}(\Xi - \mathrm{x})}{\mathfrak{T}d\Xi} = \pm\frac{\mathfrak{T}(\Xi - \mathrm{x}).d\mathfrak{T}(\Xi - \mathrm{x})}{(\mathfrak{T}d\Xi)^2},$$

d'où l'on tire

$$d\mathfrak{T}(\Xi - \mathrm{x}) = \pm\,\mathfrak{T}d\Xi,$$

c'est-à-dire que l'élément d'arc de la développée est égal à l'accroissement correspondant de la longueur du vecteur $\Xi - \mathrm{x}$.

359. Désignons par U le vecteur qui joint le centre de courbure $\mathrm{R} + \mathrm{x}$ de la courbe au point Ξ de la développée. On aura

$$\Xi - \mathrm{x} = \mathrm{R} + \mathrm{U}.$$

En mettant pour $\Xi - \mathrm{x}$ cette valeur dans l'équation (24), il vient

$$(27) \qquad \mathfrak{V}[(\mathrm{R} + \mathrm{U})d(\mathrm{x} + \mathrm{R} + \mathrm{U})] = 0.$$

Le vecteur R est donné en fonction de t par l'équation (16)

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{x}'^3}{\mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}''}.$$

Le vecteur U est parallèle à $\mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}''$, et, en désignant par u son module, il a pour valeur

$$\mathrm{U} = u.\frac{\mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}''}{\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathrm{x}'\mathrm{x}''}.$$

En mettant ces valeurs dans l'équation (27), on aura une équation différentielle entre t, u, dt, du, qui représentera les développées de la courbe proposée.

360. Appliquons les formules précédentes à l'hélice. Si l'on pose

$$\Omega_1 = \mathrm{I}_1 \cos t + \mathrm{I}_2 \sin t, \qquad \Omega_2 = \frac{d\Omega_1}{dt} = -\mathrm{I}_1 \sin t + \mathrm{I}_2 \cos t,$$

les trois vecteurs unitaires $\Omega_1, \Omega_2, \mathrm{I}_3$ formeront un système rectangulaire, et l'on aura les relations

$$\Omega_1^2 = \Omega_2^2 = \mathrm{I}_3^2 = -1, \qquad \Omega_1\Omega_2 = -\Omega_2\Omega_1 = -\mathrm{I}_3, \text{ etc.}...$$

L'équation de l'hélice pourra se mettre sous la forme

$$\mathrm{x} = a\Omega_1 + bt\mathrm{I}_3,$$

d'où l'on tire, en posant $a^2 + b^2 = c^2$,

$$\mathrm{x}' = a\Omega_2 + b\mathrm{I}_3, \qquad \mathrm{x}'' = -a\Omega_1, \qquad \mathrm{x}''' = -a\Omega_2,$$
$$ds = c\,dt, \qquad \mathrm{x}'\mathrm{x}'' = ab\Omega_2 - a^2\mathrm{I}_3,$$
$$\mathrm{x}\mathrm{x}' = -b^2t + abt\Omega_1 + ab\Omega_2 - a^2\mathrm{I}_3,$$
$$\mathrm{x}\mathrm{x}'\mathrm{x}'' = a^2bt + ab^2t\Omega_1 - a^3\Omega_2 - a^2b\mathrm{I}_3.$$

L'équation de la tangente sera

$$\mathfrak{V}\Xi(a\Omega_2 + b\mathrm{I}_3) = a(bt\Omega_1 + b\Omega_3 + a\mathrm{I}_3).$$

Celle du plan normal sera

$$\mathfrak{S}\Xi(a\Omega_2 + b\mathrm{I}_3) = -b^2t.$$

La distance du point $\mathrm{x} + d\mathrm{x}$ à la tangente sera, à cause de $d^2s = 0$, d'où $\mathfrak{S}\mathrm{x}'\mathrm{x}'' = 0$,

$$\mathrm{D} = -\tfrac{1}{2}d^2\mathrm{x} = \tfrac{1}{2}a\Omega_1 dt^2, \qquad \text{d'où} \qquad \mathfrak{T}\mathrm{D} = \tfrac{1}{2}a\,dt^2.$$

L'équation du plan osculateur est

$$\mathfrak{S}\Xi(b\Omega_2 - a\mathrm{I}_3) = ab;$$

celle de la normale principale;

$$\mathfrak{V}\Xi\Omega_1 = -bt\Omega_2.$$

En mettant la valeur de Ξ sous la forme $\xi^{(1)}\Omega_1 + \xi^{(2)}\Omega_2 + \xi_3\mathrm{I}_3$, on trouve immédiatement

$$\xi^{(2)} = -\xi_1 \sin t + \xi_2 \cos t = 0, \qquad \xi_3 = bt = x_3,$$

équations cartésiennes de la normale principale. En égalant $\mathfrak{S}\Xi\Omega_1 = -\xi^{(1)}$ à une nouvelle variable u, on a, pour la surface

lieu des normales principales, les équations

$$\xi_1 = u\cos t, \qquad \xi_2 = u\sin t, \qquad \xi_3 = bt.$$

ou

$$\Xi = u\Omega_1 + bt\iota_3.$$

Cette surface est l'hélicoïde gauche.

Le vecteur du centre de courbure est

$$\mathrm{R} = \Xi - \mathrm{x} = -\frac{c^2}{\mathrm{x}''} = -\frac{c^2}{a}\Omega_1, \quad \text{d'où} \quad \rho = \frac{c^2}{a}.$$

L'équation de l'axe de courbure est

$$a\mathfrak{P}\Xi(b\Omega_2 - a\iota_3) = b^2(at\Omega_1 + a\Omega_2 + b\iota_3).$$

Les angles de contingence et de torsion sont

$$d\tau = \frac{a}{c}dt, \qquad d\upsilon = \frac{b}{c}dt.$$

La distance du point $\mathrm{x} + d\mathrm{x}$ au plan osculateur est

$$\delta = \frac{1}{6}\frac{ab}{c}dt^3.$$

L'équation (23) de la surface polaire sera

$$a\Xi(b\Omega_2 - a\iota_3) = a^2bt + bc^2u + ab^2t\Omega_1 + ab^2\Omega_2 + b^3\iota_3,$$

en écrivant bc^2u au lieu de v. En développant, l'équation devient

$$\begin{aligned} -ab\xi^{(2)} + a^2\xi_3 + (a^2\xi^{(2)} + ab\xi_3)\Omega_1 - a\xi^{(1)}(a\Omega_2 + b\iota_3) \\ = a^2bt + bc^2u + ab^2t\Omega_1 + b^2(a\Omega_2 + b\iota_3), \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en décomposant,

$$\xi^{(1)} = -\frac{b^2}{a}, \qquad \xi^{(2)} = -\frac{b^2}{a}u, \qquad \xi_3 = b(t+u),$$

et par suite

$$\Xi = -\frac{b^2}{a}(\Omega_1 + u\Omega_2) + b(t+u)\iota_3.$$

Pour avoir le centre de la sphère osculatrice, cherchons

l'intersection de deux axes de courbure infiniment voisins. En joignant à l'équation de l'axe de courbure sa différentielle par rapport à t,

$$-ab.\mathfrak{V}\Xi\Omega_1 = ab^2 t\Omega_2,$$

d'où, en développant et décomposant,

$$a\xi^{(2)} + b\xi_3 = b^2 t, \qquad -a\xi^{(1)} = b^2, \qquad \xi^{(2)} = 0,$$

on en tire

$$\Xi = -\frac{b^2}{a}\Omega_1 + bt\mathrm{I}_3, \qquad \Xi - \mathrm{X} = -\frac{c^2}{a}\Omega_1 = \mathrm{R}.$$

Donc le centre de la sphère osculatrice coïncide avec le centre de courbure.

Cherchons enfin l'équation aux développées. On a

$$\mathrm{R} + \mathrm{U} = -\frac{c^2}{a}\Omega_1 + u(b\Omega_2 - a\mathrm{I}_3),$$

d'où

$$d(\mathrm{X}+\mathrm{R}+\mathrm{U}) = -\left[u\Omega_1 + \frac{1}{a}(b\Omega_2 - a\mathrm{I}_3)\right]b\,dt + (b\Omega_2 - a\mathrm{I}_3)du.$$

L'équation (27) donne alors

$$-(a\Omega_2 + b\mathrm{I}_3)\left[\left(\frac{c^2}{a^2} + u^2\right)b\,dt - \frac{c^2}{a}du\right] = 0,$$

d'où

$$ab\,dt = \frac{c^2 du}{\dfrac{c^2}{a^2} + u^2},$$

équation différentielle des développées de l'hélice. Connaissant u en fonction de t, on substituera sa valeur dans l'expression

$$\Xi = \mathrm{X} + \mathrm{R} + \mathrm{U}.$$

§ II.

Des surfaces courbes.

361. Une équation

(1) $$x = f(t, u)$$

entre un vecteur variable, des vecteurs constants et *deux* variables réelles t, u, représente une surface.

Soit

(2) $$\mathfrak{S}(\xi - x)A = 0$$

l'équation d'un plan passant par x. La distance du point $x + dx$ à ce plan sera

$$D = - A^{-1}\mathfrak{S}A\,dx,$$

ou, en développant, et désignant, pour abréger, par x', $x_{,}$ les dérivées partielles $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial x}{\partial u}$,

$$D = - A^{-1}\mathfrak{S}A(x'dt + x_{,}du + \varepsilon_2),$$

ε_2 étant un infiniment petit du second ordre. Cette distance sera infiniment petite d'ordre supérieur au premier, si l'on choisit A par la condition

$$\mathfrak{S}A(x'dt + x_{,}du) = 0,$$

et cela aura lieu tout autour du point x, si l'on pose séparément

$$\mathfrak{S}Ax' = 0, \qquad \mathfrak{S}Ax_{,} = 0,$$

c'est-à-dire si A est perpendiculaire au plan $x'x_{,}$, ou si l'on a

$$A \parallel \mathfrak{V}x'x_{,}.$$

L'équation (2) du plan tangent devient alors

(3) $$\mathfrak{S}(\xi - x)x'x_{,} = 0.$$

Le vecteur

(4) $$N = \mathfrak{V}x'x_{,}$$

est la normale à la surface, et l'équation différentielle de la surface peut s'écrire sous la forme

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{N}\,d\mathrm{x} = 0. \tag{5}$$

Si l'équation de la surface est donnée sous la forme

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}) = c,$$

c étant une constante réelle, N n'est autre chose que la quantité $\nabla\mathrm{F}(\mathrm{x})$, que nous avons considérée dans l'art. 610.

362. Ces conditions étant remplies, la distance du point $\mathrm{x} + d\mathrm{x}$ au plan tangent sera, aux infiniment petits du troisième ordre près,

$$\mathrm{D} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{N}^{-1}.\mathfrak{S}\,\mathrm{N}(\mathrm{x}'dt^2 + 2\mathrm{x}'_{,}dtdu + \mathrm{x}_{,}du^2), \tag{6}$$

et la courbure de la section normale correspondante à une valeur donnée de $\frac{du}{dt}$ sera

$$\frac{1}{r} = -\frac{2\mathfrak{T}\mathrm{D}}{d\mathrm{x}^2} = \pm\frac{\mathfrak{S}(\mathfrak{U}\mathrm{N}.d^2\mathrm{x})}{d\mathrm{x}^2}. \tag{7}$$

Si l'on suppose $\mathfrak{T}\mathrm{D}$ constant, on voit que r varie proportionnellement au carré du demi-diamètre $\mathfrak{T}d\mathrm{x}$ de l'indicatrice, d'où l'on déduit le théorème d'Euler.

On peut encore chercher directement le maximum ou le minimum de la valeur de $\frac{1}{r}$, laquelle, en posant $du = mdt$, prend la forme

$$\frac{\alpha + 2\beta m + \gamma m^2}{(\mathrm{x}' + \mathrm{x}_{,}m)^2}.$$

En égalant $d\frac{1}{r}$ à zéro, on a l'équation aux sections principales.

Si l'on considère une section oblique passant par la même tangente que la section normale, et faisant avec son plan un angle θ, la distance du point $\mathrm{x} + d\mathrm{x}$ à la tangente sera $\mathfrak{T}\mathrm{D}.\,\mathrm{s\acute{e}c}\,\theta$, d'où l'on déduit le théorème de Meusnier.

363. Une ligne géodésique ayant son plan osculateur normal

D'ailleurs, en vertu de l'équation du plan normal $\mathfrak{S}(\Xi-x)dx=0$, on a

$$\mathfrak{T}(\Xi-x).d\mathfrak{T}(\Xi-x)=-\mathfrak{S}(\Xi-x)d(\Xi-x)=-\mathfrak{S}(\Xi-x)\,d\Xi.$$

Donc

$$\frac{\mathfrak{T}(\Xi-x)}{\mathfrak{T}d\Xi}=\pm\frac{\mathfrak{T}(\Xi-x).d\mathfrak{T}(\Xi-x)}{(\mathfrak{T}d\Xi)^2},$$

d'où l'on tire

$$d\mathfrak{T}(\Xi-x)=\pm\,\mathfrak{T}d\Xi,$$

c'est-à-dire que l'élément d'arc de la développée est égal à l'accroissement correspondant de la longueur du vecteur $\Xi-x$.

359. Désignons par u le vecteur qui joint le centre de courbure $R+x$ de la courbe au point Ξ de la développée. On aura

$$\Xi-x=R+U.$$

En mettant pour $\Xi-x$ cette valeur dans l'équation (24), il vient

$$(27)\qquad \mathfrak{V}[(R+U)d(x+R+U)]=0.$$

Le vecteur R est donné en fonction de t par l'équation (16)

$$R=\frac{x'^3}{\mathfrak{V}x'x''}.$$

Le vecteur U est parallèle à $\mathfrak{V}x'x''$, et, en désignant par u son module, il a pour valeur

$$U=u.\frac{\mathfrak{V}x'x''}{\mathfrak{T}\mathfrak{V}x'x''}.$$

En mettant ces valeurs dans l'équation (27), on aura une équation différentielle entre t, u, dt, du, qui représentera les développées de la courbe proposée.

360. Appliquons les formules précédentes à l'hélice. Si l'on pose

$$\Omega_1=I_1\cos t+I_2\sin t,\qquad \Omega_2=\frac{d\Omega_1}{dt}=-I_1\sin t+I_2\cos t,$$

les trois vecteurs unitaires $\Omega_1, \Omega_2, \iota_3$ formeront un système rectangulaire, et l'on aura les relations

$$\Omega_1^2 = \Omega_2^2 = \iota_3^2 = -1, \qquad \Omega_1\Omega_2 = -\Omega_2\Omega_1 = -\iota_3, \text{ etc....}$$

L'équation de l'hélice pourra se mettre sous la forme

$$\mathrm{x} = a\Omega_1 + bt\iota_3,$$

d'où l'on tire, en posant $a^2 + b^2 = c^2$,

$$\mathrm{x}' = a\Omega_2 + b\iota_3, \qquad \mathrm{x}'' = -a\Omega_1, \qquad \mathrm{x}''' = -a\Omega_2,$$
$$ds = c\,dt, \qquad \mathrm{x}'\mathrm{x}'' = ab\Omega_2 - a^2\iota_3,$$
$$\mathrm{x}\mathrm{x}' = -b^2t + abt\Omega_1 + ab\Omega_2 - a^2\iota_3,$$
$$\mathrm{x}\mathrm{x}'\mathrm{x}'' = a^2bt + ab^2t\Omega_1 - a^3\Omega_2 - a^2b\iota_3.$$

L'équation de la tangente sera

$$\mathfrak{V}\Xi(a\Omega_2 + b\iota_3) = a(bt\Omega_1 + b\Omega_3 + a\iota_3).$$

Celle du plan normal sera

$$\mathfrak{S}\Xi(a\Omega_2 + b\iota_3) = -b^2t.$$

La distance du point $\mathrm{x} + d\mathrm{x}$ à la tangente sera, à cause de $d^2s = 0$, d'où $\mathfrak{S}\mathrm{x}'\mathrm{x}'' = 0$,

$$\mathrm{D} = -\tfrac{1}{2}d^2\mathrm{x} = \tfrac{1}{2}a\Omega_1 dt^2, \qquad \text{d'où} \qquad \mathfrak{T}\mathrm{D} = \tfrac{1}{2}a\,dt^2.$$

L'équation du plan osculateur est

$$\mathfrak{S}\Xi(b\Omega_2 - a\iota_3) = ab;$$

celle de la normale principale;

$$\mathfrak{V}\Xi\Omega_1 = -bt\Omega_2.$$

En mettant la valeur de Ξ sous la forme $\xi^{(1)}\Omega_1 + \xi^{(2)}\Omega_2 + \xi_3\iota_3$, on trouve immédiatement

$$\xi^{(2)} = -\xi_1 \sin t + \xi_2 \cos t = 0, \qquad \xi_3 = bt = x_3,$$

équations cartésiennes de la normale principale. En égalant $\mathfrak{S}\Xi\Omega_1 = -\xi^{(1)}$ à une nouvelle variable u, on a, pour la surface

suivant laquelle cette orbite est parcourue, la courbe qui a pour vecteur la dérivée

(2) $$\mathrm{x}' = f'(t)$$

du vecteur x est dite l'*hodographe* de l'orbite (1).

Le vecteur de l'accélération dans l'orbite (1),

$$\mathrm{x}'' = f''(t),$$

est le vecteur de la vitesse dans l'hodographe.

366. En désignant toujours l'élément d'arc par $ds = \mathfrak{T}d\mathrm{x}$, et par v la vitesse $\frac{ds}{dt}$, on a

(3) $$\mathrm{x}' = \frac{d\mathrm{x}}{dt} = \frac{d\mathrm{x}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = v\mathrm{T},$$

$\mathrm{T} = \frac{d\mathrm{x}}{ds}$ étant un vecteur unitaire parallèle à la tangente, d'où l'on voit que x′ représente la vitesse en grandeur et en direction.

Si l'on différentie l'équation (3), il vient

$$\mathrm{x}'' = \frac{dv}{dt}\frac{d\mathrm{x}}{ds} + v\frac{d\frac{d\mathrm{x}}{ds}}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{d\mathrm{x}}{ds} + v^2\frac{d\frac{d\mathrm{x}}{ds}}{ds}.$$

Nous avons vu (art. 353), que $\frac{d\frac{d\mathrm{x}}{ds}}{ds}$ représente un vecteur normal à la courbe au point x, dirigé de ce point vers le centre de courbure, et ayant pour module la courbure $\frac{1}{\rho}$. Si l'on représente donc ce vecteur par $\frac{\mathrm{N}}{\rho}$, et l'accélération tangentielle $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ par φ, on aura

(4) $$\frac{d^2\mathrm{x}}{dt^2} = \varphi\mathrm{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathrm{N}.$$

équation qui exprime très simplement la décomposition de l'accélération totale $\frac{d^2\mathrm{x}}{dt^2}$ en une composante $\frac{dv}{dt}$, dirigée suivant

la tangente, et une composante normale $\frac{v^2}{\rho}$ dirigée suivant la normale principale, et *vers* le centre de courbure de l'orbite.

367. L'équation en coordonnées polaires r, p d'une courbe plane peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{x} = \mathrm{B}.r\mathrm{A}^p,$$

B étant un vecteur unitaire situé dans le plan de la courbe, A l'axe unitaire de ce plan, et l'angle p étant exprimé, *dans les exponentielles* (art. 175), en parties du quadrant.

On peut considérer r et p comme liés par une équation réelle, ou mieux, comme exprimés l'un et l'autre en fonction du temps t. En différentiant et observant que l'on a

$$d.\mathrm{A}^p = d(\cos p + \mathrm{A}\sin p) = \mathrm{A}^p.\mathrm{A}\,dp,$$

il vient

$$\mathrm{x}' = \mathrm{B}\left(\mathrm{A}^p\frac{dr}{dt} + \mathrm{A}^{p+1}\frac{r\,dp}{dt}\right),$$

ce qui montre que $\frac{dr}{dt}$ est la composante de la vitesse parallèle au rayon vecteur $\mathrm{B}.r\mathrm{A}^p$, et $\frac{r\,dp}{dt}$ la vitesse perpendiculaire à ce vecteur, BA^p et $\mathrm{BA}^{p+1} = \mathrm{BA}^p.\mathrm{A}$ étant deux vecteurs perpendiculaires entre eux.

En différentiant de nouveau, on a

$$\mathrm{x}'' = \mathrm{B}\left[\mathrm{A}^p\left(\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{r\,dp^2}{dt^2}\right) + \mathrm{A}^{p+1}\left(2\frac{dr\,dp}{dt^2} + \frac{r\,d^2p}{dt^2}\right)\right],$$

ce qui donne les composantes de l'accélération parallèlement et perpendiculairement au rayon vecteur.

368. Si l'accélération est constante en grandeur et en direction, on aura, A étant un vecteur constant,

$$\frac{d^2\mathrm{x}}{dt^2} = \mathrm{A},$$

d'où, B étant un second vecteur constant, qui représente la vitesse pour $t = 0$,

$$\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \mathrm{A}t + \mathrm{B}.$$

L'hodographe est donc une ligne droite, décrite uniformément.

On a ensuite, par une seconde intégration,

$$\mathrm{x} = \tfrac{1}{2}\mathrm{A}t^2 + \mathrm{B}t + \mathrm{C},$$

C étant le vecteur initial du point. Les deux composantes $\frac{1}{2}\mathrm{A}t^2$ et $\mathrm{B}t$ de $\mathrm{x} - \mathrm{C}$, variant proportionnellement l'une au carré, l'autre à la première puissance du temps, la courbe est une parabole.

Maintenant, si l'on élève au carré la quantité positive

$$-\mathfrak{S}[\mathrm{A}(\mathrm{x}-\mathrm{C}) + \tfrac{1}{2}\mathrm{B}^2] = -(\tfrac{1}{2}\mathrm{A}^2t^2 + \mathfrak{S}\mathrm{AB}.t + \tfrac{1}{2}\mathrm{B}^2),$$

le résultat est égal au carré du produit

$$\mathrm{A}(\mathrm{x} - \mathrm{C} + \tfrac{1}{2}\mathrm{BA}^{-1}\mathrm{B}) = \mathrm{A}(\tfrac{1}{2}\mathrm{A}^2t^2 + \mathrm{B}t + \tfrac{1}{2}\mathrm{BA}^{-1}\mathrm{B}),$$

c'est-à-dire que l'on a, en égalant les racines et divisant par $\mathfrak{T}\mathrm{A}$,

$$\mathfrak{T}(\mathrm{x} - \mathrm{C} + \tfrac{1}{2}\mathrm{BA}^{-1}\mathrm{B}) = -\mathfrak{S}.\mathfrak{U}\mathrm{A}(\mathrm{x} - \mathrm{C} + \tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^2).$$

Cette équation exprime que la distance du point x au point $\mathrm{F} = \mathrm{C} - \frac{1}{2}\mathrm{BA}^{-1}\mathrm{B}$ est égale (art. 309) à la distance du même point au plan $\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{x} - \mathrm{C} + \frac{1}{2}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^2) = 0$. C'est l'équation d'un paraboloïde de révolution autour d'une parallèle au vecteur A, menée par le point F. On reconnaît là la propriété focale de la parabole.

La parabole sera l'intersection de cette surface avec le plan

$$\mathfrak{S}\mathrm{AB}(\mathrm{x} - \mathrm{C}) = 0.$$

La directrice sera l'intersection des plans

$$\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{x} - \mathrm{C} + \tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^2) = 0, \quad \mathfrak{S}\mathrm{AB}(\mathrm{x} - \mathrm{C} + \tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^2) = 0.$$

Son vecteur $\mathrm{x} - \mathrm{C} + \frac{1}{2}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^2$ étant ainsi perpendiculaire à chacun

des vecteurs A et $\mathfrak{V}\mathrm{AB}$, sera parallèle à $\mathfrak{V}(\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}) = \mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}$, et par suite l'équation de cette droite pourra s'écrire

$$\mathrm{X} - \mathrm{C} = -\tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}^2 + t.\mathrm{A}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}.$$

369. Pour que le mobile puisse atteindre un point P, lorsqu'il est lancé suivant le vecteur B avec une vitesse initiale v, il faut que, pour une valeur réelle de t, on puisse avoir

$$\mathrm{P} = \tfrac{1}{2}\mathrm{A}t^2 + tv\,\mathfrak{U}\mathrm{B}.$$

En élevant au carré, pour avoir une équation à coefficients réels, on a, à cause de $(\mathfrak{U}\mathrm{B})^2 = -1$,

$$(\tfrac{1}{2}\mathrm{A}t^2 - \mathrm{P})^2 = -t^2v^2.$$

ou

$$\tfrac{1}{4}\mathrm{A}^2t^4 + (v^2 - \mathfrak{S}\mathrm{AP})t^2 + \mathrm{P}^2 = 0.$$

La condition de réalité des racines sera

$$(v^2 - \mathfrak{S}\mathrm{AP})^2 - \mathrm{A}^2\mathrm{P}^2 > 0,$$

Or $\mathrm{A}^2\mathrm{P}^2 = (\mathfrak{T}\mathrm{AP})^2$ ne pouvant être moindre que $(\mathfrak{S}\mathrm{AP})^2$, on voit que, si les racines sont réelles, $v^2 - \mathfrak{S}\mathrm{AP}$ doit être nécessairement positif. Donc les deux valeurs de t^2 sont positives, lorsqu'elles sont réelles. Il existe donc alors deux paraboles différentes correspondantes à la vitesse donnée, et passant par le point P. Les quatre valeurs de t, égales deux à deux et de signes contraires, correspondent aux deux mêmes paraboles, décrites dans des sens opposés.

Si les racines de l'équation en t^2 sont égales, c'est-à-dire si l'on a

$$v^2 - \mathfrak{S}\mathrm{AP} = \mathfrak{T}\mathrm{AP},$$

le lieu du point P est l'enveloppe des paraboles correspondantes à la même vitesse. Ce lieu est un paraboloïde de révolution, qui a son foyer à l'origine, son axe parallèle à A, et son plan directeur à la distance $\dfrac{v^2}{\mathfrak{T}\mathrm{A}}$.

370. Supposons maintenant que l'accélération soit constam-

ment dirigée vers un centre fixe, que nous prendrons pour origine, et désignons par g sa grandeur. Nous aurons alors

$$\frac{d^2\mathrm{x}}{dt^2} = g . \mathfrak{U}\mathrm{x},$$

ou

(1) $$\mathfrak{V}\mathrm{x}\mathrm{x}' = 0.$$

En remarquant maintenant que

$$d . \mathfrak{V}(\mathrm{x}d\mathrm{x}) = \mathfrak{V}d(\mathrm{x}d\mathrm{x}) = \mathfrak{V}(d\mathrm{x}^2 + \mathrm{x}d^2\mathrm{x}) = \mathfrak{V}(\mathrm{x}d^2\mathrm{x}),$$

l'équation (1) donnera, par l'intégration,

(2) $$\mathfrak{V}\mathrm{x}\mathrm{x}' = \mathrm{c},$$

c étant un vecteur constant.

Cette intégrale fait voir que :

1° $\mathfrak{V}\mathrm{x}\mathrm{x}'$ étant parallèle à une direction constante, le plan de la biradiale $\mathrm{x}\mathrm{x}'$, ou le plan passant par la tangente à l'orbite et par l'origine est de direction constante. Donc l'orbite est plane, et son plan passe par le centre d'action.

2° L'aire du triangle compris entre les côtés x et x' étant égale à $\frac{1}{2}\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathrm{x}\mathrm{x}'$ (art. 295), on en conclut que l'aire décrite par le vecteur dans l'élément de temps dt est constante, et égale à

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{T}\mathfrak{V}\mathrm{x}d\mathrm{x} = \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}\mathrm{c}.dt.$$

371. Considérons maintenant le cas où l'accélération est inversement proportionnelle au carré de la distance, c'est-à-dire où l'on a

$$g = \frac{\mu}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2},$$

la constante μ étant négative dans le cas où l'accélération est dirigée *vers* l'origine. On aura alors

(3) $$\mathrm{x}' = \mu\frac{\mathfrak{U}\mathrm{x}}{(\mathfrak{T}\mathrm{x})^2}.$$

Or nous avons trouvé (art. 603)

$$d\mathfrak{U}x = -\frac{\mathfrak{U}x.\mathfrak{V}x\,dx}{(\mathfrak{T}x)^2} = -\frac{\mathfrak{U}x.c\,dt}{(\mathfrak{T}x)^2}.$$

Donc

$$x'.c\,dt = -\mu.d\mathfrak{U}x,$$

d'où, en intégrant,

$$x'c = \kappa - \mu\mathfrak{U}x,$$

κ étant un vecteur constant perpendiculaire à c, puisque l'équation (2) de l'article précédent donne $\mathfrak{S}x'c = 0$, et $\mathfrak{S}xc = 0$, d'où $\mathfrak{S}(\mathfrak{U}x.c) = 0$, ce qui montre que le vecteur $\kappa = x'c + \mu\mathfrak{U}x$ doit être perpendiculaire à c.

L'équation de l'hodographe est donc

(4) $$x' = \kappa c^{-1} - \mu.\mathfrak{U}x.c^{-1}.$$

L'un des termes du second membre étant un vecteur constant, et l'autre un vecteur de module constant $\frac{-\mu}{\mathfrak{T}c}$, il s'ensuit que $\mathfrak{T}(x' - \kappa c^{-1})$ est constant. Donc l'hodographe est un cercle dont le plan est perpendiculaire à c, et partant parallèle à l'orbite; son rayon est $-\frac{\mu}{\mathfrak{T}c}$, et son centre est au point κc^{-1}. Le cercle peut être représenté par la combinaison de l'équation

$$\mathfrak{T}(x' - \kappa c^{-1}) = -\frac{\mu}{\mathfrak{T}c},$$

qui est celle d'une sphère, et de l'équation

$$\mathfrak{S}cx' = 0,$$

qui est celle d'un plan passant par l'origine et par le centre de la sphère.

372. En opérant sur l'équation (4) par $\mathfrak{V}x\times$, il vient [art. 370, (2)]

$$\mathfrak{V}xx' = c = \mathfrak{V}x\kappa c^{-1} - \mu\mathfrak{V}(x.\mathfrak{U}x.c^{-1}),$$

ou, à cause de $\mathrm{x}.\mathfrak{U}\mathrm{x} = \frac{\mathrm{x}^2}{\mathfrak{T}\mathrm{x}} = -\mathfrak{T}\mathrm{x}$,

$$\mathrm{c} = \mathfrak{V}\mathrm{x}\mathrm{\kappa}\mathrm{c}^{-1} + \mu.\mathfrak{T}\mathrm{x}.\mathrm{c}^{-1}.$$

En opérant maintenant par $\mathfrak{S}\mathrm{c}\times$, on a

$$\mathrm{c}^2 = \mathfrak{S}\mathrm{\kappa}\mathrm{x} + \mu.\mathfrak{T}\mathrm{x},$$

c'est-à-dire

(5) $$\mu\mathfrak{T}\mathrm{x} = \mathfrak{S}.\mathrm{\kappa}(\mathrm{c}^2\mathrm{\kappa}^{-1} - \mathrm{x}),$$

forme sous laquelle on reconnaît la propriété du foyer et de la directrice d'une section conique. C'est l'équation d'une surface du second ordre, de révolution autour de son axe principal $\mathrm{\kappa}$, l'origine étant à l'un des foyers. On obtiendra l'orbite, en coupant cette surface par le plan

$$\mathfrak{S}\mathrm{c}\mathrm{x} = 0.$$

Le vecteur qui donne la distance de la directrice au foyer est $\mathrm{c}^2\mathrm{\kappa}^{-1}$; l'excentricité est $-\frac{\mathfrak{T}\mathrm{\kappa}}{\mu}$, et le grand axe $\frac{2\mu\mathrm{c}^2}{\mu^2 + \mathrm{\kappa}^2}$.

373. ***Étant donnée une courbe***

$$\mathrm{Y} = \mathrm{F}(t),$$

trouver la condition pour que cette courbe puisse être l'hodographe d'une orbite centrale.

Y devant être égal à la dérivée du vecteur de l'orbite cherchée, ce vecteur sera égal à $\int \mathrm{Y}dt$, et par suite on aura, en vertu de l'équation (2) (art. 370),

(6) $$\mathfrak{V}(\mathrm{Y}\textstyle\int \mathrm{Y}dt) = \mathrm{c},$$

ce qui donne la condition cherchée.

Cette condition peut se mettre sous d'autres formes, plus approchantes de la forme cartésienne. On en tire, en différentiant,

(7) $$\mathfrak{V}(\mathrm{Y}'\textstyle\int \mathrm{Y}dt) = 0,$$

(8) $$\mathfrak{V}(\mathrm{Y}''\textstyle\int \mathrm{Y}dt + \mathrm{Y}'\mathrm{Y}) = 0.$$

L'équation (7) peut s'écrire, u étant réel,

(9) $$\int \mathrm{Y}\,dt = u\mathrm{Y}',$$

ou, en opérant par $\mathfrak{V}\mathrm{Y}\times$,

$$\mathrm{C} = u.\mathfrak{V}\mathrm{YY}'.$$

La courbe est donc située dans un plan perpendiculaire à C.

En opérant sur (9) par $\mathfrak{V}\mathrm{Y}'\times$, il vient, d'après (8),

$$u.\mathfrak{V}\mathrm{Y}'\mathrm{Y}' = -\mathfrak{V}\mathrm{Y}'\mathrm{Y},$$

d'où, en éliminant u,

$$\mathrm{C}.\mathfrak{V}\mathrm{Y}'\mathrm{Y}' = -(\mathfrak{V}\mathrm{YY}')^2.$$

Si maintenant w est la vitesse sur l'hodographe, ρ son rayon de courbure, ϖ la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la tangente, on aura, conformément aux résultats connus.

$$hw = \rho\varpi^2,$$

h étant une constante.

FIN.

ERRATA

Page	Au lieu de	Lisez
11, l. 12	$a \smile b'$	$a \frown b'$
12, l. 18	inverse de $\overset{b}{V}\bar{c}$,	$\overset{b}{V}\bar{c}$, inverse de
16, l. 5	(20)	(21)
16, l. 5 en rem	$a \frown \bar{\bar{a}}$	$\bar{a} \frown a$
16, l. 3 en rem	$\bar{a} \frown a$	$a \frown \bar{a}$
17, éq. (31), 1er m.	$\frown \bar{b}$	$\frown b$
28, l. 12 en rem	[25]	[34]
35, l. 12 / 41, l. 11 en rem	parallélipipède	parallélépipède.
49, l. 11	AO — OD	AO — OC
53, l. dernière	$(1-\beta)$ B′	$(1-\alpha)$ B′
54, l. 2	$(1-\gamma)(\beta-\alpha)=0$	$(1-\gamma)(\beta-\alpha)\mathrm{F}=0$
70, l. 6	B′ +	A′ +
70, éq. (3)	$(p-1)q+pr-qr$	$(p-1)q-pr+qr$
72, l. 5 en rem	arg DC	arg CD
73, l. 5 en rem	$=\frac{R'G}{R'A}$	$=\frac{R'G}{R'R}$
73, l. 4 en rem	$=\frac{R'H}{R'A}$	$=\frac{R'G}{R'R}$
74, l. 9	= RR′.R′G	= — RR′.R′G
74, l. 11	GHR′, HGR′	HGR′, GHR′
76, l. 12 en rem	$\bar{\mathrm{F}}+\bar{\mathrm{A}}_1.\mathrm{B}$	$\bar{\mathrm{F}}+\bar{\mathrm{A}}_1.\mathrm{C}$
76, l. 9 en rem	A_2	A_2

Page	Au lieu de	Lisez
77, l. 6 et 7	1 O M	1 O K
77, l. 9	$\bar{G}$K	$\bar{G}$.K
80, l. dernière	$x_\alpha = y_\beta$	$x_\alpha + y_\beta$
82, l. 7 et 9 en rem.	111	110
83, l. 10	120, (3)	123, (6)
85, l. 3	O'a	Oa
85, l. 6	$= -\frac{1}{2} bt$	$= \frac{1}{2} bt$
86, l. 11 en rem.	$\frac{h^2 + h'^2}{2}$	$\frac{h^2 + h'^2}{4}$
90, l. 16	$\zeta + 2\gamma$	$\zeta - 2\gamma$
92, l. 9 en rem.	$-\lambda \sin t + \mu \cos t$	$-\lambda \sin t + i\mu \cos t$
104, l. 8 en rem.	O M	O L
122, l. 11	$= a_0 b_0 - (a_0 b_t$	$= a_0 b_0 + \mathfrak{S}\, b_i a_i - (a_0 b_i$
124, l. 3 en rem.	$(a^{\frac{1}{\alpha}} A)^\alpha$	$(a^{\frac{1}{\alpha}}\text{A})^\alpha$
133, l. dernière	179	178
136, l. 5	78	180
136, l. dernière	$= \frac{\sqrt{12}}{3}$	$= \frac{\sqrt{17}}{3}$
137, l. 8	$= \frac{1}{6}(2\text{I} +$	$= \frac{1}{6}(2\text{I}_1 +$
139, l. 4	HG . . . AB	HG . . . BA
141, l. 5	(13)	(13)'
142, l. 9	$+ \lvert a_3 b_1 \rvert c_2 - \lvert a_1 b_2 \rvert c_3$	$+ \lvert a_3 b_1 \rvert c_3 - \lvert a_1 b_2 \rvert c_2$
149, l. 10 en rem.	$= -\text{B} - \text{A}^{-1}\Sigma ab$	$= \text{B} + \text{A}^{-1}\Sigma ab$
150, l. 9 en rem.	$(\mathfrak{T} a)^2$	$(\mathfrak{T} A)^2$
155, l. 8	$= -2(\mathfrak{V} q_i c_i)^2$	$= 2(\mathfrak{V} q_i c_i)^2$
160, l. 8	$= \lambda \text{X}$	$= \lambda\mu \text{X}$
160, l. 17	(2)	(7)
161, l. 10	(2)	(7)
166, l. 2 en rem.	$\text{A}.\text{A}^{-1}\mathfrak{S}\text{BC}.\text{B} +$	$\text{A}.\text{A}^{-1}\mathfrak{S}\text{AC}.\text{B} +$
173, l. 5	$\mathfrak{V}\text{E}^2\text{C}]$	$\mathfrak{V}\text{ECE}]$
173, l. 7	$\mathfrak{V}\text{CE}.\text{E}]$	$\mathfrak{V}\text{CE}.\text{C}]$
176, l. 7 en rem.	$+ \text{A}'.(\mathfrak{S}\text{C}'\text{B}'.\mathfrak{S}$	$+ \text{A}'.(\mathfrak{S}\text{CB}'.\mathfrak{S}$
182, l. dernière	$\frac{g_1 + g_2}{2}$	$\frac{g_1 + g_3}{2}$

Page	Au lieu de	Lisez
183, l. 13 en rem.	monogène X	monogène de X
183, l. 4 en rem.	après « *partie principale* », ajoutez « de la différentielle ».	
188, l. 8	$=d\mathfrak{T}.\mathfrak{U}\mathrm{x}$	$d\mathfrak{T}\mathrm{x}.\mathfrak{U}\mathrm{x}$
190, l. 5 en rem.	$d\mathfrak{C}\overline{X}$	$d\mathfrak{C}X$
191, l. 10 et 9 en r.	changer en — le premier signe + après le signe =.	
210, l. 12	représentée par	représentée symboliquement par

TABLE DES MATIÈRES.

Bordeaux. — Imp. G. Gounouilhou, rue Guiraude, 11.

MÉMOIRE

SUR LES ÉTUVES A FARINE

LEUR THÉORIE ET LEUR CONSTRUCTION

PAR M. ORDINAIRE DE LACOLONGE
Ancien élève de l'École Polytechnique.

INTRODUCTION.

Beaucoup d'appareils industriels ont été inventés, construits et admis dans la grande pratique, bien avant que la théorie en ait été présentée. Souvent même les chercheurs, ayant su tirer parti d'un phénomène naturel, ont pour ainsi dire forcé les physiciens à en étudier les lois. Citons-en un seul exemple.

Depuis plus d'un siècle, la vapeur, entre les mains de Denis Papin, était devenue un puissant agent dynamique, quand MM. Dulong et Arago furent chargés par l'Institut d'étudier les relations qui existent entre les températures et les tensions de ce fluide.

Cela s'explique aisément. La matière, sous toutes ses formes, a des propriétés perceptibles et palpables qui frappent l'intelligence de l'homme réfléchi. Il cherche à en tirer parti. Il n'a pas toujours l'instruction nécessaire pour analyser les faits qu'il veut utiliser, et pour se livrer à des études qui, la plupart du temps, l'épouvanteraient et arrêteraient sa conception, si même elles étaient possibles de son temps. L'inventeur tâtonne avec une ténacité qui peut le conduire à la ruine, s'il est parti d'une mauvaise interprétation du phénomène observé; il réussit parfois quand elle est juste.

Cette voie, qui est la voie naturelle à l'esprit humain, ne conduit au but qu'à force de labeur. On arrive ainsi à réaliser des

appareils fonctionnant convenablement, mais pas toujours de la façon la plus économique, et susceptibles d'être copiés servilement pour obtenir un résultat identique comme produit, durée et dépense. Mais dès que les données du problème, comme temps et quantité, varient, l'incertitude recommence, et, pour le résoudre, on n'a que l'interprétation de la pratique, qui peut tromper quand elle n'est pas étayée par la théorie.

Il en est ainsi des étuves à farine, sur lesquelles nous ne connaissons d'autres calculs théoriques que ceux de M. Rollet, très courts et, à notre sens, très incomplets. Nous cherchons à combler cette lacune sans prétendre y être absolument parvenu. Pour certains détails les expériences concluantes manquent, et il a fallu y suppléer par des hypothèses.

Le mouvement du calorique à travers les corps solides a été l'objet de nombreuses recherches de laboratoire, dans les limites que comporte ce lieu d'observation. En déduire ce qui se passe dans les appareils industriels donnerait lieu à des mécomptes, si on n'avait pas recours à des correctifs, à des coefficients, que les faits ne font connaître qu'approximativement, s'étant passés dans des conditions moins précises que celles préparées dans les appareils de physique.

Le *Traité de la chaleur,* de feu M. Peclet, est le livre où ces renseignements sont le plus nombreux. Nous le citerons fréquemment dans ce mémoire, en signalant ce dont nous avions besoin et n'y avons, dans certains cas, trouvé qu'en raisonnant par induction ou comparaison.

Ce travail n'est donc pas tel que nous l'aurions désiré; mais son but sera atteint s'il amène les constructeurs à sortir des sentiers battus, et les physiciens et naturalistes à s'occuper d'une question fort intéressante pour l'alimentation publique et le commerce d'exportation.

I

Différents systèmes d'étuve aujourd'hui en usage.

1. En 1754, Duhamel du Monceau publiait son *Traité de la conservation des grains*. Préoccupé de la pensée que l'altération des céréales est due à leur emmagasinage à l'état humide, il cherche à les soustraire à cette cause de détérioration, en les soumettant, au préalable, à l'action d'une température artificielle. On trouve dans l'ouvrage cité le dessin de l'appareil imaginé par l'auteur qui lui donne le nom d'*Étuve*.

Duhamel reconnaît n'avoir pas la priorité de l'idée, car, pendant le cours de ses études, il a appris que, bien antérieurement, en Chine, en Italie, en Espagne, en France même, on faisait subir aux grains une certaine dessiccation, pour les conserver plus sûrement.

Quelques années plus tard, sachant combien il était difficile de garder à bord des navires des farines saines et susceptibles de donner de bon pain aux équipages, une fois ou deux par semaine, Duhamel imagina de traiter par la chaleur les minots destinés aux voyages de long cours. Des essais furent opérés dans les magasins de l'État. Ils réussirent. On trouve des renseignements très précis sur cette nouvelle application de l'étuve dans un *Supplément* au premier traité. Ce supplément a été imprimé en 1765. Duhamel est donc bien l'inventeur de l'étuvage des farines.

Les récents travaux de M. Pasteur permettent d'attribuer à l'opération un résultat plus complexe qu'on ne le croyait à la fin du siècle dernier, et que ne le supposent encore la plupart de ceux qui la pratiquent. L'élévation de la température produit non seulement l'évaporation d'une partie du liquide contenu, mais elle agit encore sur les germes et corpuscules organisés qui causent la fermentation. Elle les prive de vie, quand la chaleur atteint un certain degré. Nous aurons à y revenir.

Pendant bien des années l'industrie s'en tint à l'appareil primitif de l'inventeur, ou ne lui apporta que d'insignifiantes modifications. C'était une chambre close, au milieu de laquelle s'élevait un calorifère assez souvent chauffé au rouge-blanc, qui correspond à 1300°. Contre les parois de cette chambre étaient étagées des tablettes, où l'on étendait la farine en couches minces. Il est inutile d'insister sur les imperfections d'une pareille installation, où rien n'était préparé pour l'entrée de l'air neuf et la sortie de celui chargé d'humidité.

Les usagers lui reprochaient d'exiger beaucoup de temps pour le chargement et le déchargement, et d'exposer à une température excessive les ouvriers accomplissant ces opérations.

Vers 1825, avec la construction des moulins américains, improprement dits à l'*anglaise*, s'introduisait en France un petit mécanisme aussi simple qu'important par son utilité. Il est dû à Olivier Evans.

Si on donne un coup de râteau sur une table couverte d'une couche de farine, les dents poussent à droite et à gauche celle placée sur leur chemin, et la réunissent à ce qui se trouvait déjà vis-à-vis l'intervalle de ces dents. La table présente alors une alternance de sillons et d'ados, comme un champ labouré. Si les dents sont remplacées par des palettes biaises, chacune d'elles ramasse toute la farine placée en face, et la conduit sur le côté. Il y a encore des sillons et des ados; mais ils sont plus accentués; toute la farine a été remuée, et poussée latéralement d'une quantité qui dépend de la largeur de la palette.

Dans l'appareil d'Olivier Evans, la table est remplacée par un plateau circulaire, monté par son centre, sur un arbre vertical. Le corps du râteau est armé de palettes biaises; il est relié à cet axe; que le plateau, ou le râteau, soit animé d'un mouvement de rotation, l'effet est le même; les ados de farine sont poussés de la circonférence au centre, ou inversement suivant le sens du biais des palettes. S'il y en a six, après six révolutions, la portion de matière placée primitivement à la périphérie, se trouvera près du centre, ou réciproquement.

Tel est le principe du *Refroidisseur,* destiné à faire perdre à la boulange, sortant des meules, le calorique que la trituration lui a fait acquérir. L'appareil peut se composer de tel nombre de plateaux étagés que l'on veut, la farine tombant de l'un à l'autre, et y faisant alternativement un trajet de sens différent. Ici le travail est absolument mécanique et continu. Il suffit de faire arriver, par une trémie, la boulange sur le plateau supérieur, et de la recevoir lors de sa chute du plateau inférieur. L'un des systèmes d'étuve continue est basé sur cette disposition.

Dans les moulins américains, où la main-d'œuvre est réduite le plus possible et remplacée par le travail mécanique, le transport de la boulange, d'un point à un autre du même étage, se fait au moyen d'un appareil fort ingénieux. Un petit arbre en fer est, sur toute sa longueur, armé d'une hélice en ferblanc. Cet arbre, animé d'un mouvement de rotation assez lent, tourne dans un auget de même longueur. La farine, placée d'abord à l'une de ses extrémités, est poussée à l'autre par l'hélice. C'est la vis hollandaise appliquée aux matières pulvérulentes. Un second système d'étuve continue est basé sur cet agencement.

2. En compulsant les brevets d'invention, on trouve, sur l'un et l'autre mode d'étuvage, les indications suivantes relevées dans l'ordre chronologique.

M. Lebel. 6 mai 1838. Il emploie 12 plateaux fixes et un râteau tournant pour chacun d'eux.

M. Coumeau, à Vianne (Lot-et-Garonne). 21 septembre 1840. Ses plateaux sont tournants et les râteaux fixes.

MM. Rollet et Lasseron. 31 décembre 1840. Ils se servent, comme les précédents, de plateaux et de râteaux.

MM. Thébaud frères, de Nantes. 24 septembre 1844. Ce sont ici encore des plateaux tournants, étagés verticalement l'un au-dessus de l'autre. Chacun d'eux, à moitié distance du centre à la circonférence, présente une large fente circulaire; de chaque côté, la farine s'étale en arrivant. Deux planchettes fixes, assemblées de façon à présenter en plan la forme d'un V,

saisissent entre leurs côtés la farine qui a opéré une révolution, et la poussent vers la fente, par où elle tombe sur le plateau inférieur. Celui-ci, pareil au précédent, a, sous l'organe *ramasseur,* sa fente couverte par une sorte de toit à deux pentes offrant en coupe verticale la forme d'un A. La farine glisse sur les deux plans de l'*étaleur,* et s'étend sur les deux zones du second plateau. Sur celui-ci recommence ce qui s'est passé sur le premier et ainsi de suite.

Des râteaux placés en arrière de l'étaleur remuent et divisent la farine plusieurs fois dans le cours d'une révolution.

M. Mouysset. 28 mars 1846. Les parois de l'étuve sont, dans ce brevet, garnies d'augets demi-cylindriques, ou gouttières, dans lesquelles se meut la matière poussée par des hélices. Les gouttières sont étagées de façon que la farine tombant de l'une à l'autre, circule plusieurs fois autour de l'étuve, d'où, arrivée par en haut, elle sort par la partie inférieure.

Dans toutes ces étuves le calorifère est au bas de la chambre, et se chauffe par les procédés ordinaires.

Dans son important et très complet *Mémoire sur la meunerie et la boulangerie,* publié en 1847, M. Rollet, déjà cité, décrit plusieurs autres systèmes d'étuve dont il est bon de dire un mot, afin qu'il soit bien établi que les brevets, dont ils peuvent avoir été l'objet, sont aujourd'hui, comme les précédents, dans le domaine public.

Le mécanisme de l'étuve de MM. Michels Béer et C[ie], de Bruxelles, se compose encore d'hélices et de gouttières, mais celles-ci sont à double fond. Un courant de vapeur circule dans la cavité ainsi ménagée, et produit l'évaporation qui a donc lieu sans l'aide d'un calorifère.

M. Bransouillé qui, à cette époque, avait une des premières marques de Nérac, faisait circuler ses minots dans une série de cylindres rotatifs chauffés extérieurement. Ce moyen est très peu employé.

M. Touaillon. 9 juin 1860. Le dessin qui accompagne le brevet de cet habile constructeur de moulins, présente un plateau fixe

sur lequel se meuvent quatre râteaux armés de palettes biaises. Ce plateau est à double fond. Sa capacité intérieure renferme un serpentin où circule un courant de vapeur qui chauffe le minot.

Les palettes sont terminées par des pinceaux en soies de sanglier. Ils lèchent la surface du plateau, et empêchent la farine de séjourner et de vieillir dans le creux de ses ondulations. Ces palettes ne sont pas invariables dans leur position. Un mécanisme spécial permet de les biaiser plus ou moins, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre et à volonté. Le minot peut donc faire sur le plateau des évolutions variées et y séjourner tout le temps que l'on veut.

Plusieurs mécanismes livrés par M. Touaillon, particulièrement pour l'exportation, se composent d'une série de plateaux montés sur la même colonne, leur nombre dépendant des effets à obtenir. Le brevet de cet ingénieur, pris pour quinze ans, tombe cette année dans le domaine public. Il sera l'objet d'une étude spéciale qui terminera ce mémoire.

En résumé, les étuves aujourd'hui en usage dans les minoteries sont à vis hollandaise, ou à plateaux.

Elles sont chauffées par calorifère, ou par la vapeur.

3. A quelle température doit-on et peut-on soumettre les minots destinés à l'exportation? Quelle est la quantité d'humidité qu'ils contiennent, et celle qu'il convient de leur enlever? Ces chiffres, base de tout calcul de dessiccation, sont très diversement appréciés par les auteurs et les industriels.

Duhamel du Monceau estime à 5, 7 et même 10 pour cent, la quantité d'humidité contenue dans la farine. Bequillet la porte à 17. On admet en général que l'étuvage doit enlever la moitié de cette humidité. A Laubardemont, importante usine du département de la Gironde, on étuve avec succès à 3 pour cent, ce qui correspondrait à 6 d'humidité. Comme la marque de cet établissement est fort estimée, ces chiffres semblent mériter la confiance.

Ces grandes différences entre les appréciations tiennent

probablement au climat, à la qualité et à l'état des céréales employées, au traitement qu'elles subissent.

Les minots destinés au commerce d'outre-mer proviennent de froments purs emmagasinés un certain temps et soigneusement passés au criblage. La boulange qu'ils produisent est bien débarrassée de son par le blutage. Ces opérations se font avec de longs circuits en plein air; elles ont une assez grande durée pour que, arrivé à l'étuve, le minot ait perdu une notable quantité de son humidité primitive. Quelle que soit, à cet égard, notre opinion personnelle, il est certain que chaque fabricant est parfaitement fixé sur la quantité d'humidité à enlever au minot qu'il produit.

Le degré de température que les minots peuvent supporter sans danger, est fort diversement apprécié par les auteurs spéciaux Duhamel dit 50 à 60° Réaumur, ce qui correspond à 62° et 75° centigrades; Parmentier 90°; Rollet 75° à 80°; il ajoute qu'il convient que la température de l'étuve ne dépasse pas 41°; ce qui exige, suivant lui, que l'air y entre à 56° et en sorte à 25°. Le même auteur constate que dans une étuve construite par M. Mazeline du Havre, les minots étaient tenus à 66° et 75°. Chez M. Bransouillé, la température variait de 75° à 80°.

A l'usine de Laubardemont, on estime que, dans une étuve construite tout récemment par M. Feray d'Esponne, l'air entre à 80° ou 85° et sort à 40°.

M. Touaillon affirme qu'à 70° le gluten, que la farine contient dans la proportion de 10 pour cent environ, commence à s'altérer de façon à nuire au succès de la panification.

M. Pasteur fixe à 120° ou 125° la limite de la résistance vitale des spores. M. Payen prétend que l'*oïdium aurantiacum*, qui envahit le pain, résiste à une température humide de 140°.

M. Pouchet affirme qu'il suffit de 80° pour détruire la vitalité des œufs ou semences de proto-organismes qui peuvent exister dans les liquides.

Il serait bien à désirer que des hommes d'une aussi haute

valeur s'occupassent de déterminer la température à laquelle les farines peuvent être exposées utilement et sans danger.

C'est peut-être à l'incertitude qui règne sur cette importante question qu'est due l'opinion de quelques fabricants, très habiles du reste. Ils regardent l'étuvage comme inutile quand les meules sont bien conduites. Cette opération est cependant considérée, par la grande majorité des minotiers, comme indispensable pour les produits destinés à l'exportation.

Il est positif que tout fabricant sait, par expérience, la température qui convient le mieux à l'étuve qu'il emploie, et aux froments qu'il met en œuvre.

La même incertitude règne sur la quantité de combustible nécessaire à l'étuvage d'un poids de minot déterminé. Evidemment elle dépend de l'état hydrométrique de la matière à traiter, du mode de construction du calorifère et de l'étuve, et du soin dont leur entretien et leur conduite sont l'objet.

Rollet cite une étuve, construite par M. Mazeline du Havre, qui produisait, en 24 heures, 4,000 kilog. avec deux hectolitres de coke. Il s'étonne de la modicité de cette consommation. Un fabricant nous affirmait que la sienne consommait trois hectolitres de houille pour le même produit à une époque où son calorifère était dans un pitoyable état.

Dans une étuve du système Thebaut, chauffée au bois de pin, la consommation est si faible que nous n'en avons pas consigné le chiffre, tellement il nous a paru invraisemblable. Nous sommes donc porté à croire que, avec de bons calorifères, la consommation de combustible est moins forte qu'on ne le pense, et que les chiffres auxquels nous conduira la théorie, sont très voisins de la vérité.

Le temps pendant lequel le minot doit séjourner dans l'appareil est fort utile à connaître, bien qu'on puisse le déterminer théoriquement. Mais en pareille matière les résultats pratiques ont une grande valeur. Nous avons observé deux étuves en plein travail. Le minot séjournait 66 minutes dans la plus importante, 48 dans l'autre. Ces chiffres résultant d'un examen attentif, et les produits

des deux établissements s'écoulant bien, nous admettrons que, dans les étuves actuelles, la durée du séjour est d'une heure.

Nous étudierons d'abord le mécanisme des trois principales dispositions décrites ci-dessus.

II

Examen du mécanisme des trois systèmes d'étuve le plus fréquemment employés.

Étuve à vis hollandaise.

4. Dans les étuves à vis hollandaise, les dimensions des organes sont habituellement les suivantes :

$2r$ Diamètre de l'auget, $0^m,30$;
P Pas de l'hélice, $0^m,13$ à $0^m,14$;
L Développement total des augets, 100^m généralement;
w Vitesse du mouvement de la farine, $0^m,020$ à $0,^m025$ par seconde;
k Hauteur du segment que la farine occupe dans l'auget, $0^m,06$ environ.

Désignons par

F le poids total de la farine à étuver dans le temps Θ exprimé en secondes;

$\frac{F}{\Theta}$ sera le poids de la quantité de farine à faire entrer dans l'étuve par seconde;

Θ' la durée en secondes du séjour de cette quantité de farine dans l'étuve; cette durée est généralement de 1^h ou $3,600''$;

F′ le poids de la totalité de la farine séjournant simultanément dans l'étuve;

$\frac{F'}{\Theta'}$ sera encore le poids de la farine à faire entrer dans l'étuve par seconde, d'où

$$\frac{F}{\Theta} = \frac{F'}{\Theta'}.$$

540^k étant le poids du mètre cube de la farine,

$\frac{F'}{540}$ est le volume du poids F′ de farine;

s l'aire de la section que la farine occupe dans l'auget (*fig.* 1);

e la demi-corde AD;

α le demi-angle au centre AOD.

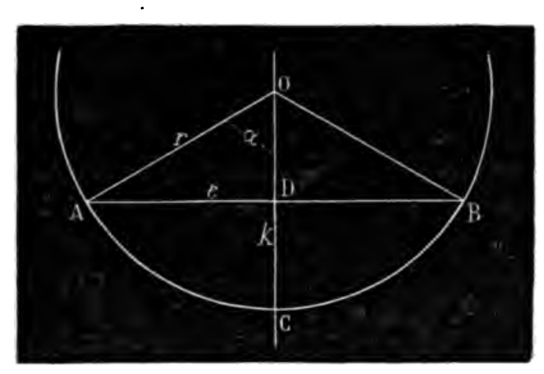


Fig. 1.

On arrivera aisément aux relations suivantes qui doivent exister entre F′, Θ′, L, w et s.

$$\Theta' = \frac{L}{w}, \quad \frac{F'}{540} = s.L.$$

La figure montre que l'on a

$$e = \sqrt{r^2 - (r-k)^2} = \sqrt{(2r-k)k}, \qquad \sin\alpha = \frac{e}{r},$$

et que l'aire du segment ABC est égale à celle du secteur AOBC, diminuée de la surface du triangle AOB, ce qui donne :

$$(1) \qquad s = \pi r^2 \frac{2\alpha}{360} - e(r-k),$$

et peut encore s'écrire

$$(2) \qquad s = \frac{\pi r^2 2\alpha}{360} - \frac{r^2}{2}\sin 2\alpha.$$

Le poids F′ de farine à traiter par heure est la donnée principale de l'établissement d'une étuve. On a vu quelles étaient les valeurs

habituelles de L et w. Celle attribuée à Θ' résulte de l'expérience, et il ne serait pas prudent de s'en écarter notablement, avant d'avoir la certitude théorique de pouvoir le faire.

Il est évident que les constructeurs, en adoptant pour L et w les chiffres cités, ont eu pour but de réduire le plus possible le circuit, forcément considérable, des augets. Il ne saurait en effet y avoir d'inconvénient pratique à donner plus de vitesse au mouvement de la farine, puisque, plus elle sera remuée, mieux elle sera en contact avec l'air chaud. On a donc quelque latitude dans la détermination de la vitesse du mouvement.

La valeur de la section s, occupée par la farine dans l'auget, est la conséquence des nombres adoptés pour Θ', L et w. Elle doit toutefois satisfaire à d'autres conditions. Dans les étuves à vis qu'il nous a été possible d'observer, la flèche k du segment est d'environ $0^m,06$. C'est précisément le chiffre que M. Touaillon recommande de ne pas dépasser pour les couches de minot étalées sur des plateaux tournants.

Sur ces derniers la couche est uniforme dans chaque zone et la matière bien remuée par les palettes. Dans les augets la section n'atteint son maximun de profondeur que sur un point, et la farine est plutôt poussée que remuée. On a donc lieu de croire que, même dans les gouttières, la hauteur de $0^m,06$ ne doit pas être fortement dépassée.

La section s, dont on a besoin, étant connue, et sa hauteur devant être de $0^m,06$, à moins de trop de difficultés pratiques, il reste à déterminer le rayon r à donner à l'auget pour remplir ces conditions. Or, ni l'une ni l'autre des équations (1) et (2), fonctions de r et de s, ne se prête aux procédés ordinaires de calcul, et on ne peut opérer que par tâtonnements.

5. Pour nous aider dans cette voie, voyons ce que donnent les formules précédentes dans le cas habituel, où on a :

$$r = 0^m,15, \quad k = 0^m,06;$$

Elles fournissent

$$e = 0^m,12, \quad \sin\alpha = 0,80, \quad \alpha = 53^\circ 8', \quad s = 0^{mq},01.$$

Avec ces chiffres et un développement d'auget de

$$L = 100^m,$$

on aura dans une heure, soit $\theta' = 3600$, à la vitesse de $w = 0^m,0277$, un étuvage d'un mètre cube de farine pesant 540^k, c'est-à-dire de 6 barils de 88^k chaque, ce qui est sensiblement le travail d'une bonne étuve à vis hollandaise.

En se basant sur ces chiffres, on peut aborder les deux cas qui embrassent toute la question et se résument ainsi : étuver moins ou plus de 6 barils à l'heure.

Le premier est susceptible de trois solutions.

Conserver le même auget et le même circuit que pour 6 barils et augmenter la vitesse w; alors la section s aura moins de hauteur, ce qui n'a pas d'inconvénients.

Conserver le même auget, en réduisant la longueur L et la vitesse, qu'il sera prudent de ne pas prendre trop inférieure à $w = 0^m,020$. Il suffira de disposer des quantités dont on est maître pour que la section ne dépasse pas $0^{mq},01$. C'est la solution la plus simple et la moins coûteuse.

Enfin on peut, ce qui sera plus long à calculer, choisir L et w dans les limites indiquées, et en déduire s, qui sera alors moindre que $0^{mq},01$. Restera à tracer l'auget, ce qui ne pourra se faire que par tâtonnements. Pour cela on se donnera *à priori* pour r une valeur un peu inférieure à $0^m,15$, et on prendra $k = 0^m,06$. Les formules présentées ci-dessus donneront alors e, α, et une nouvelle valeur de s. Si cette dernière n'est pas telle qu'on le désire, il faudra recommencer avec une nouvelle valeur de r, et cela tant que l'on n'aura pas obtenu pour s une section égale, ou légèrement supérieure, à celle qu'il s'agit d'avoir.

Bien que ce dernier procédé n'offre pas de difficultés sérieuses, il est, à notre sens, parfaitement inutile d'y avoir recours, puisque le second amène au résultat par une voie simple et économique.

6. Prenons actuellement le cas où la quantité de farine à étuver dépasse 6 barils par heure. Si on désire conserver la même

section s, dans le même auget de $0^m,30$ de diamètre, on ne pourra satisfaire à l'équation

$$\frac{F'}{540} = sL$$

qu'en donnant à L une valeur plus grande qui forcera à augmenter w dans la même proportion afin que l'équation

$$\theta' = \frac{L}{w}$$

soit satisfaite.

Pour préciser les idées, supposons qu'il s'agisse de traiter, par heure, 880^k au lieu de 540^k, 10 barils au lieu de 6; F' augmentant dans la proportion de $\frac{44}{27} = 1,63$; L devra être de 163^m, au lieu de 100^m, et w deviendra égal à $0^m,0452$, ce à quoi il n'y a pas d'inconvénient. Mais il y en a beaucoup à donner au circuit une longueur de 163^m, à cause des frais du mécanisme et des dimensions du local nécessaire pour le contenir. Cette solution n'est donc ni pratique, ni susceptible d'être admise par l'industrie.

On est ainsi amené à laisser à L et w les valeurs correspondantes à un étuvage de 6 barils à l'heure, et à augmenter s dans la proportion de $\frac{44}{27}$, ce qui donne $3 = 0^{mq},0163$. Il faudra alors chercher par tâtonnements le rayon de l'auget qui, avec une flèche de 0^m06, donnera un segment dont l'aire ait 163 centimètres carrés. On ne tardera pas à voir que, avec cette condition, il faudrait un auget d'un diamètre gênant et d'une exécution dispendieuse. En prenant une flèche de $0^m,07$, le résultat est plus satisfaisant. On a, en effet, avec

$$r = 0^m,30, \quad k = 0^m,07,$$

$$c = 0^m,1926, \quad \sin\alpha = 0,642, \quad \alpha = 39^\circ 56' = 39^\circ,93, \quad s = 0^{mq},01839.$$

Ce dernier chiffre étant un peu plus fort que $0^{mq},0163$, le rayon 0^m30 est admissible et la hauteur de la section sera un peu moindre que 0^m07, ce qui est satisfaisant.

Il n'est pas nécessaire que l'auget présente la forme d'une demi-circonférence complète. Il suffit qu'il soit assez haut pour que, dans ses mouvements, le minot n'en franchisse pas les bords. Condition qui sera remplie s'ils dépassent de $0^m,10$ ou $0^m,11$ la surface de la farine. L'auget ainsi réduit aura $0^m,18$ de haut, $0^m,55$ d'ouverture et $0^m,70$ de développement circulaire, environ $^1/_6$ de plus que celui de $0^m,15$ de rayon. C'est un calcul facile à faire, la figure 1 ci-dessus peut y servir.

L'accroissement de dépense, assez peu important pour les augets, le sera davantage pour les hélices, qui auront un rayon double de celui en usage.

7. Dans les étuves que nous avons vues fonctionner, le pas de l'hélice était sensiblement égal à son rayon. L'inclinaison de l'hélice sur son axe ainsi déterminé pratiquement est un élément qu'il ne serait pas prudent de modifier sans motif sérieux, et on n'en voit pas qui puisse porter à le faire. Nous admettrons donc ici que le pas P doit être égal à r.

La farine, animée de la vitesse w, avance d'un pas P pendant que l'arbre des hélices opère une révolution. Sa durée est donc en secondes de $\frac{P}{w}$. L'arbre fait par conséquent, dans une minute, ou 60 secondes, un nombre de tours exprimé par

$$n = \frac{60\,w}{P}.$$

En prenant, comme on vient de le faire,

$$w = 0^m,0277, \quad P = r = 0^m,30,$$

on aura

$$n = 8,31.$$

Ce ralentissement du mouvement de rotation n'a pas d'inconvénient.

Avec les dispositions indiquées, le local nécessaire à l'étuvage de 10 barils à l'heure ne serait pas sensiblement plus grand que celui où l'on opère actuellement sur six.

Étuve à plateaux de MM. Thébaud, *de Nantes.*

8. L'étuve du système Thébaud, que nous avons vue en plein fonctionnement, manquait d'un organe spécifié dans le brevet du 24 septembre 1844 : c'est le râteau destiné à remuer la farine pendant son séjour assez long sur le plateau. Après sa chute sur l'organe étaleur, qui, on l'a vu n° 2, offre en coupe verticale la forme d'un A, la farine gardait la position que le hasard lui avait donnée, et cela pendant toute la durée d'une révolution.

Le râteau indiqué au brevet a évidemment pour but de régulariser et agiter la couche de matière. Pour obtenir ces deux effets, il faut d'abord, immédiatement après l'étaleur et de chaque côté de la fente, une palette régularisant la couche de minot à 0m,06 d'épaisseur, puis, plus loin, d'autres palettes biaises remuant la matière, qui alors est agitée au moins deux fois dans le cours d'une révolution et avant d'être ramassée et précipitée dans la fente circulaire.

9. Admettons qu'il en soit ainsi, et nommons :

r' le rayon moyen de la fente circulaire qui divise le plateau en deux zones concentriques (si la fente n'existait pas, la farine tombant sur le plateau y formerait un anneau, dont le rayon moyen serait sensiblement égal à r');

s' l'aire de la section faite dans cet anneau par un plan vertical passant par le centre du plateau;

n' le nombre de révolutions opérées par le plateau dans une minute;

ω la vitesse angulaire;

$\omega r'$ sera alors la vitesse par seconde dont le plateau est animé, mesurée sur la circonférence moyenne;

N le nombre des plateaux;

Θ' et F' conservent leur précédente signification.

Le minot séjourne sur chaque plateau un nombre de secondes exprimé par $\frac{2\pi r'}{\omega r'} = \frac{2\pi}{\omega}$, et dans l'étuve pendant le temps

$$\Theta' = 2\pi \frac{N}{\omega};$$

d'où on tire

$$N = \frac{\omega \theta'}{2\pi}.$$

Le plateau fait par minute un nombre de tours qui est

$$n' = \frac{30\omega}{\pi}.$$

Le volume de la farine comprise dans toute l'étuve étant $\frac{F'}{540}$ celui étalé sur chaque plateau est $\frac{F'}{540.N}$.

La section du double anneau qu'elle y forme est sensiblement de :

$$s' = \frac{F'}{2\pi . r' . 540 . N}.$$

Telles sont les relations qui doivent exister entre les éléments mécaniques de l'étuve de MM. Thébaud.

En jetant un premier coup d'œil sur ces équations, on voit que le nombre N de plateaux sera d'autant moindre que ω sera plus petit. La détermination du diamètre des plateaux n'est pas absolument arbitraire; de cette dimension dépendent celles de la chambre circulaire où ils se meuvent, dimensions souvent influencées par des convenances de bâtiment. Il y a donc lieu, en préparant un projet d'étuve, de savoir, en hauteur et en diamètre, l'espace que l'on peut lui consacrer. Les plateaux trop grands sont plus difficiles à bien dresser, à équilibrer et à relier solidement à l'arbre vertical qui les conduit. La distance de deux plateaux consécutifs est encore un élément dont il convient de tenir compte, à cause des réparations qui exigent que l'ouvrier puisse passer entre eux la partie supérieure de son corps, et conserver, dans cette position, la liberté du mouvement de ses bras.

10. Pour préciser les idées, prenons un cas déterminé, et supposons qu'il s'agisse d'étuver 6 barils, ou 540^{k}, de minot à l'heure.

Donnons-nous *à priori*

$$\omega r' = 0^m{,}020, \quad r' = 0^m{,}96,$$

Θ' est toujours égal à 3600 secondes.

La circonférence de rayon r' est, à 3 centimètres près, égale à 6^m. On aura donc

$$\frac{2\pi r'}{\omega r'} = 300'', \quad n' = \frac{1}{5}, \quad N = 12, \quad s' = 0^{mq}{,}014.$$

Cette section égalisée à $0^m{,}06$ de hauteur aura une largeur de $\frac{0{,}014}{0{,}06} = 0^m{,}233$, ou $0^m{,}12$ de chaque côté du pied de l'organe étaleur. En donnant $0^m{,}14$ à la fente, et prenant $0^m{,}25$ de chaque côté, pour recevoir la farine, on fera largement face aux besoins. Alors le rayon extérieur du plateau sera de $1^m{,}28$, et celui intérieur de $0^m{,}64$.

Avec ces dimensions, une chambre circulaire de $2^m{,}60$ de diamètre suffira. La distance entre les 12 plateaux, prise de $0^m{,}50$ donnera pour la hauteur de la chambre $6^m{,}50$; les plateaux extrêmes étant également à $0^m{,}50$ du sol et du plafond.

Il est peu de minoteries de quelque importance où l'on ne puisse disposer d'un espace offrant ces dimensions. S'il en était autrement, on arriverait à une solution convenable en réduisant à 10 le nombre de plateaux, et les laissant pareils à ceux qui viennent d'être indiqués.

Faisant $N = 10$, r' conservant la même valeur, on a en effet :

$$\omega r' = 0^m{,}0167, \quad \frac{2\pi}{\omega} = 360'', \quad n' = \frac{1}{6}, \quad s' = 0^{mq}{,}0167,$$

$$\frac{s'}{0{,}06} = 0^m{,}276,$$

chiffres satisfaisants, bien que $\omega r'$ soit inférieur à $0^m{,}02$, ce qui ne peut donner lieu à préoccupation, surtout s'il existe des râteaux qui remuent la farine à chaque révolution.

Prenons actuellement le cas où le nombre des barils à traiter est de 10, et le volume de farine de $1^{mc}{,}630$, admettons qu'on

veuille se servir des mêmes plateaux, et prenons à priori

$$\omega r' = 0^m,025.$$

Les équations donneront :

$$\frac{2\pi}{\omega} = 240'', \quad N = 15, \quad n' = \frac{1}{4}, \quad s' = 0^{mq},0181, \quad \frac{s'}{0,06} = 0^m,301,$$

chiffres parfaitement admissibles. L'étuve aura alors 8^m de haut, ce qui se trouvera sans difficulté dans une minoterie assez importante pour avoir besoin de traiter 10 barils par heure.

11. Pour faire une comparaison, dont nous aurons besoin par la suite, traitons encore le cas où il s'agit d'étuver 15 barils, ou 1320^k à l'heure.

On a donc

$$\frac{F'}{540} = 2^{mc},444, \quad \Theta' = 3600''.$$

Prenons à priori

$$r' = 1^m,10, \quad N = 15.$$

On aura

$$\omega r' = \frac{2\pi r' N}{3600} = 0^m,0288, \qquad n' = \frac{60\,\omega r'}{2\pi r'} = \frac{1}{4},$$

$$s' = \frac{F'}{540} \cdot \frac{1}{2\pi r' N} = 0^{mq},02359, \qquad \frac{s'}{0,06} = 0^m,393.$$

D'après ce qui a été dit plus haut on pourra prendre pour le rayon extérieur $1^m,10 + 0^m,07 + 0^m,25 = 1^m,42$,
et pour le rayon extérieur $1^m,10 - 0^m,07 - 0^m,25 = 0^m,78$.

La hauteur de l'étuve sera de $8^m,50$ en prenant des intervalles de $0^m,50$ et de $5^m,95$, si on se contente de $0^m,35$. Ces chiffres sont parfaitement admissibles.

A l'usine de Fernes (Lot-et-Garonne), il y a 12 plateaux de $3^m,50$ de diamètre, portant, chaque, deux zones de farine larges de 0^m65. La distance entre les plateaux est de $0^m,35$. Ils font $1/_4$ de tour par minute. La farine séjourne 48 minutes dans l'étuve. On traite 40 à 60 barils en 12 heures.

Étuve à plateaux et râteaux agitateurs.

12. Le calcul du mécanisme des étuves à plateaux avec râteaux agitateurs peut s'établir comme il suit. Désignons par

- μ le nombre de palettes dont le râteau est armé, nombre qui est aussi celui des zones ou anneaux de farine placés sur le plateau;
- ρ le rayon moyen de la zone la plus rapprochée du centre; c'est elle qui reçoit le minot à son entrée dans l'étuve par le plafond;
- η la hauteur de cette zone, qui doit être de $0^m,06$ environ;
- λ sa largeur, que nous prendrons généralement de $0^m,10$; les palettes verticales, étant biaises sur le rayon suivant un angle de 45°, auront $0^m,14$ de largeur;
- ω la vitesse angulaire dont est animé le plateau;
- n' le nombre de tours de plateau par minute;
- N le nombre des plateaux;
- F', Θ' conservent leurs anciennes significations, Θ' étant égal à une heure, soit 3600 secondes, comme on l'a supposé jusqu'ici.

Le volume de la farine arrivant, par seconde, sur le plateau supérieur, est

$$\frac{F'}{540\,\Theta'} = \omega\rho\eta\lambda,$$

et le minot séjourne sur cette zone un nombre de secondes exprimé par :

$$\frac{2\pi\rho}{\omega\rho} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Ce plateau fait donc, par minute, un nombre de tours

$$n' = \frac{60.\omega}{2\pi} = \frac{30\,\omega}{\pi}.$$

Le minot parcourant sur le plateau un nombre μ de zones, y séjourne pendant le temps

$$\frac{2\pi}{\omega}\mu.$$

Le nombre de plateaux doit donc être de

$$N = \frac{\theta'\omega}{2\pi\mu}.$$

Les râteaux prenant la farine de la zone la plus rapprochée du centre, la poussent successivement à la circonférence, d'où elle tombe sur le second plateau. Là, les palettes, biaisées en sens inverse, la ramènent vers la zone voisine du centre, d'où elle tombe sur le troisième plateau et ainsi de suite. Tout dépend donc de ce qui se passe sur la première zone du premier plateau, à laquelle se rapportent les équations présentées.

Ici, comme pour les autres systèmes examinés, on ne peut prendre au hasard les quantités dont on dispose, et la marche à suivre se comprend mieux en l'appliquant à un cas déterminé.

13. Supposons qu'il s'agisse d'étuver en une heure 10 barils, ou 880^k de farine présentant un volume de $1^{mc},630$, ce qui donne par seconde

$$\frac{F'}{540\,\theta'} = 0^{mc},000452.$$

Prenons à priori,

$$\mu = 4, \quad N = 12, \quad \eta = 0^m,06, \quad \lambda = 0^m,10.$$

On aura :

$$\omega = \frac{2\pi\mu N}{3600} = 0^m,083733$$

et

$$\rho = \frac{0,000452}{\omega.\eta.\lambda} = 0^m,90.$$

La farine séjournera sur une zone

$$\frac{2\pi}{\omega} = 75'',$$

et sur un plateau

$$\frac{2\pi\mu}{\omega} = 300'';$$

par suite sur les douze

$$\frac{2\pi\mu}{\omega}.N = 3600'.$$

Le nombre de tours par minute sera de

$$n' = \frac{60\omega}{2\pi} = \frac{4}{5},$$

ou 4 tours en 5 minutes.

Le rayon moyen de la première zone étant de $0^m,90$ et chacune des 4 ayant $0^m,10$ de largeur, le rayon intérieur du plateau sera de $0^m,85$ et celui extérieur de $1^m,25$. Comme les anneaux de farine ont forcément un petit talus, il vaudra mieux prendre $0^m,05$ de plus dans chaque sens et donner à ces rayons $0^m,80$ et $1^m,30$. Les palettes extrêmes devront recevoir un allongement correspondant.

Une simple proportion fera voir que la couche de minot ayant sur la 1re zone, $0^m,060$ d'épaisseur,
en aura sur la 2e, — $0^m,054$ —
— sur la 3e, — $0^m,050$ —
— sur la 4e, — $0^m,045$ —

Il est facile de déduire de ce qui précède les dimensions d'une étuve de 450^k, ou moitié de ce que traite la précédente. Ce débit étant moitié moindre, en gardant les mêmes plateaux il suffira de diminuer leur nombre et leur vitesse de moitié. Il n'y aurait donc besoin que de 6 plateaux faisant deux tours par 5 minutes pour étuver 5 barils à l'heure.

On y arriverait encore en conservant les 12 plateaux et réduisant leur diamètre de façon à ne recevoir que deux zones de minot. Mais cette solution, qui ne diminue le rayon extérieur que de $0^m,20$, est bien moins économique, et par suite moins pratique, que la précédente. On ne s'appesantit pas sur ces calculs à cause de leur extrême facilité.

14. Supposons actuellement que l'on ait à étuver 15 barils ou 1320^k par heure.

On aura

$$\frac{F'}{540\,\theta'} = 0^{mc},0006795.$$

Prenons à priori

$$\mu = 5,\quad N = 14,\quad \nu = 0^m,06,\quad \lambda = 0^m,10,\quad \rho = 0^m,92.$$

On aura

$$\omega = \frac{0,0006795}{0,92.0,06.0,10} = 0^m,1231,\qquad \frac{2\pi}{\omega} = 51',$$

$$n' = \frac{60}{51} = 1.176,$$

soit 60 tours en 51 minutes. La farine séjournera sur un plateau

$$\frac{2\pi\mu}{\omega} = 51'.5 = 255',$$

et sur les 14 plateaux,

$$255'.14 = 3570',$$

sensiblement une heure. Le rayon extérieur sera de $1^m,42$, comme celui de l'étuve du système Thébaud, calculé ci-dessus pour la même production. Des plateaux de ce diamètre se rencontrent souvent dans la pratique.

Nous ne connaissons pas et nous croyons que, dans l'industrie, il existe très peu d'étuves rendant 15 barils à l'heure; celle-ci y arrive sans présenter des dimensions exagérées.

L'étuve du système Touaillon sera l'objet d'un chapitre spécial à la fin de ce Mémoire.

Comparaison des systèmes décrits.

15. Ce qui a été dit sur les étuves à vis hollandaise montre qu'elles se prêteraient difficilement, et avec beaucoup de frais, aux exigences d'une production aussi considérable que celle dont il vient d'être question.

Sous ce rapport, le système de MM. Thébaud et celui à plateaux

et râteaux se trouvent sur un pied d'égalité presque complète. Il faut observer cependant que, dans le second, le minot est plus souvent remué que dans le premier.

Les plateaux sont en ferblanc, en zinc, en fonte, en bois. Chaque système a ses prôneurs et ses détracteurs.

Le ferblanc peut se rouiller et tacher la farine; le zinc s'oxyde aisément; mais le blanc de zinc est inoffensif et ne peut se mêler au minot qu'en quantité inappréciable. Le principal inconvénient de ces matières minces est de se voiler. On y remédierait dans une certaine mesure en donnant au plateau une forme légèrement conique, le sommet placé soit en haut, soit en bas, suivant que le plateau débite à la circonférence ou au centre, ce qui aiderait un peu au mouvement de la farine.

La fonte a pour principal inconvénient son poids, parce qu'elle ne saurait être coulée sous une épaisseur aussi faible que celle des feuilles de ferblanc ou de zinc. Si on a soin de laisser en croûte la surface destinée à recevoir le minot, et de disposer les jets de coulée en dessous, on n'aura pas à craindre les taches de rouille. L'oxydation n'attaque, en effet, la fonte que sur les points mis au vif par la lime ou le burin.

Les joints des plateaux en bois s'ouvrent; les voliges se voilent sous l'action de la chaleur, ce qui exige de fréquentes réparations.

Le zinc et le ferblanc semblent donc convenables. Le choix à faire entre ces matières dépend surtout de l'expérience de l'usinier.

Nous ne parlerons pas de l'étude des transmissions de mouvement et des organes mécaniques; elle est facile et du domaine du constructeur; elle nous entraînerait dans trop de développements.

III

Étude du mouvement du calorique dans le cas du chauffage par calorifère.

16. L'air, après avoir été mis en contact avec les parois du calorifère, possède un nombre de calories déterminé, qu'il porte dans la chambre d'étuvage.

C'est le *gain*.

L'air sortant en emporte une partie, la farine l'autre.

Ce sont les *pertes*.

Si on a usé des soins de construction en usage, si on considère l'appareil en marche de régime, les pertes par le rayonnement des parois de l'étuve sont assez faibles pour pouvoir être négligées. Le calcul se borne alors à égaler les *pertes* au *gain*; mais il faut les estimer préalablement, ce qui demande un certain soin.

17. Désignons par

$\frac{2m}{100}$ la portion d'humidité que contient la farine, et dont l'étuvage doit faire évaporer la moitié (nº 3);

T la température, en degrés centigrades, de l'air entrant dans l'étuve, après s'être chauffé au calorifère;

t la température, en degrés centigrades, de l'air au moment de sa sortie de l'étuve;

γ la capacité de l'air pour la chaleur, qui est de 0,2379 (Regnault);

φ la capacité de la farine pour la chaleur, qui est de 0,2679, d'après les récents travaux de M. Abria;

X le volume d'air introduit par seconde dans l'étuve;

F et Θ conservent leur précédente signification.

D'après Peclet, on doit admettre, pour les calculs de ce genre, que l'air extérieur est, en moyenne, à la température de 15° et à 72° de l'hygromètre.

Dans ces conditions et à la pression atmosphérique de $0^m,72$ de

mercure, soit $1^k,033$ par centimètre carré, le poids du mètre cube d'air est de

$$(3) \qquad d = \frac{1,2572.1^k,033}{1 + 0,003665.15^\circ} = 7^k,227437.$$

Pour avoir, dans ces conditions, la quantité de vapeur contenue dans un mètre cube d'air, il faut multiplier la densité *maxima* de la vapeur à 15° du thermomètre par la tension de la vapeur correspondante à 72° de l'hygromètre.

D'après la table donnée par Peclet dans son *Traité de la chaleur* (1860) :

Cette densité à 15° est 0,0127631,

Cette tension à 72° de l'hygromètre est 0,4982.

Le produit de ces nombres, soit $0^k,006358$, est le poids v de vapeur que contient un mètre cube d'air dans les conditions où l'on s'est placé. Pour avoir le poids d' des gaz secs compris dans le même volume, il suffit de soustraire v de d, et l'on aura

$$d - v = 1^k,227437 - 0^k,006358 = 1^k,221079 = d'.$$

Le volume d'air X, exprimé en mètre cube, pris à l'extérieur et introduit par seconde dans l'étuve, contiendra donc

Un poids de vapeur vX,

Un poids de gaz $d'X$.

Ce poids de matières gazéiformes ayant pénétré dans la chambre du calorifère, où elles ne peuvent recevoir aucune nouvelle quantité de vapeur, changera de volume par suite de la variation de sa température. Il y aura lieu d'en tenir compte lors du calcul des orifices à ménager. Comme les quantités de calorique prises ou abandonnées sont fonction du poids, il n'y a pas, pour le moment, à s'occuper de cette modification du volume.

18. Après avoir été en contact avec le calorifère, la vapeur et l'air pris au dehors seront à la température T, et pénétreront dans l'étuve possédant les quantités de calorique suivantes :

Le poids de vapeur vX contiendra

$$v(a + bT)X = CX \text{ calories},$$

et le poids d'air $d'X$,

$$d'\gamma T X = C'X \text{ calories.}$$

Dans ces formules, a et b ont les valeurs connues

$$a = 606{,}5, \quad b = 0{,}305.$$

Le nombre de calories introduites dans l'étuve par l'air émané du calorifère est donc

$$(C + C')X.$$

C'est ce que l'on a nommé le gain.

L'air, quittant l'étuve à la température t, emporte la vapeur d'eau qu'il contenait avant d'entrer, mais portée à t, soit une quantité de calorique de

$$v(a + bt)X = cX;$$

les gaz dont il se compose en retiennent

$$d'\gamma t X = c'X.$$

La quantité d'humidité enlevée au minot dans une seconde est en poids $\frac{mF}{100\,\Theta}$. La capacité de l'eau pour le calorique étant 1, cette eau à 15° degrés contenait $\frac{mF}{100\,\Theta}$ 15° calories. Réduite à l'état de vapeur à t degrés, elle contient $\frac{mF}{100\,\Theta}(a + bt)$ calories. Elle a donc pris dans l'étuve et porté au dehors une quantité de calorique de

$$\frac{mF}{100\,\Theta}(a + bt - 15^\circ) = c''$$

qui est perdue. La somme de ces trois expressions constitue le total des calories que l'air sortant entraîne avec lui.

L'air et la farine marchent dans l'étuve en sens inverse. La farine introduite est à 15°. Avant de sortir, elle est en contact avec l'air entrant à T, et prend cette température. Toute la chaleur prise par le minot pour passer de 15° à T est donc perdue. Il a cédé à l'air la moitié de son humidité, soit $\frac{m}{100}$ de son poids pri-

mitif, et ne contient plus, en matière sèche, que $\left(1-\frac{2m}{100}\right)$ de son poids primitif et $\frac{m}{100}$ d'humidité. Cette dernière portée de 15° à T°, mais toujours à l'état liquide, a reçu

$$\frac{m}{100}\frac{F}{\Theta}(T-15)=c''' \text{ calories},$$

et le minot à l'état de siccité complète, porté à la même température,

$$\left(1-\frac{2m}{100}\right)\frac{F}{\Theta}\varphi(T-15)=c^{\text{iv}} \text{ calories}.$$

Ces deux quantités de calorique prises dans l'étuve sont emportées par le minot à sa sortie.

Le total du calorique conduit au dehors est donc de

$$(c+c')X+c^{\text{v}}+c'''+c^{\text{iv}}.$$

Ce sont les pertes. En les égalant aux gains, on arrive à l'équation

$$(C+C')X=(c+c')X+c^{\text{v}}+c'''+c^{\text{iv}},$$

d'où on tirera

$$X=\frac{c^{\text{v}}+c'''+c^{\text{iv}}}{C+C'-c-c'},$$

qui devient, en y remplaçant les C et c par leurs valeurs,

$$(4)\quad X=\frac{mF}{100\,\Theta}\cdot\frac{a+bt+T-30+\left(\frac{100}{m}-2\right)\varphi(T-15)}{(vb+d'\gamma)(T-t)}.$$

Tel est le volume d'air à prendre à l'extérieur et porter, au moyen du calorifère, à la température T.

19. Cet air était au dehors à 15°, et la vapeur qu'il tenait en suspension contenait

$$vX(a+b\,15) \text{ calories};$$

porté à T° il en renferme

$$vX(a+bT).$$

Cette vapeur a donc bénéficié de

$$vXb(T-15) \text{ calories.}$$

Les gaz de l'air, portés de 15° à T°, ont reçu

$$d'X\gamma(T-15) \text{ calories.}$$

La quantité de calorique perçue par l'air, au contact du calorifère, est donc, en la désignant par Γ,

(5) $$\Gamma = X(vb + d'\gamma)(T-15),$$

expression dans laquelle il suffira de remplacer les quantités algébriques par leur valeur, et X par celle trouvée ci-dessus.

20. Pour apprécier le nombre de calories qu'un calorifère donné peut fournir par mètre carré et par heure, Peclet établit deux expressions : l'une relative au rayonnement, l'autre au contact direct. Leur somme donne le total des calories fournies. comme dans tout ce qui précède, on a pris la seconde pour unité de temps, nous modifierons ces formules dans ce sens. Elles deviennent alors :

Pour le rayonnement,

(6) $$R = 0{,}034644\, k f^{t'} [f^{(T'-t')} - 1];$$

pour le contact,

(7) $$A = 0{,}0001533\, k' (T'-t')^{1{,}233}.$$

Ces expressions, qui ne se calculent que par logarithmes, donnent le nombre de calories fournies par mètre carré et par seconde. Comme le calorifère doit en fournir Γ, sa surface devra être

(8) $$S = \frac{\Gamma}{R+A}.$$

Les quantités algébriques qui entrent dans ces formules demandent chacune une explication préalable.

T' est la température de la surface du calorifère.

On a vu que des appareils de ce genre étaient parfois chauffés

au ronge blano, qui correspond à 1300°, température excessive, à laquelle est due la rapide détérioration de bon nombre d'entre eux. Le rouge naissant indique 525°; dans l'intérêt de la conservation des joints, il semble convenable de ne pas atteindre ce chiffre et de se tenir au plus à 450°. A 250° le feu est assez doux pour un calorifère. C'est un chiffre à adopter, quand on peut le faire sans avoir une surface de chauffe trop considérable.

t' est la température de l'enceinte où est placé le calorifère; Peclet admet qu'elle est égale à celle de l'air extérieur, c'est-à-dire dans notre hypothèse de 15°. Il semble difficile qu'il en soit ainsi, surtout dans le cas présent. L'air ne peut être animé d'une grande vitesse dans l'étuve d'où il enlèverait la fine fleur du minot. Par suite son mouvement dans la chambre du calorifère ne peut être tel que les parois ne reçoivent aucune quantité de calorique. Faute d'expériences spéciales, il faut admettre l'affirmation de M. Peclet. Par prudence, il sera bon de prendre pour T' une température modérée, 450 par exemple, afin de pouvoir l'augmenter sans inconvénient si l'expérience en faisait reconnaître la nécessité.

f est une quantité constante et expérimentale que Peclet pose

$$f = 1,0077.$$

K est une quantité qui dépend de la nature des surfaces chauffées. Elle est, d'après le même auteur,

$$K = 3,36$$

pour la tôle et la fonte oxydées, ce qui est l'état habituel des surfaces de ce genre en service courant.

K' est une quantité qui change suivant que les surfaces chauffées sont planes, ou cylindriques. Elle varie encore avec le diamètre des cylindres qui concourent à la formation du calorifère. La plus petite valeur que K' puisse prendre dans l'un et l'autre cas, est

$$K' = 2,21.$$

Il sera prudent de s'en servir dans les calculs d'une étuve, qui

se feront souvent avant d'avoir déterminé le genre de calorifère à employer. Si l'appareil donne plus de chaleur qu'on ne l'avait admis, il suffira de modérer le feu; circonstance heureuse et rare, car habituellement c'est le contraire que l'on est forcé de faire.

Le tableau des valeurs de K et de K', ainsi que des calculs tout faits, se trouvent n°s 797 à 809, pages 375 à 379 du tome I du *Traité de la chaleur* de Peclet, 3me édition, 1860.

Ce savant observe, à l'occasion des calorifères présentés aux Expositions de l'époque, notamment celle de 1855, que leurs auteurs ont généralement pris des dispositions qui indiquent peu de notions théoriques, et encore moins de sollicitude pour se ménager des moyens faciles de nettoyage et d'entretien.

En somme, le choix d'un calorifère est fort délicat, et en s'adressant à un constructeur spécial, il faut bien spécifier les conditions à remplir et tenir la main à ce qu'elles le soient. Si l'usinier connaît un système dont il ait lieu d'être satisfait, et dont il ait étudié le fonctionnement, le mieux est de s'en tenir à ses dispositions, en modifiant les dimensions conformément aux nouveaux effets à en obtenir.

Dans ce cas, en introduisant dans les expressions A et R les valeurs de T' et t' connues expérimentalement, et celles de K et K' qui conviennent aux dispositions prises, on aura la surface à donner au nouveau calorifère, ce qui est la base indispensable de sa construction.

Si ces renseignements manquent, le mieux sera de prendre pour K et K' les valeurs indiquées, de se donner

$$t' = 15^\circ,$$

et d'opérer par tâtonnement en choisissant pour T' un nombre compris dans les limites posées. On obtiendra ainsi, pour la surface

$$(8) \qquad S = \frac{\Gamma}{R + A},$$

une certaine valeur qui pourra être ou trop forte ou trop faible, pour être réalisée en exécution. Il faudra alors prendre une

nouvelle valeur pour T' et recommener, jusqu'au moment où l'on sera arrivé à une surface acceptable par les constructeurs, et à une température réalisable sans inconvénient.

La forme des expressions R et A ne se prête pas à un autre moyen de recherche.

La surface S doit être attribuée au calorifère proprement dit, et ne comprend pas celles que peuvent présenter sa cheminée et les conduits de fumée qui y aboutissent. La première et les seconds devront être utilisés, soit pour chauffer l'air frais avant son entrée au calorifère, soit pour activer l'échappement de l'air chargé d'humidité à sa sortie de l'étuve. Peclet entre à ce sujet dans des détails qui méritent l'attention. Nous aurons à y revenir.

21. Ce qui précède permet de calculer la quantité de houille à consommer pour obtenir l'effet d'évaporation voulu.

Peclet a observé que, dans les étuves spéciales destinées à sécher le malt des brasseurs, 1 kilogramme de houille évapore 2 kilogrammes d'eau. Prenons ce chiffre pour point de départ. La quantité F de minot à étuver, devant perdre $\frac{m}{100}$ de son poids en humidité, fournira en kilogrammes d'eau $\frac{mF}{100}$, ce qui, par la proportion indiquée, exigera $\frac{mF}{200}$ de houille.

Les étuves de brasserie étant mieux étudiées et plus connues que celles des minoteries, ces chiffres peuvent laisser quelque incertitude quand il s'agit des dernières, et il vaut mieux avoir recours à un autre procédé de calcul.

Peclet admet que le kilogramme de bonne houille fournit 8000 calories. M. le général Morin dit 6000; il affirme qu'un calorifère qui ne rend que 63 pour cent est mauvais. Prenons ces chiffres qui semblent faibles, parce qu'il vaut mieux, dans la pratique, avoir à réduire la consommation de charbon prévue que d'être forcé de l'augmenter.

Le calorifère, par kilogramme de houille brûlée, fournira dans cette hypothèse

$$0,63.6000 = 3780 \text{ calories.}$$

Il en faut Γ par seconde. Pour le temps Θ, qu'exige l'étuvage de F kilog. de minot, ce sera donc

$$\frac{\Theta\Gamma}{3780} = Q,$$

Q désignant, en kilogrammes, la quantité de houille à brûler pendant tout le temps Θ de l'opération.

L'hectolitre de ce combustible pesant 80[k], on aura pour le nombre d'hectolitres correspondant :

$$\frac{Q}{80} = \frac{\Theta\Gamma}{302400}.$$

Cette seconde méthode fournira généralement un chiffre plus fort que celui tiré de la première. Ce sera naturellement le plus élevé des deux auquel il conviendra de s'arrêter.

22. Les expériences qui peuvent servir de base au calcul de la quantité d'air à fournir par seconde au foyer du calorifère ne sont pas, dans les différents auteurs, concordantes entre elles. Peclet dit qu'il faut par kilo de houille brûlée 8^{mc},348 mètres cubes d'air. Le *Traité des machines à vapeur* de M. J. Gaudry (1856) porte ce chiffre à 35 mètres cubes. Il est basé sur l'observation des foyers de machines à vapeur. Nous l'accepterons, toujours pour les mêmes motifs. Si du reste les dimensions des orifices qui résulteront de cette hypothèse se trouvaient trop fortes, dans la pratique, il serait facile d'y remédier par des registres, qu'il convient toujours de se ménager dans des constructions bien étudiées et soigneusement exécutées.

Le poids total du charbon à comburer dans le temps Θ étant $\frac{\Theta\Gamma}{3780}$, celui à brûler dans une seconde est $\frac{\Gamma}{3780}$. Le volume d'air à fournir étant de 35 mètres cubes, par kilo de houille brûlée, il

faudra servir au calorifère, dans le même temps, un nombre de mètres cubes d'air de

$$\frac{35}{3780}\,\Gamma = 0,009259\,\Gamma. \tag{9}$$

23. Peclet estime que, dans les calorifères, il faut un décimètre carré de surface de grille pour $1^{k},20$ de houille à brûler par heure. La quantité de houille à brûler par seconde étant connue, il faut la multiplier par 3600, pour avoir la consommation par heure, qui sera :

$$q = \frac{3600}{3780}.\Gamma. \tag{10}$$

On a donc pour la surface de grille estimée en décimètres carrés :

$$\frac{3600}{1,20.3780}.\Gamma = 0,79365.\Gamma,$$

ou en mètre carré

$$0,00793651.\Gamma. \tag{11}$$

24. Peclet prend pour type les cheminées des foyers de générateurs à vapeur. Celles des calorifères doivent avoir au moins 10 mètres de hauteur, et une section égale à 1,82 fois la section des premières.

Feu Redtenbacher, dont le livre fort estimé a été traduit en français [1], donne, pour calculer cette section, la formule suivante : $\Omega = \frac{q}{84\sqrt{h}}$ dans laquelle q est le nombre des kilos de houille brûlée par heure, h la hauteur de la cheminée.

Cette section peut être carrée ou circulaire; il peut y avoir avantage à construire deux cheminées au lieu d'une seule, et à les faire en tôle pour utiliser plus aisément la chaleur de leurs

---

(1) *Resultate für den Maschinenbau*. Manheim, 1852.

parois. Dans ce cas, elles sont plus aisées à construire quand on les fait cylindriques.

Pour les sections carrées, le côté sera $\sqrt{\Omega}$;

Pour les sections circulaires, le diamètre sera :

pour une cheminée seule $\Delta = 2\sqrt{\frac{\Omega}{\pi}}$,

pour deux cheminées, $\Delta' = \sqrt{\frac{2\Omega}{\pi}}$.

Dans le cas traité ici, la quantité de houille q à brûler par heure est, comme on l'a vu ci-dessus, de $\frac{360}{378}$ Γ et par conséquent la section Ω

$$\Omega = 1{,}82 \frac{360}{378} \cdot \frac{\Gamma}{84\sqrt{h}}.$$

On en tirera, en opérant les calculs numériques indiqués, pour le côté d'une cheminée à section rectangulaire :

$$(12) \qquad \sqrt{\Omega} = 0{,}1437\sqrt{\frac{\Gamma}{\sqrt{h}}};$$

pour le diamètre d'une seule cheminée cylindrique,

$$(13) \qquad \Delta = 0{,}1621\sqrt{\frac{\Gamma}{\sqrt{h}}};$$

pour le diamètre de chacune des deux cheminées cylindriques :

$$(14) \qquad \Delta' = 0{,}1147\sqrt{\frac{\Gamma}{\sqrt{h}}}.$$

25. Peclet donne les formules suivantes pour la vitesse V avec laquelle l'air neuf arrive dans la chambre du calorifère, et pour celle V', qui anime l'air, chargé d'humidité, à sa sortie de l'étuve

$$(15) \qquad \begin{cases} U = \sqrt{\dfrac{2gh'l(t-15)}{1+lt}}, \\ U' = \sqrt{29h'l\dfrac{(t-15)(1+lt)}{(1+l.15)^2}}. \end{cases}$$

Ces formules tiennent compte de la dilatation du fluide au sommet de l'étuve. On y représente par :

g l'intensité de la pesanteur qui est $9^m,80896$;
l le coefficient de dilatation des gaz 0,003665 déjà employé précédemment;
h' la hauteur de la cheminée d'échappement;
X et t ont la même valeur que ci-dessus n° 17.

La température extérieure est toujours supposée de 15°.

En passant par les orifices qu'il doit traverser, le fluide subira une contraction dont le coefficient est en général de 0,60. Il faut en tenir compte dans la mesure de la section à leur donner, pour que le débit reste ce qu'il doit être. Il convient que ces ouvertures soient rectangulaires, ce qui les rend plus faciles à exécuter dans des voûtes ou planchers, et se prête mieux à l'emploi des registres dont elles doivent être munies.

On aura d'après cela pour la section, ou la somme des sections, des orifices d'introduction dans la chambre du calorifère

$$\Omega' = \frac{X}{0,60.V},$$

et pour ceux d'évacuation de l'étuve

$$\Omega' = \frac{X}{0,60.V'},$$

ce qui donnera pour les côtés des orifices, suivant qu'il y en aura un ou deux,

$$\left.\begin{array}{lll} \text{pour l'entrée,} & Y = \sqrt{\dfrac{X}{0,6\,V}}, & y = \sqrt{\dfrac{X}{1,2\,V}}, \\ \text{pour la sortie,} & Y' = \sqrt{\dfrac{X}{0,6V'}}, & y' = \sqrt{\dfrac{X}{1,2V'}}. \end{array}\right\} \quad (16)$$

26. Pour préciser les idées, nous allons opérer les calculs indiqués ci-dessus, pour le cas où il s'agit d'étuver, par heure, quinze barils de 88^k chaque. On a donc

$$F = 1320^k, \quad \theta = 3600''.$$

Prenons

$$m = 3, \quad T = 85^c, \quad t = 40^c,$$

conformément à ce qu'indique l'observation d'appareils existants; $\alpha, b, \gamma, \varphi, d, v, d'$ conservant les valeurs numériques qui leur ont déjà été attribuées. L'équation (4) donne alors, pour le volume d'air à introduire dans l'étuve par seconde,

$$X = \frac{13.874165}{13,15953} = 1^{mc},054,$$

et l'équation (5), pour le nombre de calories à demander au calorifère dans le même temps,

$$\Gamma = 21,5758.$$

Supposons-le chauffé à 450°, la température extérieure étant de 15°, $k, k' f$ conservant les valeurs indiquées en leur lieu, les équations (6) et (7) donneront :

$$R = 3,53775, \quad A = 0,6070,$$

de celle (8) on tirera pour la surface de chauffe du calorifère :

$$S = \frac{21,5758}{4,14475} = 5^{mq},2056.$$

En lui donnant la forme d'un cube émettant le calorique par sa paroi supérieure et trois de ses faces latérales, le côté de ce cube sera de $1^m,148$.

La formule (10), en y remplaçant Γ par sa valeur, fournira pour la quantité de houille brûlée par heure :

$$q = \frac{21,5758.3600}{3780} = 20^k,55,$$

ce qui, pour un étuvage de 180 barils en 12 heures, représente une consommation de $246^k,60$, ou en chiffre rond 3 hectolitres un dixième.

Le cube d'air à fournir au calorifère par seconde, déduit de la formule (9), est

$$0,009259.31,5758 = 0^{mq},19977,$$

ou 200 litres.

La surface de grille, en mètres carrés, fournie par l'équation (11), est

$$0,0079365.21,5758 = 0^{mq},1712.$$

Si on la prend carrée, son côté sera donc de $0^{m},42$.

Avec l'agencement qui nous semble le plus convenable, et sur lequel nous reviendrons, il est bon que le calorifère ait deux cheminées, et qu'elles soient métalliques, afin d'utiliser plus aisément le calorique entraîné par les gaz de la combustion.

Ces cheminées doivent être assez hautes relativement aux bâtiments. Il y aurait quelque inconvénient, suivant nous, à leur donner une élévation telle que le tirage, très actif, fît brûler le charbon trop rapidement et passer dans l'air une proportion excessive de calorique improductif. Nous adoptons 12^{m} pour cette dimension. Elle est supérieure à la limite inférieure posée par M. Peclet. Si elle était insuffisante il serait toujours facile de l'augmenter par de nouveaux cylindres emmanchés en dessus.

La question étant envisagée sous ce point de vue, la formule (14) à employer donne

$$\Delta' = 0,1147 \sqrt{\frac{21,5758}{\sqrt{12}}} = 0^{m},286.$$

Tel est le diamètre des deux cheminées en tôle à établir.

Dans les formules (15), qui donnent la vitesse de l'air à son entrée et à sa sortie de l'étuve, g, l, sont déjà déterminés. t est égal à $40°$, température du fluide émergeant.

Les cheminées par lesquelles l'air chargé d'humidité s'échappe dans l'atmosphère nous semblent devoir être un peu moins hautes que celles du calorifère et les envelopper. Cette disposition a pour but d'assurer le tirage de l'air humide et d'empêcher les parcelles charbonneuses, venant du calorifère, de retomber dans les conduits d'air, munis d'un chapiteau assez élevé ponr remplir ce but et ne pas gêner leur débit. Nous prendrons donc $h' = 11^{m}$.

En introduisant ces chiffres dans les formules (15) on obtient pour la vitesse d'entrée :

$$V = 4^{m},153,$$

et pour celle de sortie :

$$V' = 4^{m},514.$$

Cette disposition n'empêche pas de donner la forme d'un carré aux orifices d'entrée et de sortie de la chambre d'étuvage, afin d'y adapter plus aisément des registres. Les formules (16) dans lesquelles X, V, V' sont actuellement connues donneront pour le côté des deux orifices d'entrée

$$y = \sqrt{\frac{1,054}{1,2.4,153}} = 0^{m},14543,$$

et pour ceux de sortie

$$y' = \sqrt{\frac{1,054}{1,2.4,514}} = 0^{m},1395,$$

Pour déterminer, au-dessus des ouvertures d'évacuation, le diamètre extérieur de la partie qui doit envelopper la cheminée du calorifère, nous remarquerons que, R_1 étant le rayon extérieur cherché, on a

$$y'^2 = \pi\left(R_1^2 - \frac{\Delta'^2}{4}\right),$$

d'où l'on tire

$$R_1 = \sqrt{\frac{y'^2}{\pi} + \frac{\Delta'^2}{4}},$$

qui devient ici pour les valeurs connues de y' et Δ'

$$R_1 = 0^{m},1634.$$

Le tuyau de cheminée concentrique à celle du calorifère aura donc sensiblement $0^{m},33$ de diamètre.

27. Dans la théorie ci-dessus, comme dans le cas particulier auquel on vient de l'appliquer, une observation importante n'a pas été présentée. Il importe de ne point la passer sous silence. L'air chaud à sa sortie de l'étuve ne doit pas être saturé de vapeur. S'il l'était, à la première diminution de température dans les cheminées d'échappement, il y aurait condensation et retour d'eau possible dans la chambre au grand détriment de l'opération.

Soit I le poids de la vapeur d'eau que tient en suspension un mètre cube d'air saturé à la température t;

i le poids de la vapeur d'eau que tiendrait en suspension un mètre cube d'air qui, primitivement à 15°, et à 72° de l'hygromètre, aurait passé à t degrés sans recevoir de nouvelle humidité.

Ce mètre cube d'air, pendant son séjour dans l'étuve, aura pris au minot, par seconde, un poids de vapeur nouvelle exprimé par $\frac{m\,F}{100\theta}$, et cette humidité répartie sur X^{mc} d'air dans le même temps donnera pour l'unité de volume

$$\frac{m\,F}{100\,\theta\,X}.$$

L'air sortant sera donc chargé d'un poids de vapeur d'eau

$$i + \frac{m\,F}{100\,\theta\,X},$$

qui devra être moindre que celui de I dont il serait susceptible de se charger à saturation. On devra donc avoir

$$I > i + \frac{m\,F}{100\,\theta\,X}.$$

Cette condition est satisfaite dans les bonnes étuves existantes, mais il est fort difficile de la faire entrer dans le calcul, parce que la possibilité d'une condensation trop rapide dépend de la disposition des locaux, cheminées, etc.

Examinons ce que devient cette inégalité dans le cas particulier traité, où l'on s'est basé sur des chiffres constatés dans des étuves en plein et bon fonctionnement.

La quantité I de vapeur tenue en suspension dans un mètre cube d'air à 40° et à l'état de saturation est de $0^k,0464$.

Le même volume à 15°, et 72° degrés de l'hygromètre, tenait en suspension 0^k00636, n° 17. Mais en passant de 15° à 40°, ce volume s'est dilaté : sa densité à 15° était 1,227437, à 40° elle est 1,132642 (3), la quantité d'humidité primitive occupe plus de

volume et son poids au mètre cube diminue en rapport inverse de ces densités, elle est donc :

$$i = 0,00636.0,9227 = 0,00586837.$$

On a, dans le cas particulier traité,

$$m = 3, \quad \frac{F}{\theta} = 0^k,367, \quad X = 1,054.$$

En introduisant ces valeurs dans l'inégalité, on aura

$$I - i = 0,04053, \quad \frac{mF}{100\theta X} = 0,010446.$$

Elle devient donc

$$0,04053 > 0,010446$$

et se trouve parfaitement satisfaite. On en tire encore

$$\frac{0.04053}{0,010446} = 3,88 > 1;$$

c'est-à-dire que l'air sortant n'est chargé que du quart, environ, de la vapeur d'eau qu'il serait susceptible de contenir à l'état de saturation.

Admettant cette proportion, que la pratique semble indiquer, on posera

(17) $$I - i = 3,88 \frac{mF}{100\theta X}.$$

Cette équation, dont nous aurons à tirer parti, fournit encore le rapport :

$$\frac{F}{\theta X} = \frac{100}{m} \cdot \frac{I - i}{3,88} = 0,3482.$$

Tel est, dans les conditions où l'on s'est placé, le rapport entre le poids de la farine séchée par seconde, et le volume d'air frais à fournir dans le même temps. Cet air entrant à 15° degrés dans la chambre du calorifère, et sortant de l'étuve à 40°.

La proportion 3,88 peut sembler excessive, en ce sens que le volume d'air étant plus considérable qu'il n'est nécessaire pour

enlever trois pour cent d'humidité au minot, il y a une quantité notable de calorique paraissant inutilisée. Mais les équations ne permettent pas de modifier cette proportion, et de se donner, à priori, un rapport déterminé entre le poids de matière traité, et le volume d'air à fournir par seconde.

De plus, le but réel de l'étuvage n'est pas seulement d'enlever au minot une quantité fixe d'humidité, mais encore de le soumettre à une température susceptible de détruire, s'il se peut et sans altérer le gluten, partie, au moins, des germes fermentescibles que la boulange contient, ou a reçu de l'air extérieur.

Il y aurait donc ici à opérer des expériences très utiles et fort intéressantes. Elles montreraient si la pratique antérieure a conduit à des règles susceptibles, ou non, de modifications dans le sens d'une utilisation plus complète du calorique.

Examen des différents systèmes en usage sous le rapport de l'utilisation de l'air chaud.

28. Sous le rapport de la distribution du calorique, les trois systèmes d'étuves en usage laissent réellement à désirer.

Dans celle à vis hollandaise, tout le mécanisme étant appliqué contre les parois, il existe au milieu un grand espace libre rempli d'air chaud dont le calorique n'agit pas directement sur le minot. On y remédierait en élevant intérieurement des cloisons parallèles aux murs, et constituant ainsi des couloirs où l'air circulerait en s'élevant et léchant les augets garnis de minot. La capacité formée par les cloisons serait, en réalité, remplie d'air échauffé, mais il ne se renouvellerait que par les joints et fissures. Il n'y aurait donc qu'une faible partie du fluide dévié de la route tracée.

29. Dans les étuves de MM. Thébaud, la chambre cylindrique enveloppe les plateaux avec très peu de jeu. Ils sont reliés à l'arbre rotatif vertical par des croisillons à plusieurs bras laissant,

au centre, un large passage à l'air chaud qui s'y élève sans toucher la farine. Un autre courant s'établit aussi par la fente circulaire ménagée dans chaque plateau, fente qui se trouve juste en dessous de celle du disque supérieur. Ici le fluide agit plus directement sur la farine opérant sa descente, mais cependant moins qu'il ne serait désirable, car le double plan de l'étaleur masque le minot pendant sa chute.

Il semble qu'il y aurait avantage à supprimer le grand vide central en tenant les plateaux pleins jusqu'à l'arbre, et forcer tout le courant principal à passer par la série des fentes annulaires. C'est un essai à faire. La disposition adoptée par MM. Thébaud se prête difficilement à une bonne circulation du calorique.

30. Dans les étuves à plateaux et râteaux, quand les premiers se meuvent, les seconds restent immobiles, ou inversement, ce qui constitue deux genres différents.

Quand les plateaux tournent, le minot arrive par une ouverture, invariable de position, qui dégorge toujours sur le même point. Le mouvement du plateau fait étaler la matière, qui abandonne le dernier disque, toujours au même endroit.

Quand les plateaux sont fixes, à moins d'avoir momentanément accumulation de matières sur un point, l'orifice de débit doit être animée d'un mouvement circulaire. Il en est de même de l'ouverture par où la farine s'écoule lors de sa chute du disque inférieur.

Cette double nécessité entraîne l'emploi d'organes spéciaux; il est donc plus économique et par conséquent préférable, quand le chauffage se fait par calorifère, d'employer les plateaux tournants.

Les disques creux chauffés à la vapeur par serpentin, comme ceux de M. Touaillon, sont forcément fixes, du moins avec les dispositions indiquées dans son brevet.

Les inventeurs et les usiniers, qui emploient les plateaux mobiles, varient beaucoup dans les agencements qu'ils adoptent, En voici un qui semble remplir de bonnes conditions relativement au mouvement de l'air chaud (*Fig.* 2).

Les plateaux qui reçoivent le minot près du centre, et le débitent à la périphérie n'ont pas de vide central. Ceux qui le reçoivent à la circonférence sont évidés et ont un plus grand diamètre extérieur que les précédents. Ils tournent dans la chambre avec très peu de jeu. Avec cette disposition, le courant d'air principal, pour monter d'un plateau à l'autre, est obligé de lécher celui d'en bas, et ne sort de l'étuve qu'après avoir accompli une série de zig-zags pendant lesquels il a été forcément en contact avec la superficie des nappes de farine. Le courant qui se fait par le jeu des grands plateaux est relativement très faible. Il se pourrait même qu'il fût presque insensible et qu'il se présentât ici le même phénomène que pour le piston cannelé, employé par M. Deleuil dans ses machines pneumatiques.

Il ne serait pas difficile d'imaginer d'autres dispositions. Celle-ci étant fort simple, nous n'entreprendrons pas d'autres recherches.

31. L'ensemble du bâtiment de l'étuve (*Fig.* 2), se compose de trois compartiments juxtaposés. Celui du milieu est divisé en deux parties par une voûte en briques, ou un plancher en fer. Dans celui du bas est placé le calorifère *a*. Celui du haut constitue la chambre d'étuvage où se trouvent les plateaux, alternativement pleins ou évidés, montés sur un arbre rotatif *b*.

Les deux capacités latérales *c*, *c* masquent le rond de la chambre d'étuvage et ont pour but d'utiliser le calorique émis par les parois de cette chambre, qui doivent être métalliques, et celui des cheminées du calorifère *d*, *d*.

L'air frais arrive par en haut en *f*, *f*, descend vers les orifices *g*, *g*, qui lui donnent accès dans la chambre du calorifère, où il s'échauffe au point voulu. Il pénètre ensuite par *h*, *h*, dans la chambre d'étuvage, contourne les plateaux, s'échappe en *i* par des cheminées spéciales concentriques à celles du calorifère, et arrive dans l'atmosphère par leurs sommets *k*, *k*, défendus par des chapiteaux contre la chute du noiret.

Tel est l'ensemble proposé. Les détails sont simples et faciles à étudier, mais trop longs pour trouver ici leur place. Il importe

que les parois métalliques de la chambre d'étuvage soient disposées de façon à permettre la surveillance et les réparations.

IV

Appareils de refroidissement.

Appareils en usage fonctionnant au contact de l'air extérieur.

32. Il y a de très sérieux inconvénients à embariller le minot à sa sortie de l'étuve. Telle est du moins l'opinion des grands fabricants. Elle doit être basée sur des expériences certaines, car le refroidissement demande des appareils et une manipulation dont on ne ferait point les frais, si on pouvait s'en dispenser et assurer, sans eux, une parfaite conservation.

Chaque inventeur d'étuve a aussi son système refroidisseur.

M. Coumeau, sous sa chambre d'étuvage, en ménage une autre, également munie de plateaux tournants, où la farine, étalée en couches minces et remuée par des râteaux, perd, au contact de l'air frais, l'excès de sa température.

M. Thébaud fait passer le minot, encore chaud, dans un long auget, où il est promené et agité par une vis hollandaise, absolument comme dans les étuves où cet organe joue le rôle principal. C'est encore l'air extérieur qui est l'agent réfrigérant.

M. Touaillon a, comme M. Coumeau, une chambre de refroidissement en dessous, ou à côté, de celle d'étuvage. Les plateaux qui portent la matière sont encore creux; ce n'est plus de la vapeur, mais de l'eau qui y circule et se charge du calorique enlevé au minot.

Ces trois procédés, que l'industrie emploie le plus fréquemment, ont le grand inconvénient de permettre aux corpuscules, spores et ferments, toujours en suspension dans l'air atmosphérique, de se déposer sur les couches de farine et d'y

remplacer, au moins en partie, ceux dont l'étuvage a détruit la vitalité. Il y aurait avantage réel, à ce point de vue, à faire circuler le minot chaud dans des capacités closes, et environnées d'eau ou d'air convenablement renouvelé. Les parois métalliques de ces capacités deviendraient les agents de transmission du calorique.

Ce sujet sera plus amplement traité à la fin de ce chapitre.

33. L'appareil de refroidissement de Laubardemont se compose d'une gouttière unique, longue de 30^m et de $0^m,30$ de diamètre. Une vis hollandaise, ayant un pas de $0^m,15$, s'y meut à raison de 33 tours par minute. Sauf la vitesse de rotation, ces dimensions sont celles des organes de l'étuve de cet établissement et de toutes celles du même système. On refroidit par heure 14 barils de 88^k, soit 1233 kilogrammes.

En se reportant aux notations employées pour le calcul des étuves à vis hollandaise n°4 et suivants, notations ici applicables, on a les relations ci-dessous entre les dimensions des organes et les quantités de matière traitées.

$$\frac{F}{\theta}=\frac{F'}{\theta'}, \quad ws=\frac{P'}{540\,\theta'}, \quad Ls=\frac{F'}{540}, \quad w=\frac{L}{\theta'}=\frac{nP}{60}.$$

En appliquant ces formules au refroidisseur de Laubardemont, on trouve pour :

la vitesse de translation du minot par seconde,

$$w=\frac{33.0,15}{60}=0^m,0825;$$

la durée du séjour dans l'auget,

$$\theta'=\frac{30^m}{0,0825}=363'',6,$$

sensiblement 6 minutes;

le poids du minot que renferme l'auget,

$$F'=\frac{1232}{3600}=124^k,30,$$

son volume

$$\frac{F'}{540} = 0^{mc},230;$$

la section occupée par la farine dans l'auget

$$s = \frac{0^{mc},230}{30} = 0^{mq},00767.$$

La flèche de cette section est donc inférieure à $0^{m},06$ puisque pour ce dernier chiffre on a, comme on l'a vu, n° 5,

$$s = 0^{mq},01.$$

Les bons services de l'appareil de Laubardemont sont constatés par un long usage, il est donc prudent de le prendre pour type de ceux analogues à construire; de leur donner même auget, même section et d'y laisser séjourner le minot pendant le même temps. Cela revient à regarder, dans les équations générales s et θ' comme constants. Elles montrent qu'alors w, L, n, sont proportionnels à F'.

34. Si au lieu de 14 barils à traiter par heure on veut opérer sur 15, soit 1320^{k}, le rapport de ces quantités étant

$$\frac{1320}{1232} = \frac{15}{14} = 1,072,$$

on aura pour le refroidisseur à construire

$$L = 1,072.50 = 32^{m},$$
$$w = 1,073.0,0825 = 0^{m},0885,$$
$$n = 1,072.33 = 36.$$

Avec ces dimensions et ces vitesses, un refroidisseur desservirait, d'un mouvement continu, l'étuve de 15 barils à l'heure dont nous avons fait le calcul dans différents systèmes.

Les équations générales ci-dessus permettraient également de déterminer les dimensions convenables si on croyait, pour la durée du séjour et l'aire de la section, devoir prendre des chiffres différents de ceux de Laubardement.

Ce procédé de calcul, uniquement basé sur la pratique, ne tient pas compte du jeu et de l'échange des températures. Pour le faire, il faudrait considérer le minot comme se refroidissant dans un milieu indéfini et de température constante.

L'auget refroidisseur se trouve généralement dans une pièce d'une capacité considérable relativement au périmètre de la gouttière et de la surface de la couche de minot; l'air, qui est l'agent refrigérant, ne s'y renouvelle que par les portes et fenêtres ouvertes, ou fermées, à peu près au hasard.

35. Les difficultés d'un calcul opéré dans ces conditions disparaissent quand la chambre de refroidissement est nettement limitée; quand l'air y entre et en sort par quantités susceptibles d'être réglées à la volonté de l'opérateur. Il en est ainsi dans les refroidisseurs à plateaux, renfermés dans une chambre close, dont les orifices d'entrée et de sortie, munis de registres, ne laissent rien au hasard. Tel est le cas dont nous allons nous occuper.

Nous choisirons de préférence les plateaux tournants avec râteaux agitateurs, parce que, à égalité de nombre et de diamètre, la farine y est mieux agitée qu'avec ceux de M. Thébaud.

Prenons pour type le cas où il s'agit de refroidir 15 barils, ou 1320^k à l'heure, ce qui donne par seconde

$$\frac{F'}{\theta'} = \frac{1320}{3600} = 0^k,367,$$

et en volume

$$\frac{0,367}{540} = 0^{mc},0006795.$$

Les plateaux calculés précédemment dans cette hypothèse ont 1^m,42 de rayon extérieur. Ils sont alternativement pleins et évidés au centre. L'évidement central a 0^m,80 de rayon. La farine, étalée en quatre zones sur ces plateaux, leur communique partie de son calorique. L'air qui circule dans la chambre s'échauffe, et par le contact de la matière en dessus et par celui du métal en

dessous. Les deux surfaces des plateaux émettent donc du calorique.

La double surface d'un plateau plein est de

$$2\pi\,\overline{1{,}42}^2 = 12^{mq},70.$$

La double surface d'un plateau évidé est de

$$2\pi\left(\overline{1{,}42}^2 - \overline{0{,}80}^2\right) = 8^{mq},67.$$

Elle est même un peu plus forte, car nous avons dit, n° 30, que les plateaux évidés devaient avoir un diamètre légèrement plus grand que les autres.

La somme de ces deux chiffres donne la totalité de la surface émissive d'une paire de plateaux. Elle est de $21^{mq},37$.

La surface de la matière et celle inférieure du plateau sont léchées par l'air venu du dehors. Il se charge de calorique par contact et rayonnement. L'appareil fonctionnant à l'état de régime, le minot introduit à 85° met les plateaux au même degré. La température extérieure, à l'ombre, est en général à 25° en été, saison où le refroidissement est le plus difficile.

Les formules (6) et (7) deviennent alors et donnent :

Pour le rayonnement, $0{,}03444 . 3{,}36 . 1{,}0077^{25}\{1{,}077^{60} - 1\} = 0{,}08186$,

Pour le contact...... $0{,}0001533 . 2{,}21 . 60^{1,233} = 0{,}05277$,

Un mètre carré de plateau émet donc.......... 0,13463

de calorie par mètre carré et par seconde.

Les $0^k,367$ de farine devant passer de 85° à 25°, température extérieure, ont à perdre 60°. Or la capacité de la farine pour le calorique étant 0,2679, les 367 grammes doivent émettre

$$0^k,367 . 0{,}2679 . 60 = 5{,}893 \text{ calories},$$

ce qui exigera une surface émissive de

$$\frac{5{,}893}{0{,}13463} = 43^{mq},98.$$

On l'obtiendra en employant deux paires de plateaux dont la

surface est de $42^{mq},74$; chiffre qui peut être admis, puisque, comme on l'a vu, il n'est que très peu inférieur à la réalité.

En nous reportant aux notations et équations des nos 12 et 13, relatives au mécanisme des étuves à plateaux, et prenant pour ρ, η, λ les valeurs qui se rapportent au cas de 15 barils, on aura :

Pour la vitesse angulaire

$$\omega = \frac{0.0006795}{0,9.0,06.0,10} = 0^{m},126;$$

Pour le nombre de tours de plateau par minute

$$n = \frac{30.0,126}{\pi} = 1,20;$$

Pour la durée du séjour de la farine dans l'appareil

$$\theta' = \frac{4.2\pi.4}{0,126} = 800'',$$

ou 13 minutes 20 secondes.

La quantité de farine se trouvant simltanément sur les plateaux est

$$F' = 800.0^{k},367 = 293^{k},60.$$

Le volume X' d'air à prendre au dehors, à la température de 25°, doit se charger de 5,893 calories. Pour que son action réfrigérante subsiste jusqu'au dernier moment de son séjour dans la chambre, il faut qu'il en sorte à une température moindre que celle de la farine entrant à 85°, farine avec laquelle il se trouve en contact à cet instant. Admettons 60° pour sa température de sortie, ce qui n'aura d'autre inconvénient que de donner un poids d'air un peu plus considérable. Pour passer de 25° à 60°, l'air a 35° à prendre, et sa capacité pour la chaleur étant de 0,2379, on doit avoir

$$X'.35.0,2379 = 5,893,$$

d'où on tire

$$X' = \frac{5,893}{35.0,2379} = 0^{k},586.$$

La densité de l'air à 25°, calculée par la formule spéciale (3), est

$$d = 1,19.$$

On aura donc pour le volume d'air à introduire par seconde

$$\frac{X'}{d} = 0^{m},493,$$

sensiblement 500 litres. Comme le foyer du calorifère en demande 200 et l'étuve 1054, on pourra prendre des dispositions pour diriger cet air chauffé à 60° soit dans le calorifère, soit contre ses parois, ce qui produira une économie de combustible.

Appareils proposés pour opérer en vase clos.

***36.** S'il existe des appareils où la farine se refroidisse hors du contact direct de l'air, nous ne les connaissons pas. Voici les principales dispositions de celui qui, à notre sens, remplit le but désiré (*Fig.* 3 *et* 4).

Un cylindre en tôle, bien étanche, de $0^{m},30$ de diamètre, est fermé de chaque bout par un fond portant au centre une boîte à étoupe livrant passage à l'arbre *a* d'une vis hollandaise.

Sur ces fonds et à quelque distance en avant, sont fixés les coussinets destinés aux tourillons. L'engrenage conducteur *b* est placé au-delà et porte à faux sur le bout de l'arbre.

Les fonds sont reliés au corps du cylindre par des oreilles boulonnées avec rondelle de caoutchouc entre deux. La peau de mouton en poils serait peut-être préférable quand on emploie l'air comme refrigérant, parce qu'elle n'adhère jamais au métal et suffit pour arrêter au passage, s'il y a lieu, les spores en suspension dans l'atmosphère.

Le minot sortant de l'étuve est, par un tube métallique *c*, amené à l'une des extrémités du cylindre et, par la vis, poussé vers l'autre. De là, par un tube vertical *d*, il tombe dans le second

cylindre placé en dessous du premier auquel ce tube le relie, comme les bouilleurs le sont au corps de chaudière des générateurs à vapeur.

La vis du second cylindre se meut en sens inverse de celle du premier. On peut disposer ainsi verticalement une série de cylindres en nombre suffisant pour présenter la surface nécessaire au refroidissement.

La série des cylindres est étagée dans un bac en tôle auquel chacun d'eux est rivé extérieurement par une collerette bien étanche. Les bouts des cylindres dépassent les parois du bac, pour que la jonction des fonds, les boîtes à étoupes, les tourillons et les engrenages se trouvent à l'extérieur et puissent s'enlever par un simple déboulonnage. Alors, les vis enlevées sans peine, les cylindres ouverts des deux bouts se prêtent à toute opération de nettoyage ou de réparation.

37. Le corps refrigérant peut être l'air ou l'eau, mais ils doivent l'un et l'autre arriver par le bas en *f*. Si on a choisi l'eau, le bac peut ne pas être fermé en dessus. Elle en sortira par un déversoir *g*. Si on a choisi l'air, le bac devra être fermé en dessus, et sa paroi, percée d'un ou plusieurs orifices, permettra de conduire l'air chauffé au lieu où on doit l'utiliser.

Dans les grandes usines hydrauliques, où l'eau ne fait pas défaut, elle devra être employée comme refrigérant. Dans les usines à vapeur où l'eau ne serait pas très abondante, on aura recours à l'air.

Dans l'un et l'autre cas, les cylindres seront à $0^m,20$ les uns des autres, et à la même distance des parois du bac. Une cloison métallique légère et horizontale *h* reliera chaque cylindre à un des grands côtés du bac, alternativement à droite et à gauche. Ces cloisons forcent le fluide refrigérant à s'élever en zig-zag et à bien lécher les parois métalliques où la farine se meut.

En sortant du dernier cylindre, le minot tombe dans un conduit *i* muni d'un registre et agencé pour qu'on puisse recevoir la farine dans des sacs ou barils, et les peser en ne laissant la

surface supérieure du minot qu'un instant en contact avec l'air extérieur.

L'opération serait ainsi continue, et la matière entrée chaude et humide dans l'étuve sortirait du refroidisseur sèche et fraîche, pesée et sans introduction appréciable de spores fermentescibles.

38. Dans l'appareil décrit, la farine transmet son calorique au fluide refrigérant par l'intermédiaire d'une séparation métallique, et il importe de savoir la puissance de transmission des enveloppes de cette nature.

Peclet fait d'abord observer que les surfaces ternes sont, sous ce rapport, plus favorables que les autres. Il donne ensuite la formule suivante pour calculer par mètre carré et par heure la quantité de calories qu'elles sont susceptibles de fournir

$$A = 43.t(1 + 0{,}105\,t);$$

t étant la différence de température entre le corps à refroidir et le liquide refrigérant. Mais l'auteur fait observer que les expériences dont cette formule est la conséquence, n'ont eu lieu que pour des différences comprises entre 10° et 26° et que la température du corps à refroidir n'a pas dépassé 40°. On ne peut donc appliquer cette formule au cas présent que par extension, c'est-à-dire sans certitude.

Un fait nous permettra de procéder moins vaguement. Peclet cite, comme un résultat digne de remarque, celui obtenu par MM. Schiers et fils, avec un rafraîchissoir à bière de leur invention. Le moût circule dans une série de tubes métalliques environnés d'eau. Leur surface est de 80 mètres carrés. En une heure 6000^k de moût à 100° passent à la température extérieure de 22°, en perdant ainsi 78°. Pour obtenir ce résultat, on emploie 10000^k d'eau dont la température s'est élevée de 22° à 65°, soit de 43°.

Appliquant à ce cas la formule ci-dessus, on trouve pour le nombre de calories émises par heure par un mètre carré de surface, et sous l'influence d'une différence de température de 78°,

$$A = 43.78(1 + 0{,}105.78) = 30823.$$

Or, dans le rafraîchissoir de MM. Schiers et fils, 80 mètres carrés de surface transmettent au liquide refrigérant

$$10000.43 = 430000 \text{ calories (}^1\text{)},$$

ou par mètre carré,

$$\frac{430000}{80} = 5375,$$

nombre inférieur à celui de la formule dans la proportion de

$$\frac{5375}{30828} = \frac{1}{5,735}.$$

Telle est la fraction par laquelle il faudra multiplier cette formule pour en obtenir des nombres suffisamment concordants avec ceux déduits de la pratique. Ainsi modifiée, elle donnera pour le nombre de calories transmises par mètre carré en une heure

$$(18) \qquad A = 7,5t(1 + 0,105t) = \Gamma_1,$$

et en une seconde,

$$(19) \qquad 0,00207t(1 + 0,105t) = \Gamma_2.$$

On emploie ici les notations $\Gamma_1 \Gamma_2$ analogues à celles déjà usagées pour les quantités de calorique.

Cas où l'eau est employée comme refrigérant.

39. Traitons d'abord le cas où l'eau est employée comme refrigérant.

Prenons des cylindres de $0^m,30$ de diamètre, où le minot occupe une section ayant $0^m,06$ de flèche, comme au n° 5.

---

(1) En supposant au moût la capacité calorique de l'eau, ce qui ne doit pas être absolument vrai, ces 6000^k de moût, perdant 78°, abandonnent 468000 calories. Ce chiffre concorde suffisamment avec celui des calories gagnées par l'eau, car, outre la différence probable de capacité calorique des deux liquides, l'eau refrigérante doit, par les parois du bac, perdre une partie du calorique reçu, ce qui est une nouvelle cause d'inégalité.

A la sortie de l'étuve, la farine est à 85°. Elle pénètre dans le rafraîchissoir à cette température. En été, saison où le refroidissement est le plus difficile, l'air est généralement à 25°, et l'eau des rivières à 20°. On admettra 25° pour la température de l'eau et du minot sortants; ce qui les tient en équilibre thermique avec l'air extérieur. En prenant, d'après les indications de Peclet, les moyennes entre les températures d'entrée et de sortie, comme celles de la farine et du liquide dans l'appareil, on aura pour la première,

$$\frac{85+25}{2} = 55^{\circ},$$

et pour le second,

$$\frac{25+20}{2} = 22^{\circ},5.$$

L'air dont les cylindres sont pleins, dans la partie non occupée par la farine, ne se renouvelle que par très petites quantités; on peut l'y considérer comme confiné, et se mettant à la température du minot, une fois le régime établi. Dans cette hypothèse, le cylindre débite du calorique par toute sa surface, dont la circonférence est

$$2\pi.0^{m},15 = 0^{m},942,$$

et cela en vertu de la différence des températures qui est

$$55^{\circ} - 22^{\circ},5 = 32^{\circ},5.$$

La formule (18) donne, dans ces conditions,

$$\Gamma_1 = 7,5.32,5(1 + 0.105.32,5).0,942 = 1012,23.$$

Tel est le nombre de calories que le cylindre est susceptible de débiter par mètre courant et par heure.

Quinze barils, ou 1320^{k} de farine, pour passer, en une heure, de 85° à 20°, doivent céder à l'eau

$$1320.60,0,2679 = 21218 \text{ calories}.$$

Le développement total des cylindres en longueur sera donc de

$$\frac{21218}{1012,23} = 20^{m},96;$$

soit 21^m. On y arrivera en prenant 4 cylindres de $5^m,25$ de long chaque.

En général, il est bon de choisir un nombre pair, pour que la farine entre et sorte du refroidisseur du côté opposé à celui où se trouvent les engrenages. Cette précaution facilitera le travail des ouvriers et le rendra moins dangereux.

L'appareil contiendra un poids de farine égal à

$$F' = L.s.540 = 21.0{,}01.540 = 113^k{,}40.$$

La durée du séjour sera

$$\theta' = \frac{3600}{1370} \cdot 113{,}20 = 308'{,}72.$$

En nombre rond 5 minutes 10 secondes. La vitesse de translation par seconde sera

$$w = \frac{L}{\theta'} = \frac{21}{310} = 0^m{,}0677,$$

et le nombre de tours par minute

$$n = \frac{60w}{P} = \frac{60w}{0{,}15} = 27{,}10.$$

Le bac contenant les 4 cylindres, avec les espaces indiqués au n° 36, aura $5^m,25$ de long, $2^m,20$ de haut et $0^m,70$ de large.

La quantité d'eau refrigérante E devra enlever 21218 calories par heure, et, comme nous l'avons dit, sortir à 25°, température extérieure, après être entrée à 20°. La température de chaque kilo d'eau ne devra donc augmenter que de 5° dans le bac. On aura donc

$$E = \frac{21212}{5} = 4244^k \text{ d'eau}$$

à fournir par heure; et par seconde

$$E' = \frac{4244}{3600} = 1^k{,}170;$$

en volume $0^{mc},00117$.

Il sera prudent de se munir d'une pompe susceptible d'un débit un peu supérieur. Cependant, il est à croire que celui-ci sera suffisant.

Cas où l'air est employé comme refrigérant.

40. Bien que l'industrie emploie fréquemment l'air comme refrigérant, dans des chambres closes, à circulation bien réglée, nous ne connaissons pas d'expériences dont il soit possible de déduire des règles susceptibles d'applications à grande échelle (1). Nous sommes donc forcé de supposer que, dans le cas présent, la quantité du calorique transmis, par mètre carré de surface, est la même pour l'air que pour l'eau.

Admettons, comme au numéro précédent, la farine à 85° et l'air à 25°, lors de leur entrée dans l'appareil; admettons en outre la farine sortant à 25° et l'air à 40° :

La moyenne pour ce dernier est

$$\frac{25+40}{2} = 32°,5.$$

Pour le minot elle est encore de 55°, ce qui constitue sur 32°,5 un excès de 22°,5. La formule (18) donne, dans ces conditions, pnur le nombre des calories émises par mètre courant de cylindre,

$$\Gamma_1 = 7,5.22,5(1 + 0.105.22,5)0,942 = 534,51,$$

et comme il s'agit toujours de porter 1320k, à l'heure, de 85° à 25°, le nombre de calories à leur enlever est, comme dans le cas précédent, de 21218, d'où on tirera pour la longueur totale à donner aux cylindres

$$\frac{21218}{534,51} = 39^m,7;$$

(1) Ces expériences seraient faciles avec l'ingénieux appareil inventé par MM. Cahouet et Moranne pour refroidir les bougies après la coulée.

soit 40^m. On adoptera huit tubes de 5^m, mais il ne convient pas de les agencer sur une seule rangée verticale. Il est préférable de les disposer en deux colonnes de 4 chaque, fonctionnant chacune isolément, le conduit qui amène la farine de l'étuve se bifurquant en deux. Il faudra aussi deux orifices de réception. La bâche aura alors $5^m,00$ de long, $2^m,20$ de haut et 1^m, 20 de large.

Chaque jeu de 4 cylindres contiendra

$$40.0,01.540 = 108^k$$

de minot. Le temps du séjour y sera

$$\theta = \frac{3600}{\frac{1}{2}\,1320}\cdot 108 = 589'',09,$$

en nombre rond 600'', ou 10 minutes.

La vitesse de translation est alors

$$w = \frac{20}{600}\,0^m,0333,$$

et le nombre des révolutions opérées par la vis en une minute,

$$n = \frac{60\,w}{P} = 13,22.$$

Le poids d'air à fournir, par moitié à chaque jeu de cylindres, doit passer de 25° à 40°, c'est-à-dire prendre 15°; et comme sa capacité pour le calorique est 0,2379, il devra se charger de

$$15.0,2379 = 3,5685 \text{ calories.}$$

Le nombre de celles à enlever au minot étant toujours de 21218, le poids d'air à fournir sera par heure

$$\frac{21218}{3,5685} = 5918^k,$$

et par seconde

$$\frac{5918}{3600} = 1^k,644.$$

La densité de l'air à 25°, formule (3), étant de 1,19, le volume d'air à introduire par moitié dans chaque jeu de cylindres sera

$$\frac{1,644}{1,19} = 1^{mc},390,$$

ou 1390 litres. Comme l'étuve, calculée pour ce cas, en demande 1054 et le calorifère 200, on peut aisément diriger l'air chauffé à 40° dans la chambre du calorifère. La température élevée de cet appareil et la hauteur des cheminées d'échappement de l'étuve produiront un tirage assez énergique pour dispenser de l'emploi de tout procédé mécanique de ventilation dans la bâche des cylindres.

On voit que l'installation d'un refroidisseur sera plus coûteuse pour l'air que pour l'eau. On devait s'y attendre.

V

Emploi de la vapeur pour l'étuvage des farines.

41. On a vu au n° 2 que, antérieurement à 1847, des constructeurs avaient conçu, et mis à exécution, la pensée d'employer la vapeur au chauffage des étuves à farine. On a vu également que le brevet de M. Touaillon, basé sur cette idée, avait reçu la sanction de la pratique, et se trouvait, à notre connaissance, le seul du genre actuellement en usage. Ces circonstances nous indiquent la marche à suivre dans ce chapitre. Il commencera donc par quelques considérations relatives à l'emploi de la vapeur et se terminera par une étude un peu plus étendue sur la théorie et les effets de l'étuve de M. Touaillon. Nous ne l'avons pas vu fonctionner, nos calculs ne sont donc pas influencés par les résultats de la pratique. Les fabricants qui usent de ce système, pourront, en comparant les uns aux autres, juger de la confiance qu'ils peuvent accorder à nos déductions théoriques.

La vapeur d'eau, employée comme véhicule de calorique, peut être mise en œuvre de deux façons différentes.

Quand, pour un motif quelconque, il y a inconvénient à mettre la matière traitée en contact direct avec les surfaces chauffées par la vapeur, l'air est employé comme intermédiaire. La vapeur

est amenée dans des récipients métalliques autour desquels circule un courant d'air. Il s'échauffe à ce contact et pénètre ensuite dans la chambre de séchage. On opère ainsi pour les matières délicates, notamment pour la poudre à canon.

Quand on peut, sans inconvénient, poser le corps à traiter sur les surfaces chauffées par la vapeur, c'est à leur contact que l'air venu de l'extérieur se charge du calorique nécessaire et de l'humidité abandonnée par la matière étalée. C'est ainsi qu'opère M. Touaillon.

La théorie qui rend compte des effets n'est pas la même dans les deux cas. Elle est encore influencée par d'autres causes qui peuvent se présenter.

Ou le générateur devra être spécial à l'étuve, ou il la servira concurremment avec d'autres mécanismes.

Le problème se présente donc sous différentes formes qu'il s'agit d'examiner rapidement.

42. La tension de la vapeur dans la ou les chaudières d'un grand établissement, dépend de circonstances nombreuses, et cette tension est généralement plus forte que celle qui conviendrait au générateur destiné spécialement au travail d'une étuve où la vapeur doit agir directement sur les surfaces chargées de farine.

Tâchons de préciser cette tension.

Il y a plus de vingt ans, ayant à opérer, sur une grande échelle, la dessiccation de la poudre à canon, je dus me renseigner sur ce qui se passait dans les sécheries des autres établissements similaires. Par prudence, la matière n'y est jamais exposée à plus de 75°. Cette considération et d'autres trop longues à développer ici m'amenèrent à employer une chaudière timbrée à deux atmosphères et donnant, sur les lieux d'emploi, de la vapeur à $1^{at}\,{}^{1}/_{2}$.

Pendant dix ans j'ai pu suivre la marche de cette sécherie. Il était très aisé, en réglant le débit de l'air et de la vapeur, de tenir la poudre à 69° ou 70°, le générateur fonctionnait généralement

un peu au-dessous de 2 atmosphères. Un ouvrier ordinaire se mit rapidement au courant et, pendant tout ce temps, suffit aisément à sa tâche.

Cette expérience nous fait admettre que le générateur spécial au service d'une étuve à farine doit être timbré à 2^k et fonctionnera habituellement un peu en dessous; l'expérience fixera le chauffeur à cet égard.

Rappelons que, dans la législation actuelle, les timbres indiquent en kilogrammes la pression par centimètre carré de surface, tandis que les anciens, gradués par atmosphère, indiquaient une pression légèrement plus élevée, l'atmosphère correspondant à 1^k,033 par même unité de surface.

Dans les chaudières communes à tous les appareils d'un établissement le timbre est, dans la plupart des cas, supérieur à 2^k; la vapeur arriverait donc à l'étuve à une température trop élevée. On ne saurait y remédier qu'en restreignant la puissance du jet de vapeur, au moyen de valves ou de robinets. De leur emploi résultent des étranglements, des pertes de pression nécessaires, mais sensibles, qui se traduisent par des pertes de charbon, car il a fallu forcément chauffer trop et laisser perdre improductif cet excès de chauffage. En outre, il y a dans les tubes de conduite une condensation gênante par l'eau résultante, dont il faut se débarrasser.

43. Lorsque la vapeur chauffe dans un local spécial l'air destiné à la dessiccation, l'inconvénient signalé ne se présente plus, puisque le fluide n'entre dans l'étuve qu'à la température nécessaire. Il y a même avantage alors à disposer de chaudières d'un timbre élevé, car plus la vapeur arrivera chaude dans les capacités métalliques que l'air frais doit envelopper, moins il faudra leur donner de surface.

Il n'existe pas à notre connaissance d'étuve à farine où l'air soit chauffé à la vapeur, avant son introduction dans la chambre d'étuvage. Cette disposition mérite cependant d'être étudiée. Elle supprimerait les calorifères, toujours chauffés à une haute

température, qui en altère les surfaces et les joints. Il en résulte de fréquentes réparations et parfois une odeur de fumée nuisible à la qualité du produit.

Avec la vapeur, le feu et la température sont plus faciles à régler, mais elle exige un générateur et un appareil de chauffage qui, ensemble, peuvent coûter plus cher qu'un calorifère. Le système dont il s'agit n'a donc de chances d'adoption que dans les minoteries à vapeur pourvues ou à pourvoir de chaudières.

44. Malgré cette réflexion, nous croyons devoir présenter les calculs d'une disposition de ce genre qui peut trouver son application dans d'autres industries.

Nous allons donc supposer l'air chauffé par la vapeur avant son introduction dans la chambre d'étuvage.

Désignons par :

- D le degré de température correspondant à la tension de la vapeur dans le générateur.
- D′ Le degré de température correspondant à la tension de la vapeur dans l'appareil chauffeur.
- Γ Dans le calcul du calorifère représentait la quantité de calories à fournir par seconde à l'air entrant dans la chambre. Elle reste ici la même, puisque l'effet à produire est identique et que l'origine de ce calorique n'influe pas sur le travail qu'on attend de lui.

Le nombre des calories contenues dans un kilogramme de vapeur d'eau, à la température D′, est, comme on l'a vu, et d'après les expériences de M. Regnault :

$$a + bD'.$$

Cette vapeur se condensant dans l'appareil où l'air se chauffe avant d'entrer dans l'étuve, en sort généralement à l'état d'eau à 90°. Elle a donc transmis à l'air

$$a + bD' - 90 \text{ calories}.$$

Comme il en faut Γ par seconde, le générateur devra, pour le service de l'étuve, vaporiser, par seconde, autant de kilogrammes

d'eau que Γ contient de fois la précédente expression, soit

$$\frac{\Gamma}{a + bD' - 90}.$$

Pour avoir cette production par heure, il suffira de multiplier ce chiffre par 3600, et on aura alors pour le poids d'eau à vaporiser par heure,

$$(20) \qquad E = \frac{3600\,\Gamma}{a + bD' - 90}.$$

On sait, pour chaque timbre de pression, la quantité de liquide vaporisée par cheval et par heure, ou par mètre carré de surface de chauffe; on en déduira, estimé en force de cheval, ce que la chaudière devra fournir à l'étuve, et la surface de chauffe correspondante.

Pour apprécier le combustible à brûler, il convient de savoir le pouvoir calorique de la houille employée et le rendement du générateur. Dans les calculs de ce genre, on suppose d'habitude que le kilo de houille contient 6000 calories, et que la chaudière rend 0,60. Avec ces conditions la quantité de charbon brûlée par heure est de

$$E\,\frac{a + bD - 15}{0,6.6000},$$

l'eau étant primitivement à la température de l'air extérieur, supposée de 15°, comme dans tout ce qui précède.

En remplaçant dans cette formule E par sa valeur, et réduisant, on aura l'expression de la quantité q de charbon à brûler par heure

$$(21) \qquad q = \Gamma\,\frac{a + bD - 15}{a + bD' - 90}.$$

On aura ainsi déterminé ce que la chaudière, commune aux divers appareils, devra avoir de surface de chauffe afférente aux besoins de l'étuve, et l'augmentation de dépense de combustible qui en est la conséquence.

45. Appliquons ces formules au cas déjà traité à divers points

de vue, où il s'agit d'étuver 1320^k de minot à l'heure. Supposons le générateur timbré à 5^k et la pression de la vapeur dans le réchauffeur à 4^k,50. On aura alors, d'après les tables spéciales,

$$D = 153^c, \qquad D' = 149^o.$$

On a vu, n° 26, que le nombre de calories à fournir par seconde était

$$\Gamma = 21{,}5758.$$

En introduisant ces valeurs dans les formules (20) et (21), on a pour la quantité d'eau à vaporiser par heure

$$E = 138^k{,}25,$$

et pour le nombre de kilogrammes de charbon à brûler dans le même temps :

$$q = 24^k{,}5.$$

En douze heures 294^k, ou 3,67 hectolitres, environ un demi de plus que pour le calorifère desservant une étuve pareille. Cette différence tient à deux causes. On a admis que le rendement des générateurs était de 0,60 et celui des calorifères de 0,63. On a supposé que la pression perdait 1/2 kilo dans la conduite d'amenée.

46. Voyons encore quelle devrait être la surface de l'appareil destiné à chauffer l'air, avant son entrée dans l'étuve.

Les parois métalliques entre lesquelles la vapeur est logée sont chauffées par elle à 149°. La chambre de chauffage a ses murs ou cloisons à 15°, température extérieure, n° 20.

Dans ces conditions les formules (6) et (7) donnent, pour le nombre de calories émises par mètre carré et par seconde,

$$\begin{aligned} R &= 0{,}2333 \\ A &= 1{,}4220 \\ \hline A + R &= 1{,}6553 \text{ calories.} \end{aligned}$$

La quantité nécessaire étant 21,5758, la surface totale des aires de contact devra être de

$$\frac{21{,}5758}{1{,}6553} = 13^{mq}{,}035,$$



chiffre qui s'obtiendra sans difficulté en prenant des dispositions semblables à celles des chaudières tubulaires, comme cela se pratique dans le service des poudres depuis les premières années de ce siècle.

Bien que la quantité d'eau vaporisée par heure, et par mètre carré de surface de chauffe, varie dans de fortes proportions avec le genre de chaudière, il est bon de poser ici un chiffre afin de préciser les idées. Admettons le générateur composé, comme on le voit souvent, d'un corps de chaudière et de deux bouilleurs cylindriques. On y compte en moyenne 20^k d'eau vaporisée par mètre carré de surface de chauffe, et par cheval. Les dimensions seront donc ici de 12 mètres carrés de surface de chauffe, correspondant à un travail de 12 chevaux.

Calcul de l'étuve de M. TOUAILLON.

47. L'étuve de M. Touaillon est, en ce moment, à notre connaissance, la seule où la farine soit immédiatement en contact avec les surfaces métalliques chauffées par la vapeur. D'après le texte du brevet de cet ingénieur, les plateaux qu'il emploie sont à double fond, un serpentin en spirale, placé entre deux, reçoit le courant de vapeur. Le plateau a $2^m,00$ de diamètre; il porte sept zones de farine larges chacune de $0^m,10$ dans le sens du rayon. La première zone commence à $0^m,20$ du centre.

D'après le dessin joint au brevet, la distance entre les deux plateaux comprenant le serpentin est de $0^m,05$.

Suivant Peclet, la vapeur entrant dans les spires doit avoir une température dépassant de 15° à 20° celle de la matière à étuver. La farine étant à 85°, la vapeur devrait être à 105°. Nous avons dit 112° au n° 42, chiffre qui concorde suffisamment avec le précédent. Nous avons ajouté, en effet, que l'appareil alors cité fonctionnait généralement à une température un peu inférieure à celle prévue.

Prenons les chiffres de Peclet. D'après les tables, la tension correspondante à

$$D' = 105^o$$

est de $1^k.20$. Suivant nos appréciations, le générateur doit être timbré à $1^k,70$, ce qui donnera pour la température de la vapeur qui s'y développe

$$D = 116^o.$$

Nous supposerons l'étuve desservie par un générateur spécial. Car il y aurait trop de pertes de pression et de calorique, si le jet de vapeur devait être pris sur une chaudière timbrée à 4^k ou 5^k.

48. Examinons ce qui se passe dans l'appareil présentant ces dispositions. Le calorique émis par le serpentin se transmet, par le plateau supérieur, à la farine posée sur lui et de là à l'air touchant cette farine. Par le plateau inférieur il se transmet à l'air en contact avec lui. Il y a encore émission de calorique par la partie cylindrique qui joint les deux disques. Le fluide, ainsi chauffé, prend une certaine quantité d'humidité, et s'échappe par des orifices dont la chambre doit être munie dans ce but. Elle aura aussi par conséquent des orifices d'introduction.

La surface des plateaux est donc un des éléments du calcul.

Le rayon étant de 1^m, la surface est de.		$\pi, r^2 = 3^{mq},141$
Le plateau inférieur à même surface.	$3^{mq},141$	
La partie cylindrique étant supposée de $0^m,07$ de haut, à cause de l'épaisseur de la fonte ou de la tôle, et du jeu sur le serpentin, est de.	$2\pi r.0,07 = 0^{mq},439$	
Total pour les deux.	$3^{mq},580$	$3^{mq},580$
La surface émissive, totale, plateau et cylindre compris, est donc.		$6^{mq},721$

ou en décimètres carrés 672.

Pour que la transmission du calorique se fasse bien réguliè-

rement, il faut que la surface émissive du serpentin soit égale à celle extérieure du plateau.

Peclet dit que des serpentins de $0^m,025$ à $0^m,030$ de diamètre ne doivent pas avoir plus de 30 à 40 mètres de longueur développée; sans quoi les eaux de condensation gênent le mouvement de la vapeur. Il est facile de s'assurer, par un calcul analogue au suivant, qu'en prenant des tubes de ce diamètre, leur longueur dépasserait beaucoup la limite indiquée. On est amené ainsi par tâtonnements à employer des tubes de $0^m,05$ de diamètre qui rempliront le but proposé, ainsi que l'on va le vérifier.

La circonférence extérieure de leur section est

$$\pi,0^m,05 = 0^m,1575.$$

Supposons le serpentin composé de 12 spires distantes entre elles de $0^m,06$, mesurées de centre à centre; la première commençant à $0^m,25$ de l'axe vertical de rotation, la dernière en sera distante de $12.0,06 + 0,25 = 0^m,97$.

La longueur développée des 12 spires est sensiblement égale à la somme des circonférences de 12 cercles concentriques ayant le premier $0^m,25$, le dernier $0^m,97$ de rayon. La somme des rayons est celle des termes d'une progression de 12 termes dont le premier est $0^m,25$ et la raison $0^m,06$. Elle est donc

$$\frac{2.0,25 + 11.0,06}{2}\,12 = 6^m,96,$$

et la somme des 12 circonférences

$$2\pi.6,96 = 43^m,7088,$$

ce qui dépasse de peu la proportion indiquée et donnera un bon écoulement des eaux condensées, le diamètre du tube étant plus fort que $0^m,03$.

La surface émissive de ce serpentin sera

$$43,7088.0,1575 = 6^{mq},884,$$

nombre légèrement supérieur aux $6^{mq},721$ nécessaires.

49. Conservons les notations précédemment employées :

F désignant ici le poids de minot placé sur ce plateau ;
θ la durée en seconde du séjour du minot sur le plateau ;
$\frac{F}{\theta}$ étant ainsi le poids de farine traité par seconde ;
X le volume d'air introduit, par seconde, dans la chambre d'étuvage.

Notre but est de déterminer ce que le plateau, élément de l'étuve de M. Touaillon, est susceptible de fournir par heure. Faute de renseignements pratiques sur cet appareil, nous admettrons que :

L'air entre dans la chambre à 15° et en sort à 40° ;

La farine y pénètre à 15° et en sort à 85°.

D'après cela et en marche de régime, les températures moyennes, qui, d'après Peclet, doivent entrer dans le calcul, sont pour l'air

$$\frac{15+40}{2} = 27°,5 ;$$

pour la farine

$$\frac{85+15}{2} = 50°.$$

Faute de mieux et comme indication à justifier par l'expérience, nous nous servirons de la formule (19) relative à l'émission de la chaleur. Le minot placé sur le plateau est à la température moyenne de 50° ; l'air ambiant à 27°,5. Sous l'influence de la différence, 22°,5, de ces nombres, la surface de $3^{mq},14$ émet dans le temps θ,

$$0{,}00207.22{,}5\,(1+0{,}105{,}22{,}5)\,3{,}14\,\theta = G\theta \text{ calories.}$$

La surface inférieure et périphérique du plateau est à 105°, et l'air ambiant en moyenne à 27°,5, nombres dont la différence est 77°5. La quantité de calorique émise par cette surface de $3^{mq},58$, est donc dans le même temps

$$0{,}00207.77{,}5\,(1+0{,}105.77{,}5)\,3{,}58{,}\theta = G'\theta .$$

Le nombre total de calories émises est par suite

$$(G + G')\theta = \Gamma\theta,$$

et il n'y a d'autre chaleur introduite dans la chambre que celle possédée par l'air et la farine à leur entrée.

Pendant chacune des θ secondes de l'opération, il pénètre dans l'étuve un volume X d'air extérieur à la température de 15°, contenant vX de vapeur d'eau et d'X de gaz, n° 17. Le volume total Xθ renfermait donc :

$$[v(a + 15.b) + d'.\gamma.15]X\theta \text{ calories.}$$

Cet air porté à 40°, température de sa sortie, possède

$$[v(a + 40.b) + d'\gamma 40]X\theta \text{ calories.}$$

La différence de ces deux nombres

$$25(vb + d'\gamma)\theta X$$

donne celui des calories que l'air prend dans l'étuve et emporte avec lui en la quittant. Mais ce n'est pas tout. La farine lui a cédé moitié, soit $\frac{m}{100}$ F de son humidité, qui, à l'état d'eau, contenait $\frac{mF}{100}$ 15 calories. Cette eau, portée à l'état de vapeur à 40°, contient

$$\frac{mF}{100}(a + 40b) \text{ calories.}$$

Elle a donc gagné

$$\frac{mF}{100}(a + 40b - 15) \text{ calories,}$$

qui s'échappent avec l'air. Il entraîne donc au dehors un nombre total de calories égal à

$$25(vb + d'\gamma)\theta X + \frac{mF}{100}(a + 40b - 15).$$

Le minot, entré dans l'étuve à 15°, en sort à 85°. Son poids à

l'état sec, $\left(1 - \frac{2m}{100}\right) F$, y a donc pris

$$\left(1 - \frac{2m}{100}\right) F \varphi 70 \text{ calories.}$$

La moitié de l'humidité qu'il contenait, en entrant, est partie avec l'air, mais à l'état de vapeur; l'autre, $\frac{mF}{100}$, est restée unie à la farine et, en passant de 15° à 85°, a reçu

$$\frac{mF}{100} 70 \text{ calories},$$

que le minot entraîne aussi avec lui. Il jette donc au dehors

$$\frac{mF}{100} \cdot 70 \left[1 + \left(\frac{100}{m} - 2\right) \varphi\right],$$

égalant la somme de ces pertes à la quantité de calorique fournie par le plateau, on aura l'équation

$$(22) \quad \Gamma = 25(vb + d'\gamma)X + \frac{m}{100} \cdot \frac{F}{\theta}\left[a + 40b + 70 - 15 + \left(\frac{100}{m} - 2\right) 70\varphi\right],$$

dans laquelle X représente le volume d'air à fournir par seconde pour le service d'un plateau et $\frac{F}{\theta}$ le poids de farine qu'il est susceptible d'étuver par seconde.

Dans cette équation Γ est déterminé par les dimensions du plateau et par le jeu des températures; toutes les autres quantités sont numériques, sauf X et $\frac{F}{\theta}$, qui représentent les inconnues de la question.

Le problème est donc indéterminé.

Cette indétermination cesse si on se donne la condition que l'air sortant ne contienne qu'une fraction déterminée de l'humidité dont il serait susceptible de se charger à saturation. Admettons qu'ici, comme au n° 28, on doive avoir

$$I - i = 3{,}88 \frac{mF}{100\,\theta X},$$

ce qui revient à

$$\frac{F}{\theta} = 0,3482\,X.$$

Cette valeur introduite dans l'équation (22) en rend fort simple la solution par rapport à X.

50. Donnons aux quantités littérales leurs valeurs numériques qui sont, comme précédemment :

$$v = 0^{k},006358, \quad d' = 1^{k},221079, \quad \gamma = 0,2379,$$
$$a = 606,5, \quad b = 0,305, \quad m = 3, \quad \varphi = 0,2679.$$

En effectuant les calculs on a

$$\Gamma = 5,73243.$$

L'équation (22) devient

$$X = \frac{5,73243}{20,27734} = 0^{mc},2827$$

et

$$\frac{F}{\theta} = 0,2827.0,3482 = 0^{k},0984.$$

Le plateau de M. Touaillon est donc susceptible d'étuver 98 grammes de farine par seconde, avec un débit d'air de 283 litres dans le même temps.

Ce plateau porte sept zones de minot dont la première est étendue sur une circonférence de $0^{m},25$ de rayon moyen, soit $1^{m}57$ de développement.

La nappe de farine a $0^{m},10$ de large, donnons-lui $0^{m},07$ de hauteur; la septième zone n'en aura plus que

$$\frac{0,07.0,25}{0,85} = 0^{m},0206,$$

ce qui paraît convenable.

Le volume du minot de la première zone sera

$$1,57.0,07.0,10 = 0^{mc},0,1099,$$

et celui des sept $0^{mc},07693$, ayant, à la densité de 540, un poids de $41^k,54$, ce qui constitue la charge du plateau. A $0^k,0984$ par seconde, la durée du séjour sur le plateau sera

$$\frac{41,54}{0,0984} = 422'',15 = \theta,$$

ou six minutes deux secondes.

Sept zones étant parcourues en $422''$, l'une d'elles le sera en

$$\frac{422}{7} = 60'',28,$$

sensiblement une minute, ce qui donnera pour le nombre de tours de râteau par minute, à très peu près

$$n = 1.$$

La vitesse angulaire se déduit de celle sur la circonférence de $0^m,25$ de rayon, qui a $1^m,57$ de développement. Elle est

$$\omega = \frac{1,57}{60,28.0,25} = 0^m,104.$$

Dans ces conditions de marche le plateau produira par heure

$$0,0984.3600 = 354^k$$

de farine étuvée, ou en nombre rond 4 sacs de 88^k.

Le nombre de calories fournies par seconde par le plateau a été trouvé précédemment de 5,7324. On a vu au n° 47 qu'il convenait de prendre ici

$$D = 116^\circ, \qquad D' = 105^\circ.$$

Introduisant ces valeurs dans les formules (20) et (21) du n° 44, on en tirera pour la quantité d'eau à vaporiser par heure,

$$E = 37^k,622,$$

et pour le poids de charbon à brûler dans le même temps,

$$q = 6^k,55.$$

Les chaudières à basse pression et feu doux, comme celle

dont il s'agit ici, vaporisent environ 33^k d'eau par heure, et ont 1,50 mètre carré de surface de chauffe, par force de cheval. Sur ces bases, la chaudière calculée pour un plateau de M. Touaillon serait de

$$\frac{37,622}{33} = 1^{ch},14,$$

soit un cheval $^1/_7$, et sa surface de chauffe de $1^{mq},71$. Ces résultats du calcul cadrent avec les assertions de ce constructeur qui, dans son *Traité de la meunerie,* annonce que son plateau demande une chaudière d'un cheval environ.

51. D'après les équations (20), (21), (22), E, q, Γ sont fonction de X et varient, comme lui, proportionnellement à $\frac{F}{\theta}$. Ceci donne le moyen de traiter facilement tous les cas qui peuvent se présenter; ainsi, pour étuver 16 barils à l'heure, ou quatre fois ce que produit un plateau, il suffira d'en prendre 4 et alors

Le volume d'air à fournir par seconde sera. . . . . $1^{mc},131$
et le nombre de calories. 22,930
La quantité d'eau à vaporiser par heure. . . . . . . $150^k,488$
et la quantité de charbon à brûler. . . . . $26^k,200$
La force de la chaudière en chevaux. 4,56
et sa surface de chauffe. . . . . $6^{mq},84$

Sa quantité de minot entrant dans l'appareil étant quatre fois plus grande, et les plateaux fournissant quatre fois plus de calorique, la farine devra faire dans la chambre le même séjour que s'il ne s'y trouvait qu'un seul plateau, ce qui exigera que la vitesse du mouvement soit quatre fois plus grande, c'est-à-dire de quatre tours de râteau par minute.

Pour comparer plus aisément le système de M. Touaillon à celui reposant sur l'emploi des calorifères, admettons qu'il s'agisse encore de sécher 15 barils à l'heure, ou $0^k,367$ par seconde, nombre qui est à la valeur de $\frac{F}{\theta}$ du numéro précédent dans le rapport de

$$\frac{0,367}{0,0984} = 3,73.$$

On prendra quatre plateaux en modifiant un peu l'épaisseur de la lame de farine, et par conséquent la vitesse, ce dont les équations du n° 12 donneront les moyens.

En multipliant par 3,73 les chiffres obtenus au n° 50, on aura pour :

Le volume d'air à introduire par seconde. . . . . . . 1^{mc},054

Le nombre de calories à fournir dans le même temps. 21,372

La quantité de charbon à brûler par heure. . . . . . 24^{k},432

Les chiffres analogues obtenus pour le cas d'un calorifère sont

1,054, 21,576, 20,55.

Les deux premiers coïncident d'une façon presque complète, ce dont il ne faut pas s'étonner, car les quantités et les températures étant les mêmes, il devait en être pareillement des volumes d'air et du calorique nécessaire.

Il y a lieu de remarquer la faible différence existant entre les chiffres de la consommation du charbon.

Pour apprécier les quantités de calorique transmises par les surfaces du plateau, il a fallu faire des hypothèses, moins bien assises sur l'expérience que les formules relatives au calorifère. Ces hypothèses reçoivent donc ici une sorte de consécration. Remarquons encore que la différence

$$24{,}432 - 20{,}55 = 3^{k}{,}882$$

par heure, s'explique par le fait de suppositions admises dans le courant du calcul. On a attribué aux calorifères un rendement de 0,63, et de 0,60 seulement aux générateurs. Les premiers, situés dans la chambre inférieure de l'étuve, ne donnent lieu à aucune perte dans le trajet de l'une à l'autre, tandis que l'on a admis que, dans la conduite tubulaire joignant le générateur à la chambre des plateaux, il y avait une perte de 0^{k},50 de pression, soit dans le cas présent, de 11° de température.

Les calculs précédents mettent donc les deux systèmes sur un pied presque complet d'égalité.

Il serait très intéressant de savoir si la pratique de l'appareil

Touaillon vérifie ces présomptions et donne pour l'emploi du plateau type des résultants concordants avec ceux déduits des considérations théoriques et des hypothèses qui viennent d'être présentées.

Calcul du refroidisseur à eau de M. TOUAILLON.

52. Il nous reste à examiner l'appareil de refroidissement. Il se compose d'un plateau creux, comme le précédent, mais garni d'eau courante au lieu de vapeur. Si le minot y arrive à sa sortie de l'étuve, comme cela doit être pour un fonctionnement continu, il est à la température de 85°. Prenons, comme on l'a déjà fait au n° 39, les circonstances du travail d'été. La température de l'eau sera de 20° et celle de l'air de 25°.

L'air doit sortir à une température plus élevée que celle extérieure, afin de parcourir plus aisément les cheminées d'échappement; supposons-la égale à 30°.

L'eau ne peut sortir à sa température d'introduction, ni être plus chaude que l'air sortant, auquel elle transmettrait alors du calorique, ce qui serait une mauvaise disposition. L'eau d'échappement doit donc être aussi à 30°.

Si la farine, à sa sortie, était moins chaude que l'eau d'échappement, elle en recevrait du calorique, ce qui serait une disposition vicieuse. La farine quittant le plateau doit donc aussi être à 30°.

Nous aurons donc :

pour le minot,	température d'entrée,	85°,	de sortie,	30°;
pour l'eau,	—	—	20°,	—	30°;
pour l'air,	—	—	25°,	—	30°;

D'après cela, les températures moyennes seront :

pour le minot, $\frac{85+30}{2} = 57°,5;$

pour l'eau, $\frac{30+20}{2} = 25°,0;$

pour l'air, $\frac{25+30}{2} = 27°,5$;

F, Θ, X conservent leur précédente signification.

Y désignera le poids d'eau à introduire par seconde dans l'appareil.

Le minot qui séjourne sur le plateau un temps Θ pour passer de 85° à 30° doit perdre

$$55 F \varphi \text{ calories.}$$

L'excès de la température moyenne du minot 57°,5, sur celle moyenne de l'air 25°,5, étant 30°, le premier cède au second, n° 19, par la surface de $3^{mq},14$

$$0{,}00207.30(1 + 0{,}105.30)\,3{,}14\,\theta \text{ calories.}$$

Il cède par la même surface à l'eau, qui est à la température moyenne de 25°, ce qui constitue un excès de 32°,5,

(23) $$0{,}00207.32{,}5(1 + 0{,}105.32{,}5)\,3{,}14\,\theta \text{ calories.}$$

La somme de ces deux quantités est égale au calorique perdu par le minot. On a donc

(24) $$55.\varphi.F = 0{,}00207.3{,}14[30(1+0{,}105.30) + 32{,}5(1+0{,}105.32{,}5)]\,\theta.$$

Le poids Y d'eau pour passer de 20° à 30°, dans le temps Θ, doit prendre

$$10 Y \theta \text{ calories,}$$

qui lui sont fournies par celles que la farine lui cède, déjà calculées (23), et par celles que l'air, chauffé par la farine, est susceptible de lui transmettre. L'excès de la température moyenne de l'air 27°,5, sur celle moyenne de l'eau 25°, étant 2°,5, le nombre de calories est pour la surface de $3^{mq},58$

(25) $$0{,}00207.2{,}5(1 + 0{,}105.2{,}5)\,3{,}58\,\theta.$$

On a donc

(26) $$10 Y \theta = 0{,}00207[32{,}5(1+0{,}105.32{,}5) + 2{,}5(1+0{,}105.2{,}5)\,3{,}58]\,\theta.$$

Le volume d'air θX en passant de 25° à 30° prend un nombre de calories, qui se calculera comme on l'a déjà fait plusieurs fois; il est

$$5(v'b+d'\gamma)X\theta \text{ calories,}$$

v' étant le poids de vapeur, et d' celui de gaz, que le mètre cube d'air contient à 20° de température et à 72° de l'hygromètre. Cette quantité de calorique est cédée à l'air par la farine, mais il y a lieu de tenir compte de celui que le fluide a rétrocédé à l'eau, lequel a été calculé formule (25).

La température moyenne du minot, 57°,5, a sur celle moyenne de l'air 27°5, un excès de 30°. Le nombre de calories fournies par le minot est par suite

$$0{,}00207.30\,(1+0{,}105.30)3{,}14\theta.$$

On a donc

$$5(v'b+d'\gamma)X\theta = 0{,}00207[30(1+0{,}105.30)3{,}14-2{,}5(1+0{,}105.2{,}5)3{,}58]\theta.$$

Enfin, le calorique cédé par la farine est égal à la somme de ceux pris par l'air et l'eau. On a ainsi une quatrième équation,

$$(28) \qquad 10Y\theta+5(v'b+d'\gamma)X\theta = 55.\varphi F,$$

qui n'est que la somme des trois autres.

53. Les équations ci-dessus permettent d'examiner le cas où la chambre de refroidissement, exactement close, ne donnerait lieu à aucun renouvellement d'air. Alors tout le calorique émis par le minot serait reçu par l'eau et évacué avec elle. Il faudrait pour cela que l'on ait dans l'équation (27) $X=0$, ce qui entraînerait la nullité de son second nombre. En se reportant aux raisonnements faits pour le former, et négligeant la petite différence qui existe entre la surface du plateau couverte de farine $3^{mq},14$, et celle qui est en contact direct avec l'air $3^{mq},58$, on devrait avoir entre la température de la farine et celle de l'air la même différence qu'entre celle de cet air et celle de l'eau. Le poids d'eau Y

donné par l'équation (28) sera alors très sensiblement plus considérable, ce qui se conçoit par le simple raisonnement. Il y aurait donc plus de travail à produire pour élever l'eau et lui faire parcourir ses différents circuits; de là plus de dépense. Dans les dispositions prises par M. Touaillon, il est réellement impossible d'empêcher toute circulation de fluide atmosphérique, à laquelle les orifices d'entrée et de sortie du minot donneront forcément lieu. Le mieux est donc, puisqu'on ne peut se soustraire à cette nécessité, de la subir franchement et d'en tirer parti pour avoir aussi peu d'eau que possible à élever et faire passer dans l'appareil.

54. L'équation (27) contient deux quantités v', et d'' qui restent à déterminer. L'air extérieur, supposé à 25° de température et à 72° d'hygrométricité, a une densité qui se calculera par la formule connue (3). Elle est. . . . . $d = 1,18935$

A cette température, et à la pression de $0^m,76$ de mercure, la densité de la vapeur est 0,0235; mais sa tension à 72° de l'hygromètre n'étant que de 0,4892, la quantité de vapeur contenue dans le mètre cube d'air atmosphérique n'est que les 0,4892 de 0,0235. On a donc. . . . . $v' = 0,01171$

On en conclut par la différence d'' de ces deux chiffres. . . . . $d'' = 1,17764$

Ces quantités déterminées, les équations (24), (26) et (27) donneront sans peine :

Le poids de minot refroidi par seconde

$$\frac{F}{\theta} = 0^k,118254;$$

Le poids d'eau à fournir par seconde

$$Y = 0^k,095594;$$

Le volume d'air à introduire dans le même temps

$$X = 0^{mc},554214.$$

C'est-à-dire que le plateau de M. Touaillon peut refroidir 118 grammes de minot par seconde.

Ce chiffre est plus fort, dans le rapport de

$$\frac{0,118254}{0,098400} = 1,2017$$

que celui que peut traiter le même plateau employé à l'étuvage. On peut donc se servir pour refroidir le minot de plateaux identiques à ceux d'étuvage, en même nombre et à même vitesse, constituant dans leur ensemble un appareil à fonctionnement continu; la farine en sortirait à une température un peu inférieure à celle prévue, ce qui n'est pas un inconvénient.

On pourrait arriver très aisément à rapprocher presque complètement le produit du rafraîchissoir de celui de l'étuve, en évitant la perte d'eau qui est la conséquence de l'emploi du même plateau pour l'un et l'autre.

Le rapport des deux produits étant 1,20, comme on vient de le voir, il suffirait de diminuer, dans cette proportion, le temps du séjour du minot sur le plateau à serpentin, séjour qui serait alors de

$$\frac{422}{1,20}\ 351'',67.$$

Il suffira pour cela de prendre six palettes au lieu de sept, et de donner à chacune d'elles 0^m1167 de longueur, projetée sur le rayon, au lieu de $0^m,10$.

En effet, on a

$$\frac{7}{6} = 1,167,$$

et alors la durée du séjour sur le plateau serait

$$\frac{422}{7} \cdot 6 = \frac{422}{1,167} = 361'',6,$$

chiffre très peu supérieur à 351''.

Le système de M. Touaillon se prête donc parfaitement à un travail continu. Le seul reproche à faire à cet ingénieur est, à notre sens, de ne pas s'être préoccupé de soustraire le minot au

contact de l'air extérieur pendant le refroidissement, ce qui, du reste, était fort difficile avec les dispositions de son brevet.

Observations comparatives sur les deux modes de chauffage.

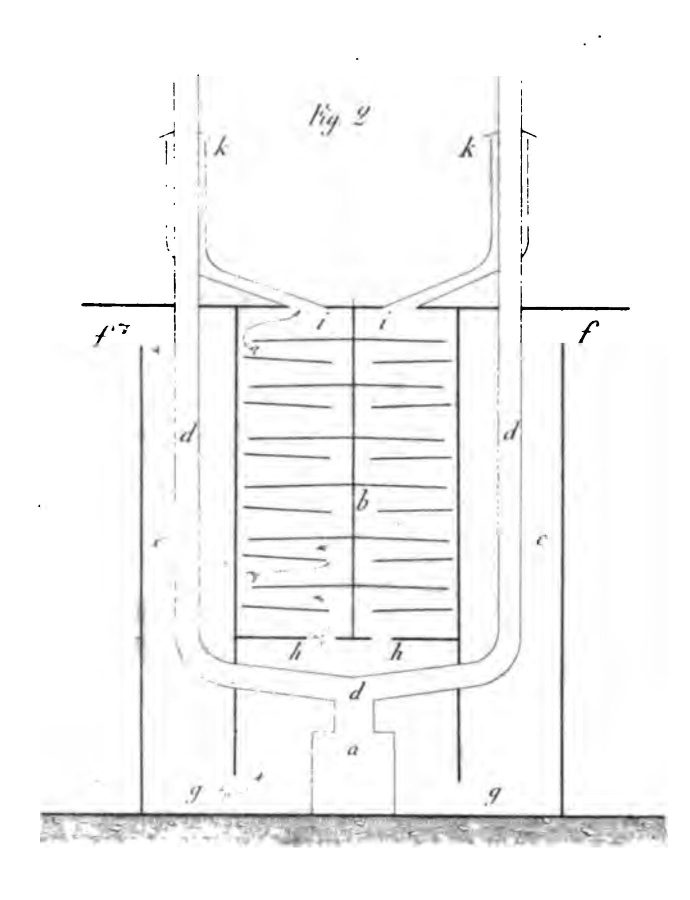
55. Le chauffage à la vapeur, comme celui par calorifère, a ses avantages et ses inconvénients.

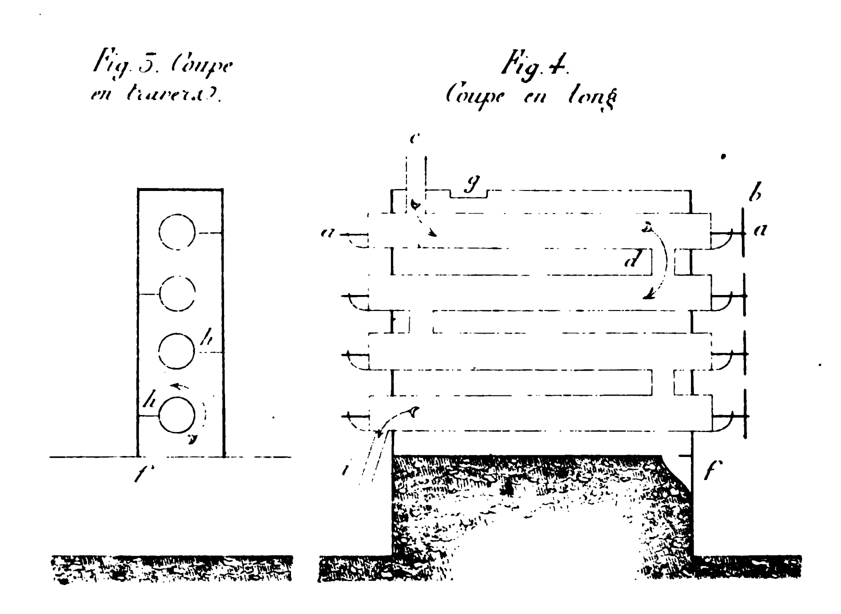
Les auteurs les plus autorisés, parmi ceux qui se sont occupés de séchage et de ventilation, ont reconnu que le véhicule du calorique, air ou vapeur, devait marcher en sens inverse du mouvement de la matière à dessécher. Ils ont encore constaté qu'il y avait avantage à faire arriver l'air chauffé par le haut de la chambre, en ménageant sa sortie à la partie inférieure. Ces prescriptions sont à peu près impossibles à suivre dans les étuves à farine actuellement en usage. En effet, si l'air chaud pénétrait par en haut, la farine devrait arriver par en bas et remonter successivement de plateau en plateau, ou d'auget en auget, ce qui exigerait une série de chaînes à godets ou autres appareils élévatoires, augmentant et compliquant beaucoup le mécanisme intérieur à la chambre et par suite les causes de dérangements.

Ces motifs sont sans doute pour beaucoup dans la disposition générale des étuves actuelles, où l'air chaud arrive par le bas et la farine par le haut, avec ce grand avantage, que les mouvements verticaux de cette dernière s'opèrent per la seule action de la pesanteur.

La construction des générateurs à vapeur est mieux réglée et plus usuelle que celle des calorifères. Le degré de température est facile à y régler, le manomètre étant un guide toujours présent aux yeux.

Les calorifères offrent des joints souvent difficiles à luter et maintenir hermétiques sous l'influence du retrait et de la dilatation; cependant cela est indispensable, à cause des fuites de fumée susceptibles d'altérer le goût du minot.


Fig. 2
k
k
i
i
f
f
d
d
b
c
c
h
h
d
a
g
g


Fig. 3. Coupe
en travers.
Fig. 4.
Coupe en long
c
g
b
a
a
d
h
h
f
i
f

Lith. H. Gouh

Les conduits de vapeur demandent toujours un tuyautage important et un grand nombre de joints. Mais une bonne partie des conduites sont extérieures à l'étuve. On peut arriver par des moyens compensateurs connus à y diminuer beaucoup les conséquences de la dilatation. Les pertes de vapeur sont susceptibles de retarder l'étuvage, mais ont peu d'effet sur la qualité des produits. Une chaudière demande toujours un bon chauffeur adroit à refaire les joints. On se contente souvent, pour conduire un calorifère, du premier manœuvre venu, ce qui est un tort.

Il est recommandé d'établir les conduites de vapeur avec une légère pente dans le sens du mouvement. Avec cette précaution, l'eau, qui se condense toujours dans les tubes, marche dans le même sens que la vapeur et n'en contrarie pas le mouvement. Cette prescription est à peu près impossible à suivre dans une étuve où les conduites s'élèvent toujours plus ou moins verticalement, pour arriver à desservir les étages superposés de l'appareil. Il en résulte un gargouillement qui indique de la gêne dans la marche de la vapeur et inquiète l'ouvrier.

Pour recueillir les eaux condensées dans les tubes et ne pas les laisser circuler pendant un trop long trajet, j'ai employé avec avantage à la base des conduites ascendantes, près des coudes, des syphons débouchant à l'air libre. Leurs branches avaient assez de longueur pour que la colonne d'eau condensée y fît équilibre à la pression intérieure dépassant, comme on l'a vu, celle extérieure d'une demi-atmosphère environ. Ces syphons, devant donc avoir 5^{m} à 6^{m} de hauteur verticale, sont assez coûteux et parfois difficiles à installer.

A chaque remise en train, il importe de donner la vapeur lentement et progressivement pour chauffer les conduites petit à petit, et en expulser l'eau qui pourrait s'y trouver. Sans ces précautions, difficiles à imposer aux ouvriers, on entend souvent des claquements brusques et inquiétants; les joints s'ouvrent et donnent des fuites. On cite même des accidents de rupture qui n'ont pas eu d'autre cause.

On a vu que le minot ne pouvait, sans inconvénient, être

soumis à des températures un peu fortes et ne dépassant certainement pas 100°. Or, dans les chaudières communes à plusieurs mécanismes, la température est toujours plus élevée. C'est un argument très sérieux en faveur des générateurs spéciaux et timbrés pour leur service particulier et indépendant. Cette précaution augmentera en réalité les frais de premier établissement, mais conduira à des économies de charbon, constituant un rapide amortissement.

En résumé, les deux systèmes sont susceptibles d'un bon emploi. Des convenances locales, l'expérience de l'usinier et ses préférences basées sur la pratique motiveront souvent un choix qu'un ingénieur expérimenté ne fera jamais sans avoir étudié les lieux avec le plus grand soin.

NOTE

SUR LE

PLANIMÈTRE POLAIRE DE M. AMSLER

PAR M. C.-A. LAISANT

Capitaine du Génie, ancien élève de l'École Polytechnique.

Dans le *Mémorial de l'officier du Génie* (n° 22), M. le lieutenant-colonel Peaucellier a publié une Note fort intéressante sur l'emploi du planimètre polaire dans le dessin de la fortification, et aussi sur les méthodes usitées en général pour la détermination des quadratures et des cubatures. J'ai pensé que des notions extraites de cet article, et concernant l'appareil de M. Amsler, seraient de nature à offrir quelque intérêt aux membres de la Société des Sciences physiques et naturelles. L'appareil en question est, en effet, assez peu connu généralement, et cependant je ne crois pas qu'il en existe beaucoup qui soient plus ingénieux comme conception, et d'un emploi plus simple et plus pratique.

Dans la présente Note, ma part est presque nulle, puisque je n'ai guère autre chose à faire que d'exposer ce que le lieutenant-colonel Peaucellier a fort bien exposé déjà. Toutefois j'ai cru devoir changer un peu la forme de son travail, en lui donnant un caractère moins technique, et en retranchant ce qui est relatif aux méthodes générales de quadrature et de cubature par approximation. Je résume avec moins de développements la partie relative aux applications, et surtout aux applications spéciales à l'art de l'ingénieur militaire. D'un autre côté, j'ai cru devoir donner un peu plus de généralité à l'étude du principe du planimètre, laquelle donne lieu à des considérations géométriques pleines d'intérêt, en dehors de toute application.

Principe du planimètre polaire.

1. Supposons qu'une droite de longueur constante se meuve dans un plan d'une manière quelconque, et revienne à un instant donné à sa position initiale. Il en résulte qu'à cet instant, chacune de ses extrémités aura parcouru une ligne fermée.

Mais, avant de revenir à cette position initiale, cette droite, dans son mouvement, aura pu prendre successivement toutes les directions possibles sur le plan, ou bien elle aura oscillé entre deux directions limites. Il pourrait même arriver qu'elle eût parcouru *plusieurs fois* tous les azimuts; mais, pour plus de simplicité, nous laissons complètement de côté cette hypothèse, qui est d'ailleurs d'un usage assez rare dans la pratique, et ne donne lieu, lorsqu'elle se présente, à aucune difficulté réelle.

2. Prenons le premier cas, c'est-à-dire celui où la droite a fait un tour entier, indépendamment du déplacement de son extrémité, et représentons-la dans deux positions infiniment voisines, en AB, A_1B_1 (*fig.* 1). Désignons par α l'aire de la courbe fermée décrite par l'extrémité A, par β l'aire de la courbe fermée décrite par l'extrémité opposée B. Soient en outre :

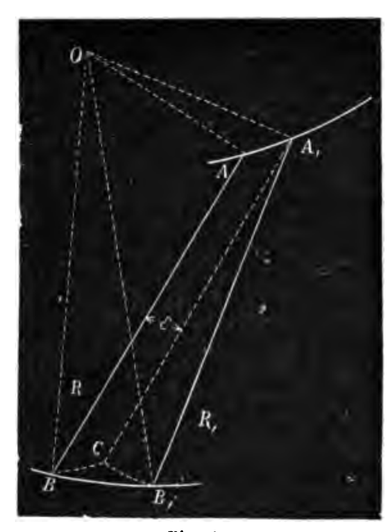


Fig. 1.

l la longueur constante de la droite AB;

u l'angle de cette droite avec une direction fixe quelconque.

Prenons un point fixe quelconque O sur le plan, et joignons OA, OB, OA_1, OB_1. Menons A_1C égale et parallèle à AB; joignons aussi BC, CB_1; appelons enfin σ l'aire du triangle OAB, et ε la distance des deux droites parallèles AB, A_1C.

Nous avons évidemment

$$OBB_1 + OA_1B_1 = OAA_1 + AA_1CB + A_1B_1C + OAB + BCB_1,$$
$$OBB_1 - OAA_1 = AA_1CB + A_1B_1C - (OA_1B_1 - OAB) + BCB_1.$$

Mais il est aisé de reconnaître que BCB_1 est un infiniment petit d'ordre supérieur au premier; de sorte que ce terme peut être effacé de l'équation précédente, laquelle devient

$$(1) \qquad d\beta - d\alpha = l\varepsilon + \tfrac{1}{2} l^2 du - d\sigma,$$

en vertu des notations précédentes.

Si nous intégrons, en désignant par $\int \varepsilon$ la somme de toutes les distances infiniment petites ε, il vient

$$\beta - \alpha = l.\int \varepsilon + \pi l^2,$$

car $\int du = 2\pi$, en vertu de l'hypothèse d'après laquelle la droite a fait un tour entier, et $\int d\sigma = 0$, puisque la droite revient finalement à sa position primitive.

Maintenant, pour déterminer $\int \varepsilon$, supposons que la droite AB soit une tige rigide, et que sur cette tige comme axe, en un point quelconque, on ait monté une roulette R, qui glisse sur un plan rigide parallèle à celui du déplacement de la droite AB. Lorsque cette droite glissera dans le sens de sa longueur, la roulette nè tournera pas. Si la droite se transporte, au contraire, parallèlement à elle-même, la roulette tournera, et l'arc décrit par un point quelconque de sa circonférence sera égal au déplacement normal de la droite AB. Enfin, si la droite tourne autour d'une de ses extrémités, le déplacement d'un point de la circonférence de la roulette sera égal à l'arc décrit par le point R de la droite, sur lequel tombe le centre de la roulette.

Si donc nous appelons p la longueur AR, D le déplacement total d'un point de la circonférence de la roulette à la fin du mouvement, nous avons

$$d.D = \varepsilon + p.du,$$

d'où

$$D = \int \varepsilon + 2\pi p, \qquad \int \varepsilon = D - 2\pi p,$$

et par conséquent

(2) $$\beta - \alpha = lD + \pi(l^2 - 2lp).$$

Ainsi, la différence des aires des deux courbes fermées (A) et (B), diminuée d'une quantité constante $\pi(l^2 - 2lp)$, est égale au produit de la longueur de la droite par le développement de la roulette.

Si, en particulier, la roulette a été placée à moitié de la longueur de la droite, $l = 2p$, et il reste simplement

$$\beta - \alpha = lD.$$

Remarque. — Nous avons dû supposer un cas particulier pour faire la figure sur laquelle reposent les raisonnements qui précèdent; mais le lecteur se convaincra sans peine que les conclusions ci-dessus subsistent dans toute leur généralité, quelle que soit la disposition des diverses parties de la figure, pourvu qu'on ait égard aux conventions habituelles sur les signes des angles et des aires.

3. Passons maintenant au second cas : celui où la droite revient à sa position première après une sorte d'oscillation entre deux directions limites.

La même figure nous servira, et nous aurons encore l'équation (1). Mais en l'intégrant, à cause de $\int du = 0$, il restera simplement

$$\beta - \alpha = l \int \varepsilon.$$

D'ailleurs, $d.D = \varepsilon + p.du$, comme ci-dessus, d'où, par intégration,

$$D = \int \varepsilon.$$

Donc

(3) $$\beta - \alpha = lD.$$

Dans tous les cas, le développement total de la roulette R nous permet, on le voit, d'évaluer la différence des aires fermées décrites par les deux extrémités de la droite mobile.

4. Si la ligne fermée parcourue par l'extrémité A vient à s'aplatir progressivement jusqu'à se réduire à un arc de courbe, alors $\alpha = 0$, et il vient, dans le premier cas,

$$\beta = l\text{D} + \pi(l^2 - 2lp), \tag{4}$$

et dans le second,

$$\beta = l\text{D}. \tag{5}$$

5. La théorie précédente est principalement fondée sur la considération des infiniment petits ε et $d.\text{D}$, liés entre eux comme on vient de le voir; ε pourrait être appelé *déplacement normal élémentaire de l'extrémité* A, et $d.\text{D}$ *déplacement normal élémentaire du point quelconque* R de la droite.

Il est visible que $d.\text{D}$ se réduit à ε lorsque R vient en A; au contraire, lorsque R coïncide avec B, $d\text{D} = \varepsilon + l.du$.

Dans le second cas, le développement D est indépendant de la position du point R sur la droite. Ainsi, le déplacement normal total est le même pour tous les points d'une droite qui revient à sa position première sans avoir fait un tour complet.

Dans le même cas, $\beta - \alpha = l.\text{D}$; on aurait de même $\beta' - \alpha = l'\text{D}$, et $\frac{\beta - \alpha}{l} = \frac{\beta' - \alpha}{l'}$; donc les différences des aires décrites par deux points quelconques de la droite mobile sont proportionnelles à la distance qui sépare ces deux points. — Si L, M, N sont trois points équidistants sur la droite, décrivant des courbes fermées d'aires λ, μ, ν, on aura $\mu = \frac{\lambda + \nu}{2}$; etc....

Mais nous ne voulons pas pousser plus avant ces considérations exclusivement théoriques; nous avons tenu à indiquer simplement quelques conséquences de l'ingénieuse conception servant de base à la théorie du planimètre polaire de M. Amsler.

Description et pratique de l'Instrument.'

6. L'appareil pratique connu sous le nom de planimètre polaire n'est que la réalisation matérielle de la figure 1, précédemment étudiée, dans le cas particulier où la courbe (A) est une circonférence. On conçoit qu'on pourrait aussi bien prendre théoriquement pour directrice d'une des extrémités de la tige mobile une ligne quelconque; mais la disposition consistant à lui faire parcourir une circonférence est assurément la plus simple et la plus pratique.

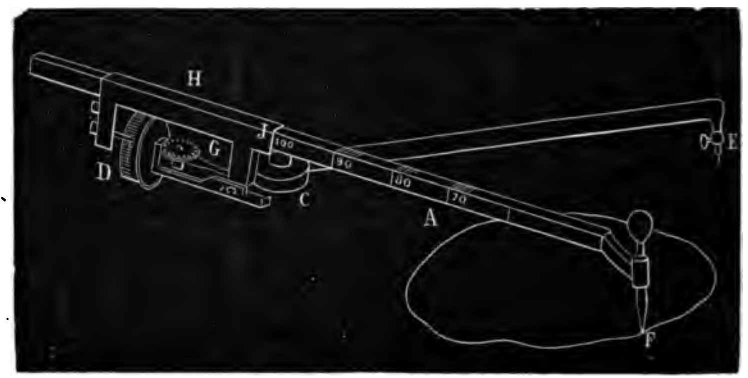


Fig. 2.

Il suffit de jeter les yeux sur la figure 2 (perspective) et sur la légende suivante pour se rendre compte du rôle de chacune des parties composant l'appareil.

E Pointe que l'on fixe dans le plan de la courbe à mesurer; c'est le centre de rotation de l'appareil.

C Articulation réunissant les deux branches A et B.

A Branche mobile dans une gaîne H et portant à une extrémité le style ou traçoir F, avec lequel on parcourt la courbe.

La distance comprise entre la pointe du style et l'axe de rotation C est variable, et correspond à diverses valeurs de la quantité précédemment désignée par l.

D Roulette divisée en 100 parties; un vernier permet de lire le dixième de division.

G Compteur indiquant le nombre de tours de la roulette D.

J Arête intérieure de la gaîne H; on la fait coïncider avec une des divisions de la tige A. Ces divisions correspondent à 100 millimètres carrés, 90 millimètres carrés, etc., pour une division de la roulette mobile.

En regard de ces traits, sur la surface supérieure, on lit des nombres qui correspondent à la constante à ajouter à l'indication de la roulette dans le cas du n° 2, c'est-à-dire lorsque le pivot est intérieur à la courbe décrite, et que la branche EC décrit une révolution complète autour de E. Cette constante (équat. 2) est $\alpha + \pi(l^2 - 2lp)$, ou $\pi(a^2 + l^2 - 2lp)$ si l'on fait $EC = a$, car alors $\alpha = \pi a^2$. Nous renvoyons d'ailleurs aux numéros précédents pour l'interprétation de l et p.

Le mouvement exécuté par la roulette s'apprécie par une différence de lectures; on ne ramène pas la première à un zéro; cela introduirait plus de difficultés et de complications que la simple soustraction qu'il y a lieu d'effectuer.

7. Pour donner une idée de l'emploi du planimètre polaire, nous ne pouvons mieux faire que de reproduire deux exemples numériques donnés par M. le lieutenant-colonel Peaucellier, et répondant respectivement aux cas des n°s 3 et 2 ci-dessus.

1er Exemple (cas du n° 3; c'est celui de la figure 2). — Le style étant placé sur la courbe, en un point pris comme origine, on lit sur le compteur G le nombre 2, et le zéro du vernier correspond à 91,5; l'*état du planimètre* est 291,5. Après avoir parcouru la courbe avec le style de manière à revenir à l'origine, on lit sur le compteur 5 et au zéro du vernier 58,9, ce qui donne 558,9. La différence 558,9 — 291,5 = 267,4; et multipliant ce nombre par 100 millimètres carrés, qui correspondent au trait vertical placé en regard de l'arête J, on a 26740 millimètres carrés pour la surface cherchée.

2e Exemple (cas du n° 2). — L'état du planimètre est 318,2 à l'origine, et 743,8 une fois la courbe parcourue. On lit sur la face supérieure de la tige A, en regard de l'arête J, le nombre 1912,6. Formant alors le nombre

$$1912,6 + 743,8 - 318,2 = 2338,2,$$

et multipliant par 100, on a 233820 millimètres carrés.

8. Le degré d'exactitude du planimètre polaire est plus que suffisant pour les besoins ordinaires de la pratique. Sans entrer dans aucun détail à ce sujet, nous nous contenterons de citer l'expérience faite par M. le lieutenant-colonel Peaucellier dans les conditions suivantes. Un quart de cercle de 10 centimètres de rayon a été divisé en 10 segments par des ordonnées parallèles. En appliquant à cette figure les méthodes de quadrature les plus usitées, concurremment avec le planimètre, mettant la branche mobile de celui-ci à son maximum de longueur, c'est-à-dire dans les conditions d'exactitude les moins favorables, et mesurant 20 fois la surface en déplaçant le pivot à chaque épreuve, on a trouvé les résultats suivants :

	Surfaces.	Erreurs.
Méthode de la moyenne des hauteurs	75,101	3,439
— des cordes	77,611	0,919
— de Thomas Simpson	78,173	0,367
— des tangentes	78,809	0,269
— du général Poncelet	78,403	0,137
— du général Poncelet, perfectionnée par le commandant Parmentier	78,763	0,223
Indication moyenne du planimètre	78,655	0,115
Mesure exacte	78,540	0,000

9. Ce qui précède suffit pour faire apprécier toute la valeur pratique du planimètre polaire de M. Amsler. C'est un appareil simple, d'un petit volume, et qui n'exige, on vient de le voir, aucun apprentissage. Il réalise enfin des conditions d'économie qui le rendent certainement supérieur aux instruments très compliqués connus sous le nom de *planimètre sommateur* et de *planimètre à cône*, le premier dû à M. Beuvière et le second à MM. Oppikoffer et Ernst. Ces divers instruments se construisent chez M. Secretan, à Paris. Le planimètre sommateur est du prix de 325 francs; celui à cône, de 425 francs, et le planimètre polaire, de 50 francs seulement. On voit que ce dernier est le seul instrument dont l'emploi ait chance de se généraliser.

Applications.

10. Nous allons maintenant passer rapidement en revue quelques-unes des applications auxquelles peut être employé le plani-

mètre polaire de M. Amsler. Le lecteur voudra bien nous permettre de passer très brièvement, dans ce qui va suivre, sur les notions générales, relatives aux courbes planes, dont nous aurons peut être occasion de nous servir, et qu'on trouve dans tous les traités de géométrie analytique ou de calcul infinitésimal.

11. *Addition et soustraction d'aires planes.* — Si l'on veut ajouter entre elles deux aires ABC = S, DEF = S', cela pourra se faire par une seule opération du planimètre. Réunissons, en effet, les deux contours par une ligne auxiliaire AD quelconque, et suivons le parcours ABCADEFDA. Il est clair que les indications de la roulette répondant aux parcours AD et DA se sont détruites, de sorte que l'indication définitive répond à ABCA + DEFD, et nous donne S + S'.

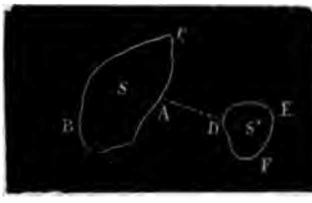


Fig. 3.

Il est évident qu'en parcourant, au contraire, l'une des courbes S' dans le sens rétrograde, et suivant par exemple ABCADFEDA, l'indication définitive de l'instrument donnera S — S'.

Ceci peut s'appliquer à la somme algébrique d'un nombre quelconque d'aires. Seulement, il importe de ne pas oublier d'ajouter toujours la constante, dans le cas du n° 2, autant de fois que cela peut être nécessaire.

Si, par exemple (*fig.* 4), nous voulons évaluer

$$S - S' + S'' - S''' + S^{iv},$$

nous suivrons le contour indiqué par les flèches, suivant

$$A\,a\,B\,b\,A\,A'\,a'\,B'\,A''\,a''\,B''\,A'''\,a'''\,B'''\,A^{iv}\,b^{iv}\,B^{iv}\,a^{iv}\,A^{iv}\,B'''\,b'''\,A'''\,B''\,b''\,A''\,B'\,b'\,A'\,A,$$

et les parties (AA', A'A), (B'A'', A''B')... se détrui-



Fig. 4.

sant, l'indication du planimètre fournira la somme algébrique demandée.

12. *Cubatures.* — Si l'on connaît un certain nombre de sections faites dans un solide de forme quelconque par des plans parallèles assez rapprochés, on peut déterminer le volume compris entre les sections extrêmes, en remplaçant les ordonnées par les aires de ces sections planes, dans l'une quelconque des formules connues de quadrature. Ainsi, par exemple, la formule du général Poncelet donnera

$$V = h\left[(S_1 + S_3 + \cdots + S_{2n-1}) + \frac{S_0 + S_{2n}}{4} - \frac{S_1 + S_{2n-1}}{4}\right],$$

et l'on voit avec quelle facilité le planimètre donnera la quantité entre crochets, puisque deux opérations suffiront, l'une donnant $S_1 + S_3 + \ldots S_{2n-1}$, et l'autre $\frac{S_0 + S_{2n} - S_1 - S_{2n-1}}{4}$.

Il en sera de même pour les autres formules de cubatures; il nous suffit d'en avoir pris une seule comme exemple.

Ce procédé de cubature, quelle que soit d'ailleurs la formule employée, est particulièrement avantageux lorsqu'il s'agit d'un corps représenté par des courbes de niveau équidistantes sur un plan coté.

13. *Sommes algébriques de produits de deux facteurs.* — Toute expression de la forme $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$ représente le double de la somme des aires des triangles ayant respectivement $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour bases, et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pour hauteurs. Si donc on construit deux axes coordonnés rectangulaires OX, OY, si l'on porte $OX_1 = x_1, \ldots, OY_1 = y_1, \ldots$ en grandeurs et en signes, de manière à former les triangles rectangles $OY_1X_1, \ldots$, et enfin si l'on parcourt avec le style le périmètre $OY_1X_1OY_2 \ldots Y_nX_nO$, le double du résultat fourni par le planimètre sera le produit demandé.

14. *Aire d'un polygone défini par ses sommets.* — Si x_1y_1,

$x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ sont les coordonnées respectives des n sommets d'un polygone plan, l'aire de celui-ci a pour expression $x_1 y_2 - y_1 x_2 + x_2 y_3 - y_2 x_3 + \ldots + x_n y_1 - y_n x_1$. En appliquant ce qui vient d'être dit (nº 13) à cette somme algébrique, nous voyons que le planimètre donnera l'aire du polygone en question, *sans qu'il soit nécessaire de construire celui-ci.*

15. *Centre de gravité d'une ligne plane.* — Soit A_0A_1 un arc d'une courbe plane, rapporté à deux axes rectangulaires OX, OY. Construisons en chaque point M la normale MN à la courbe, et portons sur l'ordonnée

$$MM' = MN.$$

Nous construirons ainsi point par point une courbe correspondante $A'_0A'_1$, s'obtenant très simplement, comme l'on voit.

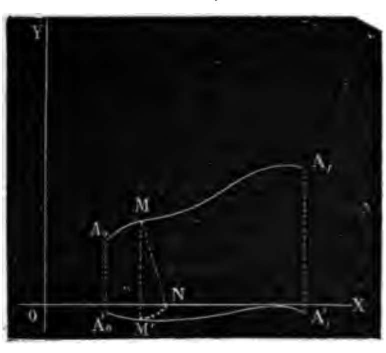


Fig. 5.

Ceci fait, soit $\bar{y}$ l'ordonnée du centre de gravité de l'arc A_0A_1 et s la longueur de cet arc. On a

$$\bar{y} = \frac{1}{s}\int_0^s y\,ds = \frac{1}{s}\int_{x_0}^{x_1} y\,\frac{ds}{dx}\cdot dx = \frac{1}{s}\cdot\int_{x_0}^{x_1} MM'dx,$$

ou

$$\bar{y} = \frac{1}{s} \times \text{aire } A_0A_1A'_1A'_0A_0.$$

Donc, en parcourant ce contour avec le style du planimètre, on obtiendra un nombre qui, divisé par la longueur de l'arc A_0A_1, fournira l'ordonnée $\bar{y}$ cherchée.

En répétant la même construction par rapport à OY, on aura l'abcisse $\bar{x}$ du centre de gravité.

Mais il y a plus, et nous pouvons avoir ce point même sans connaître la longueur $s = A_0A_1$. En effet, si $A''_0A''_1$ est la courbe correspondant à $A'_0A'_1$ par rapport à OY, il vient

$$\frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \frac{\text{aire } A_0A_1A'_1A'_0A_0}{\text{aire } A_0A''_0A''_1A_1A_0}.$$

On pourra donc déterminer une droite OL issue de l'origine et contenant le centre de gravité cherché; prenant maintenant un second système d'axes et renouvelant les mêmes opérations, nous déterminerons une seconde droite O'L' issue de la nouvelle origine O'; tout cela, indépendamment de la connaissance de la longueur A_0A_1. Le centre de gravité demandé sera l'intersection de OL et O'L'.

16. *Centre de gravité d'une aire plane.* — Soit une aire plane limitée par exemple de tous côtés par une courbe fermée (*fig.* 6). Rapportons cette courbe, comme ci-dessus, à deux axes coordonnés rectangulaires. Menons la droite AB parallèle à l'axe des x à la distance quelconque $OA = a$ au-dessous de cet axe. Puis, M étant un point quelconque de la courbe, traçons l'ordonnée MPB, prenons $PQ = PM$, et élevons QM' perpendiculaire à BQ jusqu'à la rencontre de PM. Nous aurons ainsi point par point une courbe (M') déduite de la courbe (M) par une construction assez simple.

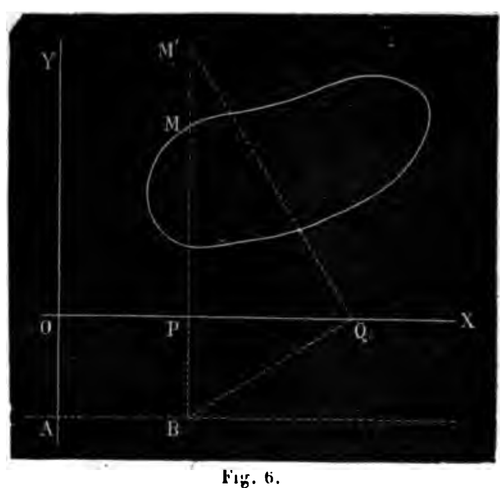


Fig. 6.

Or, $\bar{y}$ étant ici l'ordonnée du centre de gravité de l'aire (M), nous avons, en donnant au signe $\int$ des limites convenables,

$$\bar{y}\int y\,dx = \int y^2 dx = a\int \frac{y^2}{a}\,dx,$$

c'est-à-dire $\bar{y} \times$ aire (M) $= a \times$ aire (M'),

$$\bar{y} = a\,\frac{\text{aire (M')}}{\text{aire (M)}}.$$

Le planimètre nous donne donc tous les éléments nécessaires

pour calculer l'ordonnée $\bar{y}$ par une simple règle de trois. On déterminerait de même l'abcisse $\bar{x}$.

Comme précédemment, on verrait qu'on peut se passer de la connaissance de l'aire (M); mais cela n'offre plus ici le moindre intérêt, puisque cette aire est immédiatement fournie par l'instrument.

17. Si l'on essaie de déterminer par approximation le centre de gravité d'un volume, et spécialement d'un volume représenté par des courbes de niveau équidistantes, en le décomposant en tranches assimilables à des cylindres, on s'aperçoit encore que l'emploi du planimètre polaire se trouve tout indiqué et qu'il facilite notablement les calculs. Mais il est inutile de pousser plus loin ces développements. Les exemples que nous avons reproduits suffiront à montrer toute l'étendue des applications possibles du planimètre de M. Amsler.

Ce planimètre, en somme, est un *intégrateur* mécanique, puisqu'il donne une aire plane, ce qui revient à calculer une certaine intégrale $\int y dx$. Je dois à l'obligeance de M. le lieutenant-colonel Peaucellier de connaître l'existence de nouveaux appareils imaginés par M. Amsler, et donnant *mécaniquement* les intégrales $\int y^2 dx, \int y^3 dx$. Le premier serait un véritable *gravimètre*, c'est-à-dtre servirait à la détermination du centre de gravité, et le second serait propre à mesurer le *moment d'inertie* d'une aire plane.

Un appareil résolvant une question plus générale et fournissant $\int y^n dx$ aurait même encore été inventé depuis. Malheureusement je n'ai aucun détail sur ces divers instruments, qui sont autant d'extensions successives du planimètre polaire. Si j'arrive à me procurer quelques renseignements à ce sujet, j'en pourrai faire plus tard l'objet d'une nouvelle communication à la Société des Sciences physiques et naturelles, dans le cas où celle-ci considérerait ce travail comme intéressant.

Remarque finale. — Parmi les personnes qui ont cherché à

résoudre ainsi certaines questions d'analyse par des procédés mécaniques, il y a lieu de citer surtout M. Marcel Deprez. Ses *intégrateurs* et ses *appareils à résoudre les équations* méritent au plus haut degré de fixer l'attention des mathématiciens.

THÉORÈMES SUR LES NOMBRES PREMIERS

PAR C.-A. LAISANT

Capitaine du Génie, ancien élève de l'École Polytechnique.

Soit P un nombre premier différent de 2, et qui soit décomposé d'une manière quelconque en une partie paire p et une partie impaire i. On aura les deux théorèmes suivants :

I. — *Le produit $p^p \times i^i$ est égal à un multiple de* P *augmenté de i.*

II. — *Le produit $p^i \times i^p$ est égal à un multiple de* P *augmenté de p.*

Voici les démonstrations bien simples de ces deux propriétés, qui n'ont pas été remarquées jusqu'à présent, à ma connaissance :

I. — On a $P = p + i$. Donc

$$\begin{aligned} p^p \times i^i &= (P - i)^{P-i} \times i^i \\ &= (m.P + i^{P-i}) \times i^i \\ &= m.P + i^{P-i+i} = m.P + i^P. \end{aligned}$$

Mais, d'après le théorème de Fermat,

$$i^{P-1} = m.P + 1,$$

d'où, multipliant par i,

$$i^P = m.P + i,$$

et

$$p^p \times i^i = m.P + i.$$

II. —

$$\begin{aligned} p^i \times i^p &= p^i \times (P - p)^p \\ &= p^i \times (m.P + p^p) \\ &= m.P + p^{i+p} = m.P + p^P \\ &= m.P + p, \end{aligned}$$

puisque $p^{P-1} = m.P + 1$; d'où $p^P = m.P + p$.

THÉORÈMES SUR LES NOMBRES

PAR C.-A. LAISANT

Capitaine du Génie, ancien élève de l'École Polytechnique.

Je rappellerai tout d'abord la définition suivante :

Définition. — p étant un nombre premier et a un entier quelconque inférieur à p, on dit que *a appartient à l'exposant n*, par rapport au module p, lorsque $a^n - 1$ est un multiple de p sans qu'aucune valeur inférieure à n satisfasse à cette relation.

Si $n = p - 1$, a est une *racine primitive* de p.

THÉORÈME I. — *Si un nombre a appartient à l'exposant 3 par rapport au module premier p, le nombre $a + 1$ appartiendra à l'exposant 6.*

On a, en effet, $a^3 - 1 = m.p$.

Or,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} (a+1)^6 - 1 &= [(a+1)^3 - 1](a+2)(a^2+a+1) \\ &= \frac{[(a+1)^3 - 1)](a+2)(a^3-1)}{a-1}. \end{aligned} \right.$$

Donc $(a+1)^6 - 1 = m.p$, à cause du facteur $a^3 - 1$, le dénominateur ne pouvant renfermer p, qui lui est supérieur.

D'ailleurs, pour que $a+1$ n'appartînt pas à l'exposant 6, il faudrait, comme on le voit aisément, qu'on eût soit $(a+1)^3 - 1 = m.p$, soit $(a+1)^2 - 1 = m.p$.

Mais

$$(a+1)^3 - 1 = a^3 - 1 + 3a^2 + 3a + 3 - 2$$
$$= a^3 - 1 + \frac{3(a^3-1)}{a-1} - 2 = m.p - 2,$$
$$(a+1)^2 - 1 = a^2 + 2a = \frac{a^3-1}{a-1} + a - 1 = m.p + a - 1.$$

Donc $a + 1$ appartient bien à l'exposant 6.

THÉORÈME II. — *Réciproquement, si un nombre* $a + 1$ *appartient à l'exposant* 6, *le nombre* a *appartiendra nécessairement à l'exposant* 3.

Cela se conclut presque immédiatement de l'identité (1) ci-dessus; car $(a+1)^2 - 1$ ne saurait contenir le facteur p, puisque $a+1$ appartient à l'exposant 6, et il en est de même de $a+2$, car $a+2 = m.p = p$ donnerait $a+1 = p-1$, de sorte que $a+1$ appartiendrait à l'exposant 2.

Donc $a^3 - 1 = m.p$, et cela suffit à prouver que a appartient à l'exposant 3, comme on le voit sans peine.

THÉORÈME III. — *Si* a *appartient à l'exposant* 6, $a+1$ *n'appartiendra jamais à l'exposant* 3, *à moins qu'on n'ait* $p = 7$, $a = 3$, $a+1 = 4$.

Soit, en effet,

$$a^6 - 1 = m.p, \quad (a+1)^3 - 1 = m.p,$$

ou

$$(a^3-1)(a+1)(a^2-a+1) = mp, \quad a(a^2+3a+3) = mp.$$

Il résulte de là qu'on a

$$a^2 - a + 1 = m.p, \quad a^2 + 3a + 3 = m.p,$$

et, par soustraction,

$$4a + 2 = mp, \quad 2a + 1 = mp.$$

Or, comme $a < p$, on ne peut avoir que $a = \frac{p-1}{2}$.

Donc

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right) + 1 = m.p,$$

$$(p^2 - 2p + 1) - 2(p-1) + 4 = m.p,$$

d'où $7 = m.p = p$, puisque p est premier.

Alors $a = \frac{p-1}{2} = 3$.

Je ne sais si cette propriété caractéristique du module 7 a jamais été remarquée jusqu'à présent. Elle est assez curieuse, et je ne l'ai rencontrée nulle part.

Corollaire. — p étant un nombre premier de la forme $m.6+1$, il y a deux nombres a et b appartenant à l'exposant 3 par rapport au module p, et deux nombres $a+1$ et $b+1$ appartenant au module 6. La somme $a+b$ est égale à $p-1$, et par suite celle des quatre nombres est $2p$.

SUR

UN PROBLÈME D'ARITHMÉTIQUE

PAR C.-A. LAISANT

Capitaine du Génie, ancien élève de l'École Polytechnique.

A la fin du tome III des *Annales de Gergonne* (année 1812-1813) on trouve l'énoncé suivant :

« *Étant donné le produit de la multiplication d'un nombre de » plusieurs chiffres par le nombre qu'on déduit de celui-là, en » écrivant ses chiffres dans un ordre inverse, déterminer l'un ou » l'autre des deux facteurs de ce produit.* »

Je me rappelle avoir lu jadis, dans l'un des tomes suivants, une solution fort longue et assez pénible de ce problème. Je ne l'ai pas en ce moment sous les yeux, et il me serait, je crois, impossible de consulter actuellement la collection des *Annales de Gergonne*. Dans tous les cas, la question me semble assez originale, et la solution dont je parle est assez peu répandue, pour qu'il puisse être intéressant de rechercher un moyen *pratique*, permettant d'obtenir les deux facteurs du produit. C'est ce que je me propose de faire dans cette note.

Je supposerai d'abord que ni l'un ni l'autre des deux facteurs cherchés ne soit terminé par un zéro; et pour exposer plus aisément la méthode, je prendrai un exemple numérique.

Soit 69156493 le produit donné. Il sera facile de déterminer le nombre des chiffres de l'un ou l'autre des facteurs. En effet, deux nombres de deux chiffres donnent un produit compris entre 10^2 et 10^4; deux nombres de trois chiffres, un produit compris entre 10^4 et 10^6; et ainsi de suite; de sorte qu'on peut formuler cette règle : *le nombre des chiffres de chacun des facteurs est*

égal au nombre des tranches de deux chiffres (une tranche extrême pouvant n'en présenter qu'un seul) en lesquelles est décomposable le nombre donné.

Le produit donné étant compris entre 10^6 et 10^8, chacun des facteurs aura quatre chiffres. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ces chiffres inconnus. L'un des facteurs sera

$$\alpha_1.10^3 + \alpha_2.10^2 + \alpha_3.10 + \alpha_4,$$

et l'autre

$$\alpha_4.10^3 + \alpha_3.10^2 + \alpha_2.10 + \alpha_1;$$

si bien que leur produit donnera

$$\alpha_1\alpha_4.10^6 + \left.\begin{array}{r}\alpha_4\alpha_3\\ +\alpha_2\alpha_4\end{array}\right| 10^5 + \left.\begin{array}{r}\alpha_1\alpha_2\\ +\alpha_2\alpha_3\\ +\alpha_3\alpha_4\end{array}\right| 10^4 + \left.\begin{array}{r}\alpha_1^2\\ +\alpha_2^2\\ +\alpha_3^2\\ +\alpha_4\end{array}\right| 10^3 + \left.\begin{array}{r}\alpha_1\alpha_2\\ +\alpha_2\alpha_3\\ +\alpha_3\alpha_4\end{array}\right| 10^2 + \left.\begin{array}{r}\alpha_1\alpha_3\\ +\alpha_2\alpha_4\end{array}\right| 10 + \alpha_1\alpha_4 = 69156493.$$

Le chiffre des unités étant 3, et α_1, α_4, étant des facteurs d'un chiffre seulement, on ne peut avoir que $\alpha_1\alpha_4 = 3$, ou bien $\alpha_1\alpha_4 = 63$. Mais le produit contenant 69 fois 10^6, nulle hésitation n'est possible, et la solution est évidemment $\alpha_1\alpha_4 = 63$. Si nous retranchons 63, et 63.10^6 du produit donné, de la manière suivante :

$$\begin{array}{r}69156493\\ 63\quad\;\; 63\\ \hline 6156430\end{array}$$

et si nous divisons par 10, il viendra donc

$$\left.\begin{array}{r}\alpha_1\alpha_3\\ +\alpha_2\alpha_4\end{array}\right| 10^4 + \left.\begin{array}{r}\alpha_1\alpha_2\\ +\alpha_2\alpha_3\\ +\alpha_3\alpha_4\end{array}\right| 10^3 + \left.\begin{array}{r}\alpha_1^2\\ +\alpha_2^2\\ +\alpha_3^2\\ +\alpha_4^2\end{array}\right| 10^2 + \left.\begin{array}{r}\alpha_1\alpha_2\\ +\alpha_2\alpha_3\\ +\alpha_3\alpha_4\end{array}\right| 10 + \left.\begin{array}{r}\alpha_1\alpha_3\\ +\alpha_2\alpha_4\end{array}\right. = 615643$$

615643 renferme 61.10^4, et $\alpha_1\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4$ est terminé par un 3. Donc $\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 = 53$, ou 43, ou 33, etc. Essayons 53, et opé-

rons comme ci-dessus, en retranchant 53.10^4 et 53 de 615643

$$\begin{array}{r} 615643 \\ 53\ \ 53 \\ \hline 85590 \end{array}$$

il viendra

$$\begin{array}{l|l|l} \alpha_1\alpha_2 & 10^2+\alpha_1^2 & 10+\alpha_1\alpha_2 = 8559 \\ +\alpha_2\alpha_3 & \quad +\alpha_2^2 & \quad +\alpha_2\alpha_3 \\ +\alpha_3\alpha_4 & \quad +\alpha_3^2 & \quad +\alpha_3\alpha_4 \\ & \quad +\alpha_4^2 & \end{array}$$

On voit, comme ci-dessus, que $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 = 79$, ou 69, ou 59, etc. Il est assez improbable que les centaines contenues dans le terme $(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2)\ 10$ ne surpassent pas 6, de sorte que nous sommes conduit à essayer 69, de la manière suivante :

$$\begin{array}{r} 8559 \\ 6969 \\ \hline 1590 \end{array}$$

ce qui donne

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 = 159.$$

En résumé, nous obtenons, en récapitulant :

$$\begin{aligned} \alpha_1\alpha_4 &= 63 \\ \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 &= 53 \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 &= 69 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 &= 159. \end{aligned}$$

Il reste à nous assurer de la réalité des hypothèses faites par nous; c'est-à-dire qu'il faut voir si ce système admet comme solution des valeurs entières pour $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Par les procédés habituels, ce ne serait pas bien difficile. Mais certaines remarques permettent de voir assez rapidement, avec une presque certitude, si les essais sont bons. Multipliant en effet les trois premières équations par 2, et ajoutant avec la quatrième, il vient

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)^2 = 529 = 23^2.$$

Si 529 n'était pas un carré parfait, il est clair que quelqu'une des hypothèses faites serait vicieuse.

Ici, la solution est maintenant très-simple à obtenir, car on a

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 23;$$

or $\alpha_1 \alpha_4 = 63$ ne peut donner que 7 et 9 pour α_1 et α_4. Soit $\alpha_1 = 7, \alpha_4 = 9$. Il reste alors

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 7,$$

avec

$$7\alpha_3 + 9\alpha_2 = 53;$$

d'où $\alpha_2 = 2, \alpha_3 = 5$, et les deux nombres cherchés sont 7259 et 9527.

Souvent, d'ailleurs, on pourra, en s'aidant de l'analyse indéterminée, contrôler au fur et à mesure dans une certaine limite, les essais faits successivement. On se servira pour cela des deux chiffres extrêmes, lesquels sont presque toujours connus dès l'abord.

Disons quelques mots à présent du cas où l'un des facteurs est terminé par un ou plusieurs zéros. Les deux facteurs, alors, n'ont plus, à proprement parler, le même nombre de chiffres. Ainsi $2400 \times 0042 = 100800$. L'un des facteurs est de quatre chiffres et l'autre de deux, de sorte qu'il n'est plus possible de déterminer avec certitude le nombre de chiffres de chacun des facteurs, à la seule inspection du produit. Ce cas ne peut se présenter que lorsqu'il y a un ou plusieurs zéros à la droite du produit donné. Mais alors même, on arrive assez vite à déterminer les chiffres des facteurs sans trop de tâtonnements.

Pour le produit 100800 ci-dessus, par exemple, si aucun facteur n'était terminé par des zéros, il y aurait trois chiffres à chacun d'eux. Par suite, il faudrait, puisque 100800 contient 10.10^4 qu'on eût 2 et 5 pour les chiffres extrêmes, et en suivant la marche ci-dessus indiquée, on reconnaît immédiatement que c'est une hypothèse inadmissible. On peut alors supprimer un zéro, et partir de 10080; l'impossibilité est encore ici plus

manifeste. On opère alors sur 1008 qu'on reconnaît être égal à 24×42, en sorte que

$$100800 = 2400 \times 0042 = 4200 \times 0024.$$

A ce point de vue, on peut dire qu'il y a deux solutions, lorsque l'un des facteurs est terminé par un ou plusieurs zéros.

Remarques additionnelles.

Les observations suivantes peuvent être d'un assez grand secours dans la solution de chaque cas particulier du problème qui nous occupe.

I. — L'un des facteurs étant de la forme $m.9 + r$, l'autre sera aussi de la forme $m.9 + r$, de sorte que le produit devra être de la forme $m.9 + r^2$, c'est-à-dire $m.9$, ou $m.9 + 1$, ou $m.9 + 4$, ou $m.9 + 7$. Toute forme étrangère à celles-là permet donc de reconnaître l'impossibilité du problème.

Un produit de la forme $m.9$ peut provenir de deux facteurs ayant chacun la forme $m.9$, ou $m.9 + 3$, ou $m.9 + 6$, et le premier cas donne un produit de la forme $m.81$.

Un produit de la forme $m.9 + 1$ provient de deux facteurs ayant chacun la forme $m.9 + 1$, ou $m.9 + 8$.

Un produit de la forme $m.9 + 4$ provient de deux facteurs ayant chacun la forme $m.9 + 2$, ou $m.9 + 7$.

Un produit de la forme $m.9 + 7$ provient de deux facteurs ayant chacun la forme $m.9 + 4$, ou $m.9 + 5$.

II. — Le nombre des chiffres de chaque facteur étant impair, et l'un des facteurs étant d'une des formes

$$m.11 + 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,$$

l'autre sera, respectivement, de la même forme, et le produit donnera

$$m.11 + 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 5,\ 3,\ 3,\ 5,\ 9,\ 4,\ 1,$$

Si, au contraire, le nombre des chiffres de chaque facteur est pair, on aura respectivement pour les deux facteurs

$$m.11+0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,$$

et

$$m.11+0,\ 10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,$$

et pour le produit

$$m.11+0,\ 10,\ 7,\ 2,\ 6,\ 8,\ 8,\ 6,\ 2,\ 7,\ 10.$$

III. — Il est utile, pour le commencement de la solution de chaque cas particulier, d'avoir une table des produits de deux chiffres se terminant par un chiffre donné. On peut lui donner la forme suivante :

0	2.5=10, 4.5=20, 6.5=30, 8.5=40.
1	1.1=1, 3.7=21, 9.6=81.
2	1.2=2, 2.6=12, 3.4=12, 4.8=32, 6.7=42, 8.9=72.
3	1.3=3, 7.9=63.
4	1.4=4, 2.2=4, 2.7=14, 3.8=24, 4.6=24, 6.9=54, 8.8=64.
5	1.5=5, 3.5=15, 5.5=25, 7.5=35, 9.5=45.
6	1.6=6, 2.3=6, 2.8=16, 4.4=16, 4.9=36, 6.6=36, 7.8=56.
7	1.7=7, 3.9=27.
8	1.8=8, 2.4=8, 2.9=18, 3.6=18, 4.7=28, 6.8=48.
9	1.9=9, 3.3=9, 7.7=9.

L'inspection de ce tableau permettra le plus souvent de déterminer du premier coup les deux chiffres extrêmes des facteurs cherchés.

Exemples :

En dehors de l'exemple traité ci-dessus, nous allons succinctemenr examiner quelques cas présentant les particularités les plus remarquables qu'on puisse rencontrer, afin de donner une idée plus complète de la méthode exposée. La valeur de cette méthode réside surtout dans la pratique.

1° Le produit donné est 2286117351. Les facteurs sont de

5 chiffres chacun. On a 22.10^8, et 1 peut provenir de 1, 21 ou 81; ici 21 est indiqué

$$\begin{array}{c} 2286117351 \\ 21 \qquad\quad 21 \\ \hline 18611733 \\ 13 \qquad 13 \\ \hline 561172 \\ 52 \quad 52 \\ \hline 4112 \\ 3232 \\ \hline 88 \end{array}$$

Formant $88+2(32+52+13+21)=324=18^2$, nos hypothèses sont confirmées, et nous avons

$$\alpha_1\alpha_5=21, \quad \alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_5=13, \quad \alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_5=52,$$
$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5=18.$$

Nous tirons de là $\alpha_1=3$, $\alpha_5=7$, puis, très-aisément $\alpha_2=1$, $\alpha_3=5$, $\alpha_4=2$; si bien qu'en définitive

$$2286117351 = 31527 \times 72513.$$

2° Soit donné 1327900 comme produit. S'il n'y avait pas de zéro à la droite de l'un ou de l'autre facteur, chacun de ceux-ci aurait 4 chiffres. Comme le produit ne contient qu'une fois 10^6, on voit que c'est impossible. Considérons donc 132790, et admettons qu'il n'y ait pas de zéro à la droite des facteurs. Alors ceux-ci sont de trois chiffres, et le calcul se dispose ainsi

$$\begin{array}{c} 132790 \\ 10 \quad 10 \\ \hline 3278 \\ 2828 \\ \hline 45 \end{array}$$

$45 + 2(23 + 10) = 121 = 11^2$. Les trois chiffres sont par suite 2, 4, 5, et

$$1327900 = 2450 \times 0542 = 5420 \times 0245.$$

3° Soit donné 352170. Supposons l'absence de zéros à la droite des facteurs. Ceux-ci sont de trois chiffres, et l'on a

$$\begin{array}{c} 352170 \\ 30 \;.\; 30 \\ \hline 5214 \\ 4444 \\ \hline 77 \end{array}$$

$77 + 2(44 + 30) = 225 = 15^2$. Les trois chiffres sont 5, 4, 6, et

$$352170 = 546 \times 645.$$

4° Soit donné 270100. En supposant l'absence de zéros à la droite des facteurs, on est conduit au calcul suivant

$$\begin{array}{c} 270100 \\ 20 \quad 20 \\ \hline 7008 \\ 6868 \\ \hline 14 \end{array}$$

et l'on reconnaît bien vite que l'on ne saurait obtenir un carré parfait, même en modifiant un peu les hypothèses.

Prenant 27010, l'impossibilité est évidente.

Prenons donc 2701

$$\begin{array}{c} 2701 \\ 2121 \\ \hline 58 \end{array}$$

$58 + 2.21 = 100 = 10^2$. Les chiffres sont 3 et 7, et l'on a

$$270100 = 3700 \times 0073 = 7300 \times 0037.$$

5° Soit donné 3640000. On trouve très rapidement que 3640000, 364000, 36400 sont impossibles sans zéros à la droite des facteurs.

Et 3640 donne

$$\begin{array}{c} 3640 \\ 3030 \\ \hline 61 \end{array}$$

$61 + 2.30 = 121 = 11^2$; et l'on a

$$3640000 = 65000 \times 00056 = 56000 \times 00065.$$

6° Soit donné 2480011. Il y a quatre chiffres à chaque facteur

$$\begin{array}{c} 2480011 \\ 1 \quad\quad 1 \\ \hline 148001 \\ 11 \quad 11 \\ \hline 3799 \\ 2929 \\ \hline 87 \end{array}$$

$87 + 2(29 + 11 + 1) = 169 = 13^2$. Alors

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_4 = 1, \quad \alpha_2 + \alpha_3 = 11, \quad \alpha_2\alpha_3 = 18, \quad \alpha_2 = 2, \quad \alpha_3 = 9,$$

et

$$2480011 = 1291 \times 1921.$$

7° Soit donné 1208410812. Il y a cinq chiffres

$$\begin{array}{c} 1208410812 \\ 12 \quad\quad 12 \\ \hline 0841080 \\ 0 \quad\quad 0 \\ \hline 84108 \\ 8 \quad 8 \\ \hline 410 \\ 0\ 0 \\ \hline 41 \end{array}$$

$41 + 2(0 + 8 + 0 + 12) = 81 = 9^2$. Alors

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_5 = 6, \quad \alpha_4 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1,$$

et

$$1208410812 = 20106 \times 60102.$$

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE

DU

POTENTIEL ÉLECTRIQUE

PAR M. ABRIA

---

1. La théorie du potentiel électrique permet de résoudre facilement un grand nombre des questions qui se présentent dans l'étude de l'électricité. Elle permet de traduire en nombres les solutions de plusieurs problèmes, de ceux, par exemple, relatifs aux pressions exercées par les corps électrisés sur les milieux ambiants, à l'attraction ou à la répulsion de sphères chargées d'électricité d'espèces différentes ou identiques, aux effets mécaniques ou calorifiques produits par les décharges des batteries, etc. Cette théorie fait aujourd'hui partie de l'enseignement supérieur, il serait utile de l'introduire dans l'enseignement secondaire, dans celui du moins qui s'adresse aux élèves de mathématiques spéciales des lycées. Mais on ne peut, pour cette catégorie d'étudiants, suivre l'ordre d'idées qui a conduit à la notion du potentiel. Il faudrait commencer, en effet, par la définition du potentiel V relatif à un point donné, $V = \sum \frac{d\mu}{\rho}$, $d\mu$ représentant la quantité d'électricité qui se trouve sur un élément du corps électrisé et ρ la distance de cet élément au point considéré. Il faudrait démontrer de plus que les composantes de l'action exercée par la couche électrique sur le point sont les dérivées de V par rapport aux coordonnées de ce même point. Des objections de même ordre se présentent si, avec MM. W. Thomson, Tait, Maxwell, on appelle potentiel le travail nécessaire pour amener l'unité d'électricité de l'infini au point considéré.

Il m'a paru qu'on pouvait éviter la difficulté en ayant d'abord recours pour la définition du potentiel à une propriété purement expérimentale, analogue à celle qui conduit à la définition de la température dans l'étude des phénomènes de la chaleur. On appelle, en effet, température d'un corps l'indication d'un thermomètre mis en contact avec lui lorsque l'équilibre est établi. Plus tard, on démontre que cette indication, en prenant le zéro absolu pour point de départ et un gaz parfait pour substance thermométrique, est proportionnelle à la force vive de ses molécules. Mais on peut donner une idée nette des phénomènes calorifiques sans énoncer, dès le début, la définition rigoureuse de la température.

Une marche analogue me semble pouvoir être suivie dans l'étude de l'électricité.

2. On peut considérer comme vérifié par l'expérience que l'électricité se porte à la surface des corps conducteurs et que la mesure des forces électriques peut être exactement effectuée à l'aide, soit de la balance de torsion, soit de l'électromètre Thomson ou de l'un des appareils fondés sur le même principe.

Appelons *potentiel* d'un corps électrisé l'indication d'une balance de torsion dans laquelle la boule mobile et la boule fixe sont deux petites sphères égales et qui, étant au contact, ont été mises en communication avec le corps par un fil long et fin. On peut remplacer la balancé de torsion par un électromètre en se bornant au cas des petites déviations.

3. Le potentiel étant ainsi défini, on peut vérifier qu'il est proportionnel à la quantité d'électricité du corps. Si l'on conçoit, en effet, deux corps conducteurs isolés, de même forme et de dimensions rigoureusement égales, l'un d'eux, A, étant électrisé et son potentiel ayant été mesuré, si on le touche avec le deuxième, sa charge devra devenir la moitié de ce qu'elle était primitivement, et l'expérience donne aussi pour le potentiel une valeur moitié de la précédente. Si, après avoir ramené le

second conducteur à l'état neutre, on le met de nouveau en contact avec A, la charge électrique de celui-ci sera réduite au quart et le potentiel également.

Ce mode de vérification n'est pas rigoureusement exact puisque le potentiel ainsi mesuré n'est pas celui du corps avant le contact avec la boule mobile de la balance, mais bien celui qu'il a après ce contact et qui correspond à une plus faible quantité d'électricité, une portion de celle qu'il possédait s'étant portée sur la boule; mais si on admet que la charge électrique prise par celle ci est très faible comparativement à celle du corps, on a très sensiblement la valeur du potentiel de ce dernier.

Il en est de même, du reste, en calorimétrie. Un corps mis en contact avec un thermomètre, cède ou enlève à ce dernier une portion de chaleur, et l'indication de l'instrument se rapporte au nouvel état dans lequel le corps est amené lorsque l'équilibre est établi.

4. Si le corps électrisé est sphérique, on peut vérifier par le mode suivant d'expérimentation que son potentiel, proportionnel à la charge électrique, varie en raison inverse du rayon de la sphère.

Soit R le rayon de la sphère : mesurons son potentiel V, lequel correspond à une certaine quantité M d'électricité. Mettons-la ensuite en communication avec une sphère de rayon r. Interrompons la communication et mesurons de nouveau le potentiel V' de la sphère R, laquelle possède maintenant une quantité M' d'électricité moindre que M. Le potentiel étant proportionnel à la charge, on peut écrire

$$V = M \,.\, K,$$
$$V' = M' \,.\, K,$$

K étant une constante, la même dans les deux cas.

On en déduit

$$V - V' = (M - M')K.$$

Mesurons aussi le potentiel V'' de la sphère r, laquelle possède

la quantité $M - M'$ d'électricité. Si cette sphère r avait la charge M, son potentiel serait

$$V' \frac{M}{M - M'} = V' \frac{V}{V - V'}.$$

Ainsi les deux sphères R, r ont pour la même charge M :

La première, le potentiel V,

La seconde, le potentiel $V' \frac{V}{V - V'}$,

dont le rapport est

$$\frac{V(V - V')}{V'V} = \frac{V - V'}{V'}.$$

On trouve que ce rapport est égal à $\frac{r}{R}$.

Le potentiel, pour la même charge, varie donc en raison inverse du rayon de la sphère.

5. Il résulte de ces deux propositions que si M représente la quantité d'électricité possédée par la sphère R, on peut écrire, son potentiel étant V,

$$V = \frac{M}{R}.$$

V est égal à l'unité lorsque $M = R$, c'est-à-dire lorsque la charge électrique renferme autant d'unités d'électricité que le rayon R contient d'unités de longueur. Le potentiel est dit alors égal à l'unité.

Si $R = 1$, il faudra que $M = 1$ pour que le potentiel de la sphère ainsi chargée soit l'unité.

Il ne faut donc pas confondre l'unité de potentiel avec l'unité de charge électrique. Cette dernière étant égale à l'unité, le potentiel de la sphère sur laquelle elle est répandue, sera *un*, si le rayon de la sphère vaut l'unité de longueur. Si cette condition n'est pas remplie, le potentiel varie en raison inverse du rayon.

6. Les dimensions du globe terrestre pouvant être considérées comme infinies, son potentiel est nul.



7. La capacité électrique d'un corps électrisé, de forme quelconque, est la quantité d'électricité qu'il faut lui donner pour que son potentiel soit égal à l'unité.

Il résulte de cette définition que le potentiel et la capacité électrique d'un conducteur étant exprimés par V et K, la quantité d'électricité qu'il renferme est égale à VK.

Dans le cas où le corps est sphérique, sa capacité est R. Le potentiel valant, en effet, $\frac{M}{R}$, il faut que $M = R$ pour que le potentiel soit égal à l'unité.

8. Lorsque deux corps à des températures différentes sont mis en contact, l'équilibre de température s'établit entre eux, l'un d'eux perdant une certaine quantité de chaleur que l'autre gagne. De même, si deux conducteurs électrisés de forme quelconque sont mis en communication par un fil long et fin, leur potentiel électrique devient le même. Cette propriété fondamentale peut être considérée comme un résultat de l'observation. Si l'on mesure les potentiels de chacun des conducteurs avant le contact et si on les mesure de nouveau après avoir établi entre eux la communication et les avoir séparés, on trouve qu'ils sont devenus les mêmes.

9. Le potentiel de la terre étant nul, celui d'un conducteur électrisé quelconque est réduit à zéro par sa communication avec le sol.

10. De ces propositions résulte le moyen de mesurer rigoureusement le potentiel d'un conducteur électrisé et la capacité électrique de ce conducteur.

Nous admettrons, pour fixer les idées, que l'on se sert d'une balance de Coulomb dont la force de torsion du fil est connue. Si l'on prend le millimètre pour unité de longueur et le milligramme au lieu de l'observation pour unité de force (en négligeant la variation du milligramme d'un point à un autre de la surface du globe), l'unité de masse électrique sera celle qui, agissant sur

une masse égale, de même signe ou de signe contraire, placée à un millimètre de distance, exercera sur elle une répulsion ou une attraction égale à un milligramme. On suppose les masses électriques concentrées en un point physique. On démontre facilement dans ces conditions que, si l'on donne à la boule fixe de la balance une quantité m d'électricité, on aura

$$m = 4a \sin\frac{\delta}{2}\sqrt{n(\theta+\delta)\cos\frac{\delta}{2}},$$

δ étant l'angle d'écart des deux boules que l'on peut supposer le même dans toutes les expériences,

θ la torsion imprimée au fil,

n la force de torsion,

a la demi-longueur du levier de la balance.

11. Soient V, K, le potentiel et la capacité électrique du conducteur qu'il s'agit de mesurer.

Supposons, en premier lieu, le conducteur sphérique. On a

$$V = \frac{M}{R},$$

M étant la charge électrique,

R, le rayon de la sphère.

La capacité cherchée K est égale à R.

Le conducteur étant mis en communication, par un fil long et fin, avec la boule fixe de la balance, dont le rayon est supposé égal à r, perdra une quantité d'électricité m, que l'on pourra mesurer, et gardera $M - m$. Les deux potentiels étant égaux, on aura la relation

$$\frac{M-m}{R} = \frac{m}{r},$$

d'où

$$\frac{M}{R} = V = \frac{m}{R} + \frac{m}{r} = \frac{m(R+r)}{Rr}.$$

Le problème se résout, comme on voit, facilement.

Remarque. — On a

$$M = \frac{m(R+r)}{r} = m\frac{R}{r},$$

si r est négligeable devant R.

La quantité d'électricité m que prend la boule de la balance est, comme nous l'avons annoncé, une petite fraction $\frac{r}{R}$, de celle M que possède le conducteur, le centième, par exemple, si $R = 100\,r$.

12. Revenons au cas général.

Mettons, comme précédemment, le conducteur en communication, par un fil long et fin, avec la boule fixe de la balance, de rayon r. Mesurons la quantité d'électricité m que possède cette boule après le contact : m représente ce que le conducteur a cédé à la boule. V′ étant le potentiel de cette dernière, on a

$$(1) \qquad V' = \frac{m}{r}.$$

Par suite du contact, les potentiels du conducteur et de la boule sont devenus les mêmes, de sorte que le conducteur est actuellement au potentiel V′. Or, il possédait, avant le contact, la quantité d'électricité VK; il n'a plus, après le contact, que la quantité V′K; il a donc perdu $(V - V')\,K$: ce qu'il a perdu étant d'ailleurs égal à m, on a

$$(2) \qquad (V - V')K = m,$$

première relation pour déterminer nos deux inconnues.

Pour en obtenir une seconde, mettons la boule de la balance en communication avec le sol et recommençons l'expérience, c'est-à-dire faisons communiquer la balance avec le conducteur qui est actuellement au potentiel V′. La boule prendra une quantité d'électricité m' que l'on pourra mesurer, et le potentiel commun aux deux corps après le contact sera

$$(3) \qquad V' = \frac{m'}{r}.$$

On aura, comme précédemment,

$$(V' - V'')K = m'. \tag{4}$$

En divisant (2) par (4), on obtient

$$\frac{V - V''}{V' - V''} = \frac{m}{m'},$$

d'où

$$V = V' + \frac{m}{m'}(V' - V''),$$

et, en ayant égard à (1) et (3),

$$V = \frac{m^2}{m'r}.$$

De (4) on déduit

$$K = \frac{m'}{V' - V''} = \frac{m'r}{m - m'}.$$

Remarque. — On tire de ces équations

$$VK = \frac{m^2}{m - m'},$$

ou

$$\frac{VK}{m} = \frac{m}{m - m'}.$$

Ainsi, la quantité d'électricité VK du conducteur est très grande par rapport à m, si m et m' diffèrent peu l'un de l'autre. Il est évident, du reste, que ces deux quantités doivent être mesurées avec une grande précision, si l'on veut obtenir les valeurs exactes de V et de K.

Le potentiel et la capacité électrique d'un conducteur électrisé peuvent donc être mesurées exactement à l'aide de la balance de torsion. Mais on peut aussi les évaluer au moyen des électromètres de M. Thomson ou de M. Branly, dont je juge inutile de donner la description qui se trouve dans les traités de physique récents.

13. Il est alors nécessaire de mesurer préalablement la capacité électrique de l'aiguille mobile de l'instrument, aiguille dont la forme est celle d'un ∞.

Soit E cette capacité.

On met le secteur en communication par le fil long et fin de l'appareil avec une source électrique à potentiel constant V_0 et qui jouit de la propriété que son potentiel conserve la même valeur lorsqu'on la fait communiquer avec un conducteur, la quantité d'électricité perdue par la source lui étant immédiatement restituée. Cette source est l'un des pôles d'une pile à zinc amalgamé, platine et eau, dont l'autre pôle est à terre.

Les secteurs fixes de l'électromètre communiquent avec les deux pôles d'une pile semblable isolée.

On observe une certaine déviation δ_0 et on a la relation

$$V_0 E = b\delta_0, \tag{5}$$

qui exprime que la déviation δ_0 de l'aiguille est proportionnelle à sa charge électrique V_0E. Cette formule peut être vérifiée en introduisant dans le circuit des nombres différents de couples. b est donc une constante qui ne changera pas dans les expériences ultérieures.

On met ensuite la même pile en communication avec une sphère de rayon R, laquelle prend aussi le potentiel V_0. Cette sphère est mise en communication avec l'électromètre, déchargé préalablement de son électricité, et l'on obtient une déviation δ_1 correspondante au potentiel V_1 commun à la sphère et à l'électromètre, d'où résulte :

$$V_1 E = b\delta_1, \tag{6}$$

L'électricité perdue par la sphère est exprimée par $(V_0 - V_1)R$ et puisqu'elle a été gagnée par le secteur mobile de l'instrument, on peut écrire

$$V_1 E = (V_0 - V_1) R,$$

d'où

$$E = \frac{V_0 - V_1}{V_1} R = \frac{\frac{b}{E}\delta_0 - \frac{b}{E}\delta_1}{\frac{b}{E}\delta_1} R = \frac{\delta_0 - \delta_1}{\delta_1} R .$$

Le coefficient $\frac{\delta_0 - \delta_1}{\delta_1} = n$ pourra être considérable. Si l'on conçoit une sphère de rayon nR, sa capacité électrique étant nR, on peut dire que la capacité du secteur de l'électromètre vaut celle d'une sphère de rayon nR.

Si, par exemple, R = 10^{mm} et n = 30, l'aiguille aura la même capacité qu'une sphère de 300^{mm} de rayon.

La capacité est exprimée ici en unités relatives et non en unités absolues, comme avec la première méthode.

La capacité E de l'aiguille de l'électromètre étant connue, si l'on veut obtenir celle K d'un conducteur de forme donnée, on suivra une marche analogue.

Mettons le conducteur en communication avec la source au potentiel constant V_0, puis ensuite avec l'électromètre : le potentiel commun au corps et à l'instrument deviendra V_2 et on aura, en appliquant les mêmes principes,

$$(7) \qquad (V_0 - V_2) K = V_2 E .$$

On observe d'ailleurs une déviation δ_2, qui conduit à

$$V_2 E = b\delta_2 .$$

on déduit de (7)

$$K = \frac{V_2}{V_0 - V_2} E = \frac{\frac{b}{E}\delta_2}{\frac{b}{E}\delta_0 - \frac{b}{E}\delta_2} E = \frac{\delta_2}{\delta_0 - \delta_2} E .$$

14. K étant connu, on pourra mesurer également à l'aide de l'électromètre, en unités absolues, le potentiel V du conducteur électrisé.

Il faut admettre que le potentiel V_c d'une source constante, d'un élément Daniell, par exemple, a déjà été mesuré par la première méthode

Cette source étant mise en communication avec l'instrument donne une déviation δ_c, d'où l'on déduit

$$V_c E = b\delta_c.$$

Le conducteur au potentiel V étant uni à l'électromètre, toujours par un fil long et fin, donne une déviation δ' correspondante à un potentiel V' et qui conduit à

$$(V - V')K = V'E,$$

d'où

$$V = V' + V'\frac{E}{K} = V'(1 + n'),$$

en posant

$$n' = \frac{E}{K}.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{V'}{V_c} = \frac{\delta'}{\delta_c};$$

donc

$$(8) \qquad V = V_c(1 + n')\frac{\delta'}{\delta_c}.$$

Si la source au potentiel V_c est celle à laquelle se rapporte V_0 (n° 13), l'équation (8) devient

$$V = V_0(1 + n')\frac{\delta'}{\delta_0},$$

et fait connaître le potentiel V en fonction de V_0, c'est-à-dire, en unités relatives : mais (8) la donne en unités absolues et il est nécessaire pour les applications de la théorie du potentiel de connaître V en unités absolues.

15. M. W. Thomson a trouvé, pour la valeur du potentiel V_c d'un élément Daniell,

$$(^1) \qquad V_c = 0,00378,$$

---

(1) M. W. Thomson donne (*Journal de physique*, tome IV, page 162, note de M. Blavier) 0,00374 en prenant pour unités de longueur et de force le centimètre et $\frac{1^g}{g} = 0^g,0010194$. Il me semble préférable pour l'enseignement de se servir tou-

en prenant pour unités de temps, de longueur et de force, la seconde, le millimètre et le milligramme.

On pourra donc se servir d'un semblable élément, à défaut de balance de torsion, pour mesurer en unités absolues le potentiel et la capacité d'un corps électrisé.

On estime que le potentiel d'une machine électrique bien chargée vaut environ 80,000 fois celui d'un élément Daniell : il est donc égal à 300 de nos unités. Si l'on suppose, pour fixer les idées, une sphère d'un millimètre de rayon mise en communication avec une machine électrique chargée et par conséquent au même potentiel, la quantité d'électricité de la sphère sera égale à 300 unités d'électricité; chacune de ces unités placée en présence d'une masse égale à un millimètre de distance, exerçant ou éprouvant une répulsion contrebalancée par un milligramme.

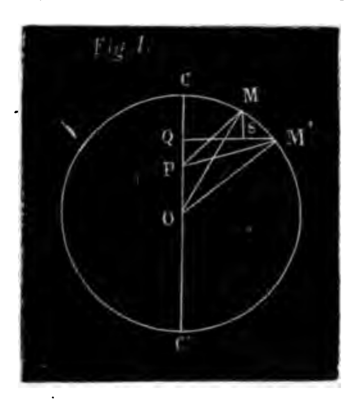
16. Le potentiel d'un corps électrisé jouit de propriétés dont nous pouvons donner une idée nette en nous bornant au cas des surfaces sphériques.

Le potentiel d'une sphère est égal à $\frac{M}{R}$, ou, ce qui revient au même, à $\sum \frac{\mu}{R}$, μ étant la petite masse électrique qui se trouve en un point de la surface et la somme s'étendant à tous les éléments de celle-ci.

Si l'on prend un point quelconque dans l'intérieur de la sphère et si l'on représente par ρ la distance de ce point à celui où se trouve la masse μ, la somme $\sum \frac{\mu}{\rho}$, étendue à toute la surface de la sphère est encore égale à $\frac{M}{R}$, et se trouve, par conséquent, indépendante de la position du point choisi dans l'intérieur.

jours des mêmes unités de mesure. C'est pour ce motif que j'emploie le millimètre et le milligramme que l'on est conduit à employer en magnétisme. L'unité de poids n'étant pas constante, il suffit de remarquer une fois pour toutes qu'il est nécessaire de tenir compte des variations de g, si l'on veut comparer les valeurs obtenues dans des lieux différents.

Soient, en effet, P le point quelconque pris dans l'intérieur de la sphère, a sa distance au centre. Appelons θ l'angle MOP que forme avec OP le rayon OM aboutissant à un point de la sphère.



Si l'on décrit le cône ayant pour sommet le point O et l'angle 2θ pour angle au sommet et si l'on considère un rayon OM' faisant avec OM l'angle $MOM' = u$, angle supposé très petit, la zone correspondante à MM' sera égale en désignant sa hauteur par h, à $2\pi R h$.

M'Q, MS étant respectivement perpendiculaires à OP et à M'Q, les deux triangles semblables M'OQ, MM'S, donnent

$$MS = h = Ru \sin\theta;$$

la surface de la zone est donc $2\pi R^2 u \sin\theta$. ε, δ étant l'épaisseur et la densité de la couche électrique, la masse μ correspondante a pour expression $\mu = 2\pi\varepsilon\delta R^2 u \sin\theta$.

La distance $MP = \rho$ de chacun des points de cette masse à P est donnée par

$$\rho^2 = R^2 + a^2 - 2aR\cos\theta.$$

Si l'on pose $M'P = \rho + \rho'$, ρ' étant très petit, on a de même

$$(\rho + \rho')^2 = R^2 + a^2 - 2aR\cos(\theta + u);$$

développant et négligeant ρ'^2, remarquant que l'on peut poser $\cos u = 1$, $\sin u = u$, on arrive à

$$2\rho\rho' = 2aRu\sin\theta.$$

On a ainsi :

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{2\pi\varepsilon\delta R}{a}\rho'.$$

Lorsque M' change, ρ' varie seul dans l'expression de $\frac{\mu}{\rho}$: de sorte que, pour obtenir la somme des valeurs que prend $\frac{\mu}{\rho}$ étendue à tous les points de la sphère, il suffit de calculer la somme des accroissements ρ' du rayon vecteur PM de C à C'.

Au point C, le rayon vecteur est égal à $R - a$,

— C', — — $R + a$.

L'accroissement n'est autre chose que la différence des valeurs extrêmes du rayon vecteur, c'est-à-dire $2a$.

Par conséquent, la valeur de $\sum \frac{\mu}{\rho}$ pour la sphère entière est $\frac{2\pi\varepsilon\delta R}{a} \times 2a = 4\pi\varepsilon\delta R$, indépendante de a.

On a d'ailleurs pour la masse M d'électricité de la sphère, $M = 4\pi R^2\varepsilon\delta$.

Donc

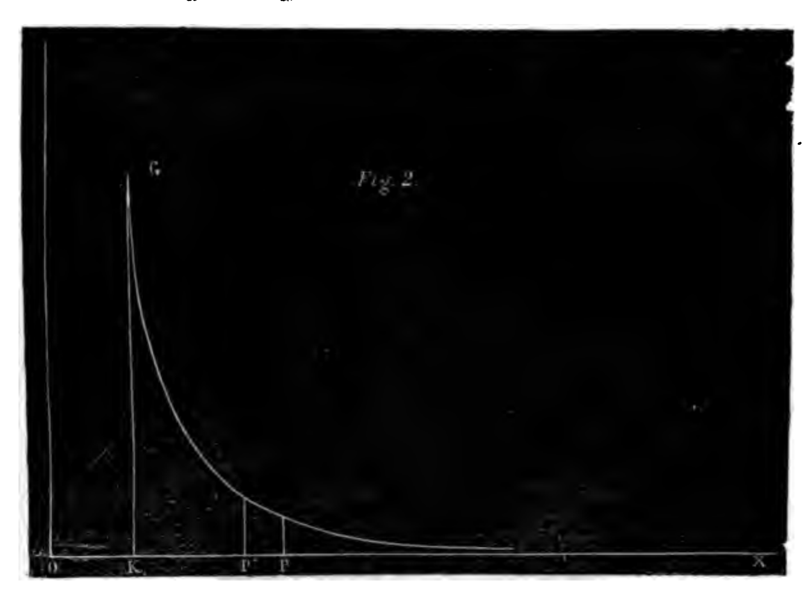
$$\sum \frac{\mu}{\rho} = 4\pi\varepsilon\delta R = \frac{M}{R}.$$

Cette propriété n'est pas particulière aux surfaces sphériques. Pour un corps électrisé de forme quelconque, $\sum \frac{\mu}{\rho}$ conserve une valeur constante, quelle que soit la position du point pris dans l'intérieur, et le signe $\sum$ s'étendant à tous les points de la surface.

17. Le potentiel $\frac{M}{R}$ d'une sphère jouit encore d'une propriété remarquable. Il mesure le travail effectué pour amener l'unité d'électricité de l'infini à la surface de la sphère.

L'électricité M, agissant sur un point extérieur, peut être supposée condensée au centre O (*fig.* 2). Soit P le point où se trouve l'unité d'électricité de signe contraire attirée par M, et posons $OP = x$.

L'attraction exercée par M sur l'unité d'électricité a pour expression $\frac{M \times 1}{x^2} = \frac{M}{x^2}$. Lorsque cette unité est transportée de



P en P', PP' étant très petit, l'attraction ne varie pas sensiblement et le travail effectué a pour mesure $\frac{M}{x^2} \times PP'$. Pour obtenir le travail cherché, il faut calculer la somme des valeurs que prend $\frac{M}{x^2} \times PP'$ ou, simplement, $\frac{1}{x^2} \times PP'$, lorsque x varie de l'infini à $R = OK$.

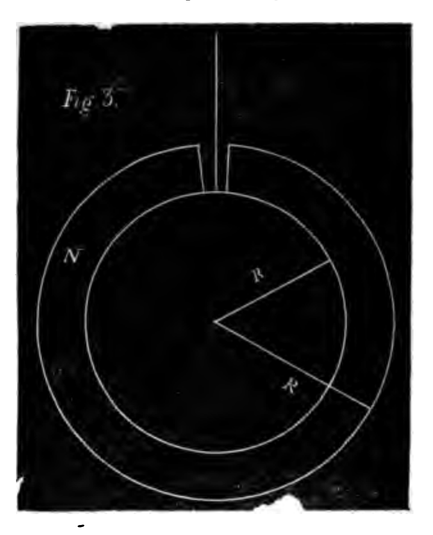
Or, si l'on trace la courbe qui a pour équation

$$y = \frac{1}{x^2},$$

il est aisé de voir que $\sum \frac{1}{x^2} \times PP'$ représente l'aire comprise entre la courbe, l'axe des X, l'ordonnée GK et l'infini, et qu'elle est égale à $\frac{1}{R}$. Le travail effectué est donc $\frac{M}{R}$, c'est-à-dire le potentiel de la sphère.

Cette propriété, comme la précédente, est vraie pour un corps de forme quelconque.

18. Il importe de remarquer ici que dans ce qui précède nous avons supposé le corps conducteur électrisé seul : s'il fait partie d'un système de corps électrisés, comme dans les cas de l'électrisation par influence, des condensateurs, etc., son potentiel pourra être différent de celui que l'on observerait s'il était isolé. Supposons, par exemple, une bouteille de Leyde, composée de deux sphères conductrices, séparées par un milieu isolant. La



sphère intérieure, de rayon R, est mise en communication avec une source au potentiel V et l'extérieure de rayon R_1 communique avec le sol et a, par suite, un potentiel nul. Le système étant chargé à refus, l'action exercée sur un point extérieur est nulle. Si Q et Q_1 représentent les quantités d'électricité, de signes contraires, accumulées sur les deux surfaces, on aura $Q_1 = -Q$. L'action qu'elles exercent sur le point extérieur est, en effet, la même que si elles étaient condensées au centre. Les distances au point considéré étant alors les mêmes et l'action nulle, les deux masses électriques sont nécessairement égales.

Le potentiel du système est égal, dans ce cas, à la différence

de ceux des deux sphères ou, ce qui revient au même, à leur somme algébrique; de sorte que l'on peut poser, en l'appelant V_1,

$$V_1 = \frac{Q}{R} - \frac{Q}{R_1} = \frac{Q(R_1 - R)}{RR_1}.$$

Analogies du potentiel et de la température.

19. Le potentiel dans les corps électrisés est analogue à la température dans les corps chauds. Cette analogie résulte de l'exposition qui précède. Il n'est pas inutile néanmoins de résumer les principales propositions qui servent à l'établir.

La température d'un corps croît proportionnellement à la quantité de chaleur qu'on lui donne. De même, le potentiel d'un corps électrisé augmente en raison directe de sa charge ou de la quantité d'électricité qui lui est communiquée.

La capacité calorifique d'un corps, laquelle peut être distinguée de sa chaleur spécifique, est la quantité de chaleur qu'il faut lui donner pour que sa température augmente d'une unité. La capacité électrique d'un conducteur est, de même, la quantité d'électricité qu'il faut lui donner pour que son potentiel devienne égal à l'unité, ou augmente d'une unité.

Un corps gagne une quantité de chaleur égale au produit de sa capacité calorifique par la variation de sa température. La quantité d'électricité d'un conducteur est, de même, égale au produit de sa capacité électrique par son potentiel, en partant du cas où ce potentiel est nul.

La chaleur spécifique d'un corps est sa capacité calorifique rapportée à l'unité de masse. La capacité spécifique d'un corps électrisé, supposé sphérique pour fixer les idées, est sa capacité électrique correspondant au rayon *un*. La capacité électrique est égale à la capacité spécifique multipliée par le rayon.

Si deux corps de capacités calorifiques c, c', possédant des quantités de chaleur q, q', sont mis en contact, la température commune t, comptée à partir de zéro, s'obtiendra en exprimant

que la quantité de chaleur perdue par l'un des corps est égale à celle gagnée par l'autre, ce qui conduit à

$$q - ct = c't - q',$$

d'où

$$t = \frac{q + q'}{c + c'}.$$

De même, si deux conducteurs de capacités électriques K, K', possédant des quantités Q, Q' d'électricité, sont mis en communication, le potentiel deviendra le même; l'un des corps gagnera une certaine quantité d'électricité égale à celle que l'autre aura perdue. Or, en appelant V le potentiel commun, on arrive à

$$Q - VK = VK' - Q',$$

d'où

$$V = \frac{Q + Q'}{K + K'}.$$

Il y a, comme on voit, grande analogie entre le potentiel d'un corps électrisé et la température d'un corps chaud. Il est nécessaire, cependant, de remarquer que cette analogie doit être restreinte aux cas que nous venons d'examiner et qu'elle pourrait être en défaut dans certaines circonstances. Les corps chauds jouissent, en effet, de la propriété d'émettre et d'absorber de la chaleur, propriété que ne possèdent pas les corps électrisés. Si donc nous concevons une sphère à une température de 100°, par exemple, dans l'intérieur de laquelle s'en trouve une seconde à 0°, l'équilibre de température s'établira entre elles par voie de rayonnement ou par conductibilité si elles communiquent à l'aide d'un corps conducteur du calorique. Mais si deux sphères métalliques sont placées l'une dans l'intérieur de l'autre, celle-ci étant électrisée, la première ne prendra aucune charge, lors même qu'on les ferait communiquer par un fil métallique, l'électricité se portant toujours à la surface.

Analogies du potentiel et de la pression hydrostatique.

20. Concevons un vase cylindrique renfermant un liquide homogène. Les propositions suivantes, qui résultent des propriétés bien connues de l'équilibre des liquides, sont tout à fait analogues à celles que nous avons formulées sur le potentiel.

1° La pression exercée sur le fond du vase croît proportionnellement à la quantité de liquide que celui-ci contient.

2° Si l'on appelle capacité hydrostatique le volume de liquide nécessaire pour que la pression exercée sur le fond augmente de l'unité, la quantité de liquide contenue dans le vase est égale à sa capacité hydrostatique multipliée par la pression. Il est aisé de voir que cette capacité est égale à la surface elle-même.

3° On pourrait désigner par capacité spécifique hydrostatique la capacité rapportée à l'unité de surface du fond du vase. La première serait donc égale à la seconde multipliée par la surface du fond.

4° Si deux vases dont les surfaces de fond sont s, s' et dont les pressions hydrostatiques sont h, h' communiquent l'une avec l'autre, la pression commune H se calculera en exprimant que le volume de liquide gagné par l'un des vases est égal à celui perdu par l'autre; d'où l'on déduit :

$$S(H-h)=S'(h'-H),$$

d'où

$$H=\frac{sh+s'h'}{s+s'}=\frac{Q+Q'}{K+K'},$$

en appelant Q, Q' les quantités de liquide contenues primitivement dans chaque vase et K, K' les capacités hydrostatiques, c'est-à-dire, les surfaces du fond.

Applications de la théorie du potentiel électrique. Pressions sur le milieu ambiant.

21. 1° Une sphère de rayon R est électrisée au potentiel V : calculer la pression exercée contre l'air ambiant.

La couche électrique étant supposée de densité uniforme et d'épaisseur ρ, on démontre que la pression cherchée ϖ, rapportée à l'unité de surface, est égale à $2\pi\rho^2$ (¹).

M étant la quantité d'électricité possédée par la sphère, on a

$$M = 4\pi R^2 \rho = VR,$$

d'où

$$\rho = \frac{V}{4\pi R},$$

et

$$\varpi = 2\pi \frac{V^2}{16\pi^2 R^2} = \frac{V^2}{8\pi R^2}.$$

Si le potentiel de la sphère est égal à celui d'une machine électrique ordinaire

$$V = 300 \quad \text{et} \quad \varpi = \frac{90000}{8\pi R^2}.$$

Soit $R = 10^{mm}$,

$$\varpi = \frac{900}{8\pi} = 35^{\text{milligrammes}}.$$

Telle est la valeur approchée de la pression exercée sur un millimètre carré. Sur un centimètre carré elle vaudra $3^g,5$ ou $\frac{1}{294}$ de la pression atmosphérique, en admettant 1033^g pour cette dernière. Si l'on conçoit un canal très fin allant de l'intérieur de la couche à la cuvette d'un baromètre, la diminution de hauteur de ce dernier sera de $\frac{760^{mm}}{294} = 2^{mm},5$.

2° Le potentiel V′ pour lequel la pression ϖ serait égale à la pression atmosphérique sera donné par :

$$\frac{V'^2}{8\pi 100} = 10330^{m \cdot g},$$

ou

$$V' = 5093 = 300 \times 17 \text{ environ}.$$

(¹) *Journal de physique*, t. IV, p. 161. — Note de M. Blavier.

Il faudrait donc, pour charger une sphère de 10^{mm} de rayon d'une couche d'électricité capable de faire équilibre à la pression atmosphérique, une machine électrique ayant un potentiel égal à 17 fois celui de nos machines ordinaires.

3° En admettant $V = 300$ quel serait le rayon R, pour lequel la pression atmosphérique serait équilibrée?

La valeur de R sera donnée par

$$\frac{90000}{8\pi R^2} = 10330,$$

d'où

$$R = 0^{mm},6.$$

On comprend aisément, à l'aide de ces applications numériques, l'influence du diamètre de la sphère sur la pression que la couche électrique dont elles sont recouvertes exerce contre l'air ambiant.

22. Les deux électricités, positive et négative, accumulées sur les deux faces d'un condensateur ou d'une bouteille de Leyde, exercent sur la substance isolante, par suite de leur attraction mutuelle, une pression que l'on peut calculer. Examinons d'abord le cas de la bouteille de Leyde sphérique (n° 18).

L'une des pressions, la pression dirigée de dedans en dehors, par exemple, est encore égale, sur chaque unité de surface, à $2\pi\rho^2$.

Il faut déterminer ρ.

Nous avons déjà trouvé (18)

$$V = Q\,\frac{R_1 - R}{RR_1},$$

d'où

$$Q = V\,\frac{RR_1}{R_1 - R};$$

mais

$$Q = 4\pi R^2 \rho;$$

donc

$$\rho = \frac{1}{4\pi R}.V.\frac{R_1}{R_1 - R}.$$

Si l'on pose

$$R_1 = R + e,$$

e étant l'épaisseur de la substance isolante, et si l'on regarde $\frac{e}{R}$ comme négligeable devant l'unité, on obtient

$$\rho = \frac{V}{4\pi e}.$$

La pression cherchée ϖ a donc pour valeur

$$\varpi = 2\pi \frac{V^2}{16\pi^2 e^2} = \frac{V^2}{8\pi e^2}.$$

Nous supposons ici le pouvoir inducteur de la substance isolante égal à l'unité, ce qui n'est rigoureusement vrai que pour l'air; si le milieu électrique interposé est du verre, on peut admettre pour son pouvoir inducteur $p = 1,8$, et il faut alors introduire le facteur p dans l'expression de Q et, par suite, dans celle de ρ. On trouve

$$\varpi = \frac{V^2 p^2}{8\pi e^2};$$

pour $V = 300, \quad p = 1,8, \quad e = 2^{mm}$,

$$\varpi = 2016^{m \cdot g}$$

par millimètre carré,

ou $$\varpi = 201^g,6$$

par centimètre carré. Cette pression vaut les $\frac{20}{100}$ environ de la pression atmosphérique dont il faut en outre tenir compte.

On peut appliquer la même formule aux batteries, les jarres qui les composent étant supposées sphériques, et aux condensateurs plans ordinaires, à armatures égales. Ainsi, un condensateur de 16 décimètres carrés ou de 40 centimètres de côté, une batterie d'égale superficie, supporte sur chaque face, en sus de la pression atmosphérique, une pression d'environ 322 kil., lorsqu'elle est chargée à refus avec une machine ordinaire.

Attractions et répulsions électriques.

23. Deux sphères, de même rayon r, dont la distance des centres est d, sont électrisées au même potentiel V. Calculer la force f avec laquelle elles se repoussent ou s'attirent suivant qu'elles sont chargées d'électricités de même nature ou de natures différentes.

On a

$$f = \frac{m^2}{d^2} = \frac{V^2 r^2}{d^2}.$$

Si, par exemple,

$$V = 300, \quad r = 5^{mm}, \quad d = 100^{mm},$$

on trouve

$$f = 225^{m \cdot g}.$$

Tel est le poids qu'il faudrait mettre pour l'équilibre dans l'un des plateaux d'une balance, une sphère de 5^{mm} de diamètre étant placée à l'extrémité de l'autre bras et attirée par une sphère égale située à 100^{mm} de distance.

De l'énergie électrique.

24. Lorsqu'une batterie électrique est ramenée à l'état neutre, les deux électricités contraires, obéissant à leur attraction mutuelle, se portent l'une vers l'autre et produisent un travail, rendu sensible par les effets mécaniques ou calorifiques qu'éprouvent les corps interposés. L'énergie d'une batterie est le travail maximum résultant de la réunion des deux électricités. Ce travail peut être déterminé ainsi qu'il suit dans le cas le plus simple, celui de la bouteille de Leyde sphérique (n° 18).

Considérons une petite masse m_1 d'électricité de la couche extérieure Q_1 : elle est attirée par toutes les masses électriques de la couche interne Q. Puisqu'elle est extérieure à cette couche,

l'attraction est la même que si cette dernière était condensée au centre et a dès lors pour sa valeur :

$$\frac{m_1 Q}{R^2}.$$

De plus, elle est dirigée suivant le rayon qui passe par m_1.

Le travail correspondant a pour expression le produit de l'intensité de la force par le chemin parcouru par m_1 suivant le rayon. Or, ce chemin est égal à e, e étant l'épaisseur de la substance isolante. Cela est vrai quel que soit le chemin parcouru par m_1 pour rencontrer la couche Q : car, si dans une partie de son parcours, elle s'éloigne de Q et donne naissance à un travail négatif, elle s'en rapproche ensuite et produit un travail positif qui compense le premier travail négatif : finalement, le chemin parcouru dans la direction de la force est toujours e.

Nous pouvons donc dire que le travail correspondant à m_1 est exprimé par

$$\frac{m_1 Q}{R^2} e.$$

Il suffit de faire la somme de toutes les valeurs de ce travail élémentaire pour les différentes masses m_1 de la couche extérieure. Pour toutes, le facteur $\frac{Q}{R^2} e$ est le même; la somme des masses m_1 est égale à Q_1; il semblerait donc que le travail total a pour expression :

$$\frac{Q_1 Q}{R^2} e.$$

Mais il faut remarquer que si une masse $m_2 = m_1$ est prise à la surface extérieure de la couche Q_1, l'attraction est nulle, parce que Q_1 agit très sensiblement sur elle comme si elle était au centre; elle est d'ailleurs égale et de signe contraire à Q, elle contrebalance donc l'attraction de cette dernière. La résultante des attractions de deux masses égales m_1, m_2 prises à la surface interne et à la surface externe de Q_1 est donc réellement

$$\frac{m_1 Q}{R^2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 + m_2}{R^2} Q.$$

Le travail correspondant à ces deux masses est donc

$$\frac{1}{2}\frac{(m_1+m_2)Q}{R^2}e.$$

On peut faire un raisonnement semblable pour toutes les autres masses de la couche Q_1 et on a pour le travail total $\mathfrak{T}$.

$$\mathfrak{T}=\frac{1}{2}\frac{Q_1Q}{R^2}e=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{R^2}e.$$

Nous avons trouvé (22)

$$Q=V\frac{RR_1}{R_1-R}=V\frac{R^2}{e}$$

sensiblement, donc

$$\mathfrak{T}=\frac{1}{2}VQ.$$

Telle est l'expression du travail en fonction du potentiel et de la charge.

La première expression de $\mathfrak{T}$ démontre que le travail est proportionnel au carré de la charge.

Si l'on veut en calculer la valeur absolue, il convient de remplacer Q par sa valeur en fonction de la surface S de la sphère, c'est-à-dire, par $S\rho$, ρ étant l'épaisseur de la couche électrique.

Nous avons trouvé (22)

$$\rho=\frac{V}{4\pi e};$$

donc

$$Q=\frac{SV}{4\pi e},$$

et

$$\mathfrak{T}=\frac{V^2S}{8\pi e}.$$

Soient

$V=300$, $e=2^{mm}$, $S=1000000^{mm.q}=$ un mètre carré.

Le calcul donne

$$\mathfrak{T} = 1800000000$$

sensiblement.

Si l'on veut prendre le kilogrammètre pour unité de travail, il faut diviser la valeur de T, d'abord par 1000, à cause du remplacement du millimètre par le mètre, ensuite par 1000000, à cause de celui du milligramme par le kilogramme. On obtient

$$\mathfrak{T} = 1^{km},8;$$

ce nombre deviendrait 3,24 si l'on tenait compte du pouvoir spécifique inducteur du verre.

Pour obtenir cette quantité de travail, il a fallu la dépenser dans la charge de la batterie. On peut admettre, sans exagération, que les pertes ont exigé une quantité égale de travail. On est donc obligé de dépenser $6^{km},5$ environ pour charger une batterie d'un mètre carré, au potentiel 300.

25. L'équivalent mécanique de la chaleur est égal à fort peu près à 425^{km}, c'est-à-dire qu'il faut 425^{km} pour élever de 0° à 1° 1 kilogr. ou 1,000 gr. d'eau. Par conséquent, $\frac{3,24}{425} = 0^c,0076$ représente la quantité de chaleur équivalente au travail développé dans la décharge de notre batterie. Si on prend pour unité de chaleur ou pour calorie la quantité de chaleur qu'exige 1 gramme d'eau pour que sa température varie d'un degré, ce nombre devient $7^c,6$.

Si la décharge passe à travers un fil de fer de poids p et si l'on admet que celui-ci absorbe toute la chaleur développée, l'élévation θ de température du fil sera donnée par

$$\theta = \frac{7^c,c}{p \times 0,11},$$

si $p = 0^g,01$, $\theta = 6909^\circ$.

Il y aura donc fusion du fer. Mais on voit que pour l'obtenir il faudra prendre une très petite quantité de matière.

Je soumets cette exposition de la théorie du potentiel électrique

au jugement des physiciens, et surtout à celui des professeurs des lycées. Mon seul but, en rédigeant ce travail, a été, je le répète, de chercher à introduire dans l'enseignement secondaire des notions qui permettent de donner aux élèves une idée nette de la grandeur des forces électriques. Si cet essai réussit, quelques-uns d'entre eux chercheront peut-être plus tard à approfondir et à étudier dans tous ses détails une théorie d'origine française, et qui peut être considérée comme l'une des plus fécondes parmi celles dont la science s'est enrichie dans ces dernières années.

TABLE.

12. Cas d'un conducteur de forme quelconque.

13. Mesures de ces mêmes quantités en unités relatives à l'aide de l'électromètre de M. Thomson ou de M. Branly.

Pour ce dernier appareil, il est nécessaire de mesurer d'abord la capacité électrostatique du secteur mobile.

14. Mesures du potentiel et de la capacité d'un conducteur en unités absolues à l'aide de l'électromètre Thomson.

15. D'après les mesures de M. W. Thomson, le potentiel d'un élément Daniell vaut 0,00378 en fonction des unités adoptées.

16. Le potentiel $\frac{M}{R}$ d'une sphère est égal à $\sum \frac{\mu}{\rho}$, μ étant une petite masse électrique, ρ sa distance à un point quelconque pris dans l'intérieur; la somme $\sum$ s'étendant à la couche électrique entière.

Dans un conducteur électrisé de forme quelconque, la somme $\sum \frac{\mu}{\rho}$ est constante pour tous les points situés dans l'intérieur du corps, quel que soit le point considéré.

17. Le potentiel $\frac{M}{R}$ d'une sphère mesure le travail effectué pour transporter l'unité d'électricité de l'infini à la surface de la sphère.

18. Potentiel d'un système de corps. — Cas de la bouteille de Leyde sphérique.

19. Analogies du potentiel électrique et de la température.

20. Analogies du potentiel et de la pression hydrostatique.

Applications de la théorie du potentiel électrique.

21. Pression exercée par une sphère électrisée sur le milieu ambiant.

22. Pressions exercées sur les deux faces d'une bouteille de Leyde ou d'un condensateur.

23. Calcul de l'attraction ou de la répulsion de deux sphères électrisées.

24. Énergie électrique ou travail des forces électriques. — Elle est proportionnelle au carré de la charge. — Calcul de sa valeur absolue en kilogrammètres dans le cas d'un condensateur sphérique.

25. Calcul de la quantité de chaleur développée dans le passage de la décharge au travers d'un fil métallique.

NOTE

SUR LE

SYSTÈME ASTRONOMIQUE D'EUDOXE

PAR M. TANNERY

Dans un mémoire sur « *Le sfere omocentriche di Eudosso, di Calippo e di Aristotele* » (Ulrico Hœpli, Milan, 1875), M. G.-V. Schiaparelli a restitué avec un rare bonheur le système astronomique conçu par Eudoxe de Cnide au commencement du IVe siècle avant J.-C. Ce système ayant été généralement méconnu par tous les historiens de l'astronomie, nous essaierons d'en donner une idée succincte d'après le travail de M. Schiaparelli, en employant toutefois le calcul trigonométrique, dont il devait s'abstenir dans la « divination » des connaissances à attribuer à Eudoxe, et en cherchant à faire juger par là de la valeur réelle du système et du degré d'accord qu'il pouvait donner entre les théories et les observations.

Chaque planète (y compris le Soleil et la Lune) est supposée fixée sur l'équateur d'une sphère particulière concentrique à la Terre et animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à elle-même. Les pôles de cet axe sont fixés à leur tour sur la surface d'une seconde sphère concentrique, animée d'un autre mouvement de rotation autour d'un autre axe, et ainsi de suite. Voilà l'idée générale du système.

Pour chacun des sept groupes de sphères ainsi imaginés, celle qui enveloppe toutes les autres a son axe dirigé suivant celui du monde. La durée de sa révolution est le jour sidéral; elle produit l'apparence du mouvement diurne.

La seconde sphère est inclinée suivant l'axe du zodiaque moyen (écliptique). Pour la Lune, la durée de la révolution est celle de la rétrogradation des nœuds, phénomène qu'elle représente.

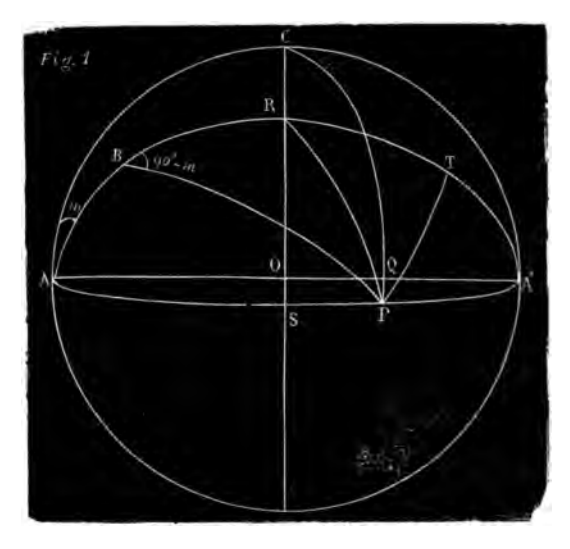
La troisième sphère de la Lune est inclinée suivant l'axe de l'orbite lunaire et tourne en un mois sidéral.

Calippe ajouta plus tard, pour représenter les inégalités de mouvement sur l'orbite, une quatrième et une cinquième sphère, qui sont les troisième et quatrième des planètes d'après Eudoxe.

Pour le Soleil, les sphères sont analogues à celles de la Lune, c'est-à-dire qu'Eudoxe supposait une nutation, par analogie avec les phénomènes lunaires, comme elle existe d'ailleurs réellement; mais, par suite de l'inexactitude des observations, il l'exagérait, sans aucun doute, et lui supposait une période très longue.

Les cinq planètes n'ont pas ce mouvement de nutation ou de rétrogradation des nœuds; la seconde sphère d'Eudoxe accomplit sa rotation pendant la durée de la révolution sidérale. C'est le mouvement moyen en longitude.

La troisième sphère a ses pôles sur l'équateur de la seconde (écliptique), à 90° de la position moyenne en longitude. La durée de sa rotation est celle de la révolution synodique. La quatrième



sphère a ses pôles distants de ceux de la troisième d'un arc i spécial à chaque planète, et tourne en sens contraire avec une vitesse égale.

Nous pouvons faire abstraction des deux premières sphères. Soit AA' les pôles de la troisième sur l'écliptique AOA' (*fig.* 1); soit l'arc de grand cercle $AB = i$, faisant l'angle variable m avec le plan ACA' passant par les pôles de l'écliptique. Menons le quadrant BP faisant le même angle m avec l'arc de cercle perpendiculaire en B au précédent; P sera le lieu de la planète correspondant à l'angle m. Joignons P au pôle de l'écliptique par l'arc de grand cercle CQP, PQ sera la latitude (australe) $-\lambda$, OQ l'équation de longitude δ.

Prolongeons l'arc AB jusqu'en A' et menons PT perpendiculaire; l'arc $PT = \frac{\pi}{2} - m$ et $TA' = \frac{\pi}{2} - i$. Comparons l'hypoténuse des deux triangles rectangles PQA', PTA'. Nous avons immédiatement

$$\sin\delta\cos\lambda = \sin i \sin m. \tag{1}$$

Menons AP, qui coupe en S le grand cercle COC' perpendiculaire au plan de la figure. Dans le triangle CSP, rectangle en S,

$$-\sin\lambda = \cos CS \cos SP, \quad \text{or} \quad CS = RS + m,$$
$$\sin\lambda = \cos SP \sin RS \sin m - \cos SP \cos RS \cos m.$$

Mais dans le triangle ABP, où $RS = \widehat{BAP}$ et $BP = \frac{\pi}{2}$,

$$\cos SP \sin RS = \cos m,$$

et dans les triangles rectangles RSP, RPT,

$$\cos SP \cos RS = \cos RP = \cos i \sin m.$$

Ainsi

$$\sin\lambda = \cos m \sin m - \cos i \sin m \cos m$$

ou

$$\sin\lambda = -\sin^2\frac{i}{2}\sin 2m. \tag{2}$$

La courbe définie par les équations (1) et (2) a la forme d'un 8 très allongé couché suivant l'écliptique; le point double est en O, lieu de la longitude moyenne, δ varie entre $+i$ et $-i$, λ entre $\pm$ arc sin $\left(\sin^2\frac{i}{2}\right)$.

Si nous cherchons à représenter par ce procédé le mouvement du Soleil, nous n'avons qu'à supposer m compté à partir du périgée et $\sin^2 \frac{i}{2}$ négligeable,

$$\delta = \sin i \sin m, \quad \lambda = 0.$$

Or nous avons, si e est l'excentricité de l'orbite

$$\delta = 2e \sin m + \frac{\delta}{n} e^2 \sin 2m + \cdots$$

Si nous négligeons les termes en e^2, les deux formules s'identifient en posant $\sin i = 2e$, soit $e = \frac{1}{60}$, ou 1°; i est d'environ 2°.

Le mouvement maximum en latitude $\sin^2 \frac{i}{2}$ n'atteint pas une minute; il était complètement négligeable.

Pour la Lune, en supposant les arcs comptés sur l'orbite lunaire et la durée de la révolution des sphères égale à celle du mois anomalistique, on se trouvera dans des conditions analogues; e étant environ $\frac{1}{18}$, i sera d'environ 6°, et le mouvement en latitude, à partir de l'orbite lunaire, n'atteindra pas 9'.

En résumé, le système d'Eudoxe permet de représenter les inégalités propres des mouvements planétaires avec autant d'exactitude que celui des épicycles.

Il n'en est pas tout à fait de même pour les inégalités des mouvements héliocentriques.

Pour une première approximation, nous négligerons l'inégalité propre de la planète et celle du Soleil, et par conséquent l'excentricité des orbites ainsi que le carré de l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique.

Si, pour une planète supérieure, nous comptons les longitudes à partir de la conjonction, soit L la longitude moyenne de la planète, Ω celle du nœud, θ l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique, a le rapport des distances du Soleil à la Terre et à la planète, enfin m la différence des longitudes moyennes du Soleil et de la

planète (mouvement synodique), nous pouvons poser, dans ces hypothèses,

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{a \sin m}{1 + a \cos m}, \quad \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\sin\delta} = \frac{\theta}{a}\,\frac{\sin(L - \Omega)}{\sin m}.$$

Pour une planète inférieure, nous désignerons par L la longitude moyenne du Soleil, identique à celle de la planète, comptée toujours à partir de la conjonction supérieure; par a le rapport des distances du Soleil à la planète et à la Terre, et par m la différence de la longitude héliocentrique moyenne de la planète à la longitude moyenne géocentrique. Nous aurons alors

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{a \sin m}{1 + a \cos m}, \quad \frac{\operatorname{tg}\lambda}{\sin(m - \delta)} = a\theta.\frac{\sin(L + m - \Omega)}{\sin m}.$$

Nous remarquons tout d'abord que le système d'Eudoxe ne peut nullement représenter les mouvements en latitude, qui sont soumis à une double période, celle de L et celle de m, tandis que les mouvements en longitude n'ont qu'une seule période, comme les expressions qui représentent son système. Sous le rapport des mouvements en latitude, il faudra donc le considérer comme satisfait, s'il n'y a pas de désacord marqué entre les digressions maxima en théorie et en observation.

Pour les mouvements en longitude, il y aura également désaccord, les maxima réels de δ n'ayant pas lieu pour $\cos m = 0$, mais pour $\cos m = -a$; toutefois si a est suffisamment petit, le désaccord est négligeable.

En négligeant a^2, on a $\delta = a \sin m$.

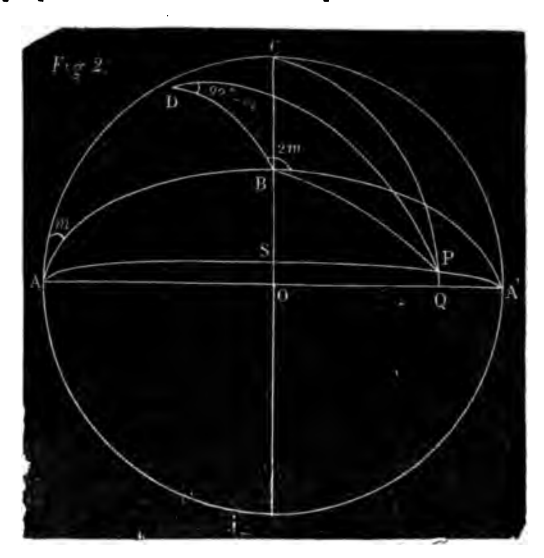
On pourra poser $a = \sin i$ et identifier les formules; pour Saturne $a = \frac{1}{9.5}$, i sera d'environ 6°, le mouvement en latitude négligeable, il peut atteindre en réalité 3°; pour Jupiter $a = \frac{1}{5.2}$, i est d'environ 13°, le mouvement en latitude ne dépassera pas 44'; il peut atteindre en réalité près de 1°1/2.

Pour Mercure, on peut encore représenter le mouvement dans une certaine mesure, qui pouvait suffire pour les anciens, pour

lesquels cette planète n'était observable que dans une petite partie de son cours; pour Mars et Vénus, il n'en était pas de même, le système devait être corrigé.

Il le fut par Calippe; nous avons vu sa correction pour la Lune et le Soleil; il considéra le mouvement de Saturne et de Jupiter comme suffisamment représentés, mais ajouta une troisième sphère pour Mars, Vénus et Mercure; en l'absence d'indications historiques, le système de Calippe ne peut être restitué. M. Schiaparelli a donné une élégante solution pour Mars et Vénus; elle ne s'applique pas à Mercure.

Voici cette solution : Soit AA' les pôles de la troisième sphère sur l'écliptique AOA'. Menons le quadrant AB faisant l'angle



variable m avec le plan ACA' passant par les pôles de l'écliptique. B sera le pôle de la quatrième sphère. Menons par B, l'arc $BD = i$ faisant l'angle $A'BD = 2m$ avec le grand cercle précédent, D sera le pôle d'une cinquième sphère. Menons par D le quadrant DP faisant l'angle m avec le grand cercle perpendiculaire en D à l'arc BD, P est le lieu de la planète; PQ la latitude λ, OQ l'équation de longitude δ.

Menons le demi grand cercle ASPA', coupant OC en S à angle

droit, et comparons cos A'P dans les triangles A'PQ et A'BP,

$$\cos A'P = \sin SP = \sin\delta\cos\lambda = \sin BP \cos PBA'$$
$$= \sin BP \cos 2m \cos DBP + \sin BP \sin 2m \sin DBP.$$

Mais dans le triangle DBP

$$\cos i \cos BP + \sin i \sin BP \cos DBP = 0.$$

Or,

$$\cos BP = \sin i \sin m;$$

donc

$$\sin BP \cos DBP = -\cos i \sin m,$$

et d'autre part

$$\sin BP \sin DBP = \cos m,$$

d'où

$$(3) \quad \begin{cases} \sin\delta\cos\lambda = -\cos i \sin m \cos 2m + \cos m \sin 2m \\ \qquad = \sin m\left(1 + 2\sin^2\frac{i}{2}\cos 2m\right). \end{cases}$$

De même, dans le triangle CSP, rectangle en S,

$$\sin\lambda = \cos CS \cos SP = \cos m \cos BS \cos SP - \sin m \sin BS \cos SP.$$

Or

$$\cos BS \cos SP = \cos BP = \sin i \sin m,$$

$$\sin BS \cos SP = \sin BP \cos PBS = \sin BP \sin PBA'$$
$$= \sin BP \sin DBP \cos 2m - \sin BP \cos DBP \sin 2m.$$

Substituant les valeurs précédemment trouvées,

$$\sin\lambda = \sin i \sin m \cos m - \sin m(\cos m \cos 2m + \cos i \sin m \sin 2m),$$

$$(4) \quad \begin{cases} \sin\lambda = \sin m \cos m\left(\sin i - \cos i - 2\sin^2\frac{i}{2}\cos 2m\right) \\ \qquad = -\frac{\sin 2m}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - i\right)}{\sqrt{2}} + 2\sin^2\frac{i}{2}\cos 2m\right). \end{cases}$$

Les équations (3) et (4) définissent le lieu du point P; pour la discussion de la courbe, il convient de prendre pour coordonnées λ et SP ($\sin SP = \sin\delta\cos\lambda$) plutôt que λ et δ.

Si $i = 0$, la courbe est identique avec celle d'Eudoxe, lorsqu'on suppose, au contraire, pour celle-ci, $i = \frac{\pi}{2}$, c'est la courbe de la voûte quarrable de Viviani; elle embrasse la moitié de l'écliptique avec des digressions en latitude de 30° de part et d'autre.

Si i augmente jusqu'à la valeur arc tg $\frac{1}{3} = 19°28'16''$, elle conserve la même forme, l'arc embrassé de chaque côté du point double O sur l'écliptique étant $\frac{\pi}{2} - i$. Les digressions en latitude diminuent jusqu'à 7°27'50''.

Au delà de la valeur $i =$ arc tg $\frac{1}{3}$, la courbe, quand m varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, au lieu de rester constamment au-dessous de l'écliptique, le coupe en un point dont l'abscisse est toujours $\frac{\pi}{2} - i$ pour la valeur de m correspondant à

$$\sin m = \frac{\left(\sin \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\right)}{\sqrt{2} . \sin \frac{i}{2}},$$

et revient à ce point en décrivant une boucle. Quand m varie dans les autres quadrants, la courbe décrite est symétrique par rapport à l'écliptique, au point double O ou au plan perpendiculaire à l'écliptique.

L'importance de la boucle grandit à mesure que i augmente; la digression maximum de latitude correspondante devient égale en valeur absolue à celle de l'autre partie quand $i = \frac{\pi}{4}$, la dépasse au delà; ce maximum n'est d'ailleurs que de 4°11'57'' quand $i = \frac{\pi}{4}$, mais il augmente au delà jusqu'à 12°30'14'' pour $i = \frac{\pi}{2}$, $m = 60$; pour cette valeur extrême de i, la courbe se réduit à quatre boucles aboutissant au point multiple O.

Le maximum de distance x au grand cercle perpendiculaire en O à l'écliptique ($\sin x = \sin \varepsilon \cos \lambda$) ne descend jamais au-dessous de $\frac{\pi}{4}$ qui est sa valeur constante pour $m = \frac{\pi}{4}$; ce qui rend

la courbe inapplicable à la représentation du mouvement de Mercure, pour lequel l'élongation maximum n'atteint jamais 29°. Elle est 23° environ en moyenne.

Cette distance x descend à son minimum $\frac{\pi}{4}$ quand $i = 60°$: pour $i = \frac{\pi}{4}$ elle est de $47°40'30''$, pour $i = \frac{\pi}{2}$ de $50°20'10''$.

Il est clair qu'avec une courbe de cette nature, les mouvements en longitude de Mars et de Vénus ne peuvent être exactement représentés; elle offre, en effet, pendant la révolution synodique quatre maxima pour δ, tandis qu'il n'y en a que deux en réalité.

Si l'on cherche à obtenir l'égalité aux quadratures, on pourra y arriver en posant $\cot i = a$. On trouvera alors :

pour Mars,

$$i = 56°43'17'', \quad \frac{\pi}{2} - i = 33°16'43'';$$

pour Vénus,

$$i = 54°7'41'', \quad \frac{\pi}{2} - i = 35°52'19''.$$

Le maximum de δ d'après les formules se trouve alors compris entre 45° et 46°. Les digressions maxima vont à près de 9°; ces nombres assez convenables pour Vénus sont un peu forts pour Mars.

En résumé, comme théorie planétaire, le système d'Eudoxe et de Calippe a surtout comme valeur d'être le premier qui ait essayé de soumettre à une loi mathématique les inégalités de mouvement et surtout les stations et rétrogradations des planètes, qui étaient le phénomène le plus saillant pour les anciens.

La solution, simplement graphique, du problème d'Eudoxe, la découverte de cette courbe (hippopède) sinueuse et de ses propriétés suffiraient, d'ailleurs, amplement à justifier la réputation qu'Eudoxe avait acquise parmi ses contemporains, et que les modernes ont, pour la plupart, attaquée avec la légèreté de l'ignorance.

DÉVELOPPEMENT COMPARATIF

DE L'ASPERGILLUS GLAUCUS ET DE L'ASPERGILLUS NIGER

DANS UN MILIEU ARTIFICIEL,

PAR M. GAYON

M. Pasteur a montré depuis longtemps que les organismes les plus simples, tels que la levûre de bière, les bactéries, les vibrions et même des êtres plus complexes, les *Mucédinées,* par exemple, peuvent vivre dans des milieux exclusivement composés de substances chimiques définies.

M. J. Raulin a étendu ces recherches en déterminant le milieu artificiel *complet* où vit l'*Aspergillus niger*. Il a trouvé que cette moisissure atteint son développement maximum dans le milieu suivant (¹) :

Eau	1500
Sucre candi	70
Acide tartrique	4
Azotate d'ammoniaque	4
Phosphate d'ammoniaque	0,60
Carbonate de potasse	0,60
Carbonate de magnésie	0,60
Sulfate d'ammoniaque	0,25
Sulfate de zinc	0,07
Sulfate de fer	0,07
Silicate de potasse	0,07

En semant sur la liqueur précédente quelques spores d'*Aspergillus niger,* M. J. Raulin a obtenu en six jours, à la température de 35 degrés et dans un air humide, 25 grammes de moisissure à

(¹) Raulin, *Etudes chimiques sur la végétation*, 1870, p. 115.

l'état sec. C'est à très peu près le rendement théorique maximum que peut donner la même quantité de matières nutritives.

Comme il y aurait un très grand intérêt à connaître le milieu artificiel approprié à la vie de chaque plante (1), j'ai cherché d'abord si le milieu bien défini de M. J. Raulin conviendrait également à deux moisissures d'espèces très voisines : l'*Aspergillus glaucus* et l'*Aspergillus niger*.

Les résultats que je rapporte ici ont été obtenus à la température de 25 degrés.

Dans des expériences de ce genre, il importe d'opérer toujours avec des espèces bien isolées; aussi les liqueurs ont-elles été chauffées à 100 degrés après leur préparation, les vases passés dans l'eau bouillante au moment de leur emploi, chaque moisissure enfin débarrassée de toutes productions étrangères par des cultures successives sur des liquides purifiés et maintenus au contact de l'air pur.

Les vases que j'ai employés sont des cuvettes de photographe, en porcelaine, pouvant contenir aisément 500 centimètres cubes de liquide. Après l'ensemencement des spores, elles étaient recouvertes d'une lame de verre reposant sur deux baguettes de verre, et le tout était mis dans une étuve à la température constante de 25 degrés. Les lames de verre empêchaient une évaporation trop rapide, sans priver les plantes de l'air nécessaire à leur développement.

Dans ces conditions, l'*Aspergillus glaucus* se développe avec beaucoup plus d'intensité que l'*Aspergillus niger*. Ainsi, par exemple, les poids de récoltes obtenues, au bout de cinq jours, ont été, après dessiccation à 100 degrés :

	I	II	III
Avec l'*Aspergillus glaucus*..	7 gr., 5	10 gr., 0	14 gr., 5
Avec l'*Aspergillus niger*....	3 0	3 0	3 6
Rapports de ces poids......	2,5	3,3	4,0

(1) La science possède déjà des résultats importants dus à MM. G. Ville et Boussingault, sur la culture de quelques végétaux supérieurs.

Dans la dernière expérience, le poids de plante s'est notablement accru, soit parce que les spores ensemencées étaient plus jeunes, soit parce que l'humidité de l'étuve était augmentée par l'évaporation d'un mince filet d'eau qui coulait constamment à la partie inférieure.

L'aspect des moisissures pendant leur végétation peut faire prévoir les différences précédentes. En effet, la couche mycélienne de l'*Aspergillus glaucus* est compacte et dure; elle est bientôt arrêtée dans son extension par les bords de la cuvette, et obligée de se mamelonner, pendant qu'elle se recouvre de fructifications abondantes. Au contraire, la couche mycélienne de l'*Aspergillus niger* est gélatineuse et molle; elle présente quelques plages sans sporanges et quelques sporanges sans couleur. En un mot, ces caractères indiquent une végétation facile de l'*Aspergillus glaucus* et pénible de l'*Aspergillus niger*. M. J. Raulin a montré d'ailleurs que cette dernière moisissure n'atteint son maximum d'accroissement qu'à la température de 35 degrés.

Les liquides sous-jacents éprouvent des modifications correspondantes. J'ai étudié particulièrement les variations de l'acidité et du sucre. Voici des exemples :

1° *Variation de l'acidité.* — L'acidité a été déterminée chaque jour avec de l'eau de chaux sur 10^{cc} de liqueur. Ce sont des centimètres cubes d'eau de chaux qui sont dans le tableau suivant :

	Aspergillus glaucus.	*Aspergillus niger.*
16 janvier	6^{cc}	6^{cc}
17 —	6	6
18 —	8,2	8,0
19 —	2,7	12,2
20 —	2,0	15,2
21 —	1,7	19,5
Volume initial du liquide.	500	500
Volume final du liquide..	264	310

D'après cela, l'acidité peut se représenter par les volumes d'eau de chaux suivants :

	Aspergillus glaucus.		*Aspergillus niger.*
Acidité totale avant...	300^{cc}		300^{cc}
Acidité totale après...	45		604
Acidité *disparue*......	255	Acidité *apparue*.	304

2° *Variation du sucre.* — Le sucre a été déterminé avec 5cc de la liqueur de Fehling sur le liquide étendu de dix fois son volume d'eau distillée. Ce sont les volumes de la liqueur étendue qui sont dans le tableau ci-dessous :

	Aspergillus glaucus.	*Aspergillus niger.*
20 janvier	7cc	7cc
21 —	6,2	6,6
22 —	5,6	6,3
23 —	7,8	7,0
24 —	12,3	7,2
25 —	19,0	7,4
Volume initial du liquide.	500	500
Volume final du liquide..	253	370

D'après cela, on peut représenter le sucre total par le volume de liqueur cupro-potassique capable de le détruire, ce qui donne :

	Aspergillus glaucus	*Aspergillus niger.*
Sucre total avant..	3571cc	3571cc
Sucre total après..	666	2500
Sucre disparu.....	2905	1071

Ainsi, pendant la végétation de l'*Aspergillus glaucus,* le sucre et l'acide tartrique disparaissent en grande quantité; au contraire, pendant la végétation de l'*Aspergillus niger,* le sucre disparaît en petite quantité, et il se forme des acides nouveaux, dont la quantité égale, dans mes expériences, celle qui existait déjà dans la liqueur.

Dans un autre travail, je ferai connaître la nature de ces acides, et j'étudierai le développement comparatif des moisissures précédentes à la température de 35 degrés, c'est-à-dire dans les conditions normales où l'*Aspergillus niger* atteint, d'après M. J. Raulin, son développement maximum.

